Б. М. Будак, А. Виньоли, Ю. Л. Гапоненко, Об одном способе регуляризации для непрерывного выпуклого функционала, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1969, том 9, номер 5, 1046–1056

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 9 Сентябрь 1969 Октябрь № 5

УДК 518:519.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ВЫПУКЛОГО ФУНКЦИОНАЛА

Б. М. БУДАК, А. ВИНЬОЛИ, Ю. Л. ГАПОНЕНКО

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Идея метода

Пусть $J(u)$ — непрерывный выпуклый функционал, заданный на некотором ограниченном, замкнутом выпуклом множестве $U \subseteq H$, H — гильбертово пространство; $J(u)$ достигает минимального значения $J^* = \inf\limits_{u\in U} J(u)$ на множестве $U^* \subseteq U$ элементов $u^* \in U$, причем U^* замкнуто, выпукло, ограничено и не пусто. В общем случае U^* может состоять более чем из одного элемента. В связи с этим минимизирующая $J(u)$ на U последовательность $\{u_n\}$ может, вообще говоря, не сходиться сильно в норме H.

Такие экстремальные задачи, в которых минимизирующие последовательности могут быть не сходящимися сильно, А. Н. Тихонов назвал некорректными. Для выделения сильно сходящейся минимизирующей последовательности в таких задачах А. Н. Тихонов предложил метод регуляризации с помощью последовательности регуляризирующих функционалов [1, 2]. Ниже предлагается регуляризация такого рода задач с помощью последовательности множеств, в каждом из которых минимизирующая последовательность сходится сильно, причем на каждом из этих множеств функционал $J(u)$ достигает наименьшего значения в единственной граничной точке и последовательность этих точек сильно сходится к некоторой вполне определенной точке множества U^*.

§ 2. Основные определения и леммы

Лемма 1. *Если непрерывный выпуклый функционал $J(u)$ достигает наименьшего значения в замкнутом выпуклом ограниченном множестве U_α в единственной точке u_α^*, причем эта точка лежит на границе U_α и $\|u_\alpha^*\| = \sup\limits_{u\in U_\alpha} \|u\| = \alpha$, то произвольная минимизирующая $J(u)$ на U_α последовательность $\{u_n\}$ сходится сильно к u_α^*.*

Доказательство. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена по норме

$$\|u_n\| \leqslant \alpha, \qquad n = 1,\ 2, \ldots .$$

Поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$. Обозначим слабый предел $\{u_{n_k}\}$ через $\bar{u}$. В силу слабой замкнутости замкнутого выпуклого ограниченного множества U_α в гильбертовом пространстве, $\bar{u} \in U_\alpha$. Непрерывный выпуклый функционал $J(u)$ является слабо полунепрерывным снизу. Поэтому

$$J(\bar{u}) \leqslant \underline{\lim}_{k\to+\infty} J(u_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = J(u_\alpha^*).$$

В силу единственности точки минимума $J(u)$ в U_α получаем $\bar{u} = u_\alpha^*$. Итак, $u_{n_k} \to u_\alpha^*$ слабо при $k \to +\infty$. В силу слабой полунепрерывности снизу нормы элемента в H и условий $\|u_\alpha^*\| = \alpha$, $\|u_n\| \leqslant \alpha$ имеем

$$\alpha = \|u_\alpha^*\| \leqslant \underline{\lim}_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| \leqslant \overline{\lim}_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| \leqslant \alpha,$$

откуда следует, что $\|u_{n_k}\| \to \|u_\alpha^*\|$ при $k \to +\infty$. Но из слабой сходимости u_{n_k} к u_α^* и сходимости нормы $\|u_{n_k}\|$ к $\|u_\alpha^*\|$ вытекает сильная сходимость u_{n_k} к u_α^*. Тот факт, что вся последовательность $\{u_n\}$ сходится к u_α^*, легко доказывается от противного. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $Ш[0, \alpha]$ множество элементов $u \in H$, удовлетворяющих условию $\|u\| \leqslant \alpha$, т. е. шар с центром в нуле и радиусом α в гильбертовом пространстве H.

Не нарушая общности рассмотрений, можно считать, что $u = 0$ содержится в множестве U, на котором задан рассматриваемый функционал $J(u)$, $u \in U$. Этого всегда можно добиться «параллельным переносом». Пусть $\sup\limits_{u\in U} \|u\| < R < +\infty$. Тогда U лежит строго внутри шара $Ш[0, R]$. Обозначим через U_α выпуклое множество $U_\alpha = U \cap Ш[0, \alpha]$ при любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant R$. Положим

$$f(\alpha) = \inf_{u\in U_\alpha} J(u), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant R.$$

Лемма 2. *Функция $f(\alpha)$ есть непрерывная монотонно убывающая (не возрастающая) функция α на сегменте $0 \leqslant \alpha \leqslant R$.*

Доказательство. Монотонное убывание (не возрастание) $f(\alpha)$ на этом сегменте очевидно. Докажем, что $f(\alpha)$ непрерывна слева при $0 < \alpha \leqslant R$ и справа при $0 \leqslant \alpha < R$.

1. Предположим, что $f(\alpha)$ имеет разрыв слева в точке $\bar{\alpha}$, $0 < \bar{\alpha} \leqslant R$. Это означает, что существуют такие $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, что для любого α из интервала $(\bar{\alpha} - \delta_0, \bar{\alpha})$ справедливо

$$f(\alpha) - f(\bar{\alpha}) > \varepsilon_0. \qquad (*)$$

Пусть $J(u)$ достигает своего минимума на U_α в точке $\bar{u}$. Возможны два случая: 1) $\|\bar{u}\| = \bar{\alpha} - \Delta\alpha$, $\Delta\alpha > 0$; 2) $\|\bar{u}\| = \bar{\alpha}$. В первом случае в силу невозрастания $f(\alpha)$ получаем противоречие с соотношением $(*)$. Во втором случае построим последовательность элементов:

$$u_n = \frac{\alpha_n}{\bar{\alpha}} \bar{u}, \qquad \alpha_n \in (\bar{\alpha} - \delta_0, \bar{\alpha}), \qquad \alpha_n \to \bar{\alpha} \text{ при } n \to +\infty;$$

$$\text{для нее } J(u_n) \geqslant f(\alpha_n) > f(\bar{\alpha}) + \varepsilon_0 = J(\bar{u}) + \varepsilon_0. \qquad (**)$$

С другой стороны, $u_n \to \bar{u}$. Неравенство (**) противоречит непрерывности функционала $J(u)$.

2. Предположим, что $f(\alpha)$ имеет разрыв справа в точке $\bar{\alpha}$, $0 \leqslant \bar{\alpha} < R$. Это означает, что существуют такие $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, что для любого α из интервала $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \delta_0)$ справедливо

$$f(\bar{\alpha}) - f(\alpha) > \varepsilon_0.$$

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in (\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \delta_0)$, $\alpha_n \to \bar{\alpha}$ при $n \to +\infty$. Пусть $J(u)$ достигает минимального значения на U_{α_n} в точке u_n. Выделим из последовательности $\{u_n\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, $u_{n_k} \to u_0$ слабо. Заметим, что $u_0 \in U_{\bar{\alpha}}$, так как, во-первых, в силу слабой полунепрерывности снизу нормы имеем $\|u_0\| \leqslant \lim\limits_{k \to +\infty} \|u_{n_k}\|$, во-вторых, $u_0 \in U$ в силу слабой замкнутости U и включения $\{u_{n_k}\} \subset U$. С другой стороны, в силу слабой полунепрерывности снизу для $J(u)$ получаем

$$J(u_0) \leqslant \varliminf_{k \to +\infty} J(u_{n_k}) \leqslant f(\bar{\alpha}) - \varepsilon_0,$$

где $u_0 \in U$, а $f(\bar{\alpha}) = \inf\limits_{u \in U_{\bar{\alpha}}} J(u)$.

Полученное противоречие завершает доказательство непрерывности функции $f(\alpha)$ на отрезке $[0, R]$. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $u^*_{\min}$ элемент, удовлетворяющий условиям: 1) $u^*_{\min} \in U^*$, 2) $\|u^*_{\min}\| = \inf\limits_{u \in U^*} \|u\|$. Такой элемент существует и единствен в силу того, что множество U^* замкнуто выпукло, ограничено и непусто.

В силу непрерывности и монотонности $f(\alpha)$ на $[0, R]$ существует такая точка α^*, $0 \leqslant \alpha^* < R$, что при всех α, $0 \leqslant \alpha < \alpha^*$ (если таковые существуют), $f(\alpha) > f(\alpha^*) = f^*$ и при всех α, $\alpha^* \leqslant \alpha \leqslant R$, $f(\alpha) = f(\alpha^*) = f^*$, $f^* = \inf\limits_{[0,R]} f(\alpha)$. График $f(\alpha)$ представлен на фиг. 1.

Лемма 3. *На множестве U_α при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*$ функционал $J(u)$ достигает минимума* $\inf\limits_{u \in U_\alpha} J(u) = f(\alpha)$ *в единственной точке $u_\alpha^* \in U_\alpha$, причем u_α^* принадлежит той части границы U_α, которая лежит на поверхности шара $Ш(0, \alpha)$.*

Доказательство. Очевидно, $\|u^*_{\min}\| = \alpha^*$, где $u^*_{\min}$ — наименьший по норме элемент из $U^* \subseteq U$. На множестве U_{α^*} функционал $J(u)$ достигает наименьшего значения

$$J^* = \inf_{u \in U_{\alpha^*}} J(u) = \inf_{u \in U} J(u)$$

в единственной точке $u^*_{\min}$, причем лежащей на границе U_{α^*} и границе шара $Ш[0, \alpha^*]$. Пусть теперь $0 \leqslant \alpha < \alpha^*$. Предположим, что $J(u)$ достигает минимума на U_α в точке u_α^*, лежащей внутри $Ш[0, \alpha]$. Соединим точку $u_\alpha^* \in U_\alpha \subseteq U_{\alpha^*}$ прямолинейным отрезком с $u^*_{\min} \in U_{\alpha^*}$; он целиком содержится в U_{α^*} в силу выпуклости U_{α^*}. На этом отрезке есть точка $\bar{u} = \bar{\gamma} u_{\alpha^*} + (1-\bar{\gamma}) u^*_{\min}$, $0 < \bar{\gamma} < 1$, лежащая на границе шара $Ш[0, \alpha]$, а следовательно, и на границе U_α. В силу выпуклости функционала $J(u)$ имеем

$$J(\bar{u}) \leqslant \bar{\gamma} J(u_\alpha^*) + (1-\bar{\gamma}) J(u_{\min}).$$

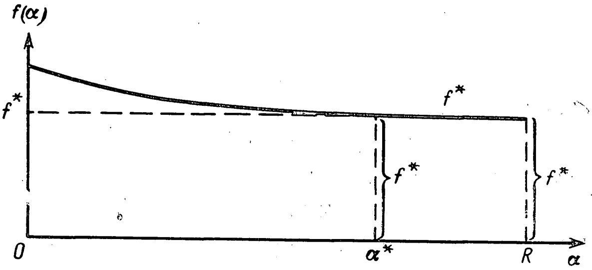
С другой стороны,

$$J(u_\alpha^*) > J(u^*_{\min}), \quad \text{т. е.} \quad J(u^*_{\min}) = J(u_\alpha^*) - \delta, \quad \delta > 0.$$

Следовательно,

$$J(\bar{u}) \leqslant \bar{\gamma} J(u_\alpha^*) + (1-\bar{\gamma}) [J(u_\alpha^*) - \delta] = J(u_\alpha^*) - \delta(1-\bar{\gamma}) < J(u_\alpha^*),$$

что противоречит определению u_α^*. Так, $J(u)$ может достигать наименьшего значения на U_α только в граничной точке U_α, лежащей на границе шара $Ш[0, \alpha]$.



Фиг. 1

Допустим, что $J(u)$ достигает наименьшего значения на U_α в каких-либо двух различных граничных точках $u_{1\alpha}^*$ и $u_{2\alpha}^*$ множества U_α, лежащих на границе шара $Ш[0, \alpha]$. Так как U_α выпукло, а шар $Ш[0, \alpha]$ сильно выпуклый, то отрезок $\gamma u_{1\alpha}^* + (1-\gamma) u_{2\alpha}^*$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, состоит из точек U_α и его внутренние точки являются внутренними точками шара $Ш[0, \alpha]$. Возьмем какую-либо внутреннюю точку этого отрезка $\tilde{u} = \tilde{\gamma} u_{1\alpha}^* + (1-\tilde{\gamma}) u_{2\alpha}^*$, $0 < \tilde{\gamma} < 1$. В силу выпуклости функционала $J(u)$ имеем $J(\tilde{u}) \leqslant \tilde{\gamma} J(u_{1\alpha}^*) + (1-\tilde{\gamma}) J(u_{2\alpha}^*) = J(u_{1\alpha}^*)$, т. е. $J(u)$ достигает минимума на U_α в некоторой внутренней точке шара $Ш[0, \alpha]$, что невозможно по только что доказанному. Лемма 3 доказана.

§ 3. Алгоритм регуляризации

Рассмотрим теперь алгоритм регуляризации, позволяющий строить минимизирующую $J(u)$ на U последовательность, сильно сходящуюся к $u^*_{\min}$. Предлагаемый алгоритм существенно опирается на установленные свойства функции $f(\alpha)$ (см. фиг. 1). Будем предполагать, что у нас есть метод, позволяющий решать экстремальную задачу для $J(u)$ на U_α, $0 \leqslant \alpha \leqslant R$, со сколь угодно высокой точностью по функционалу, т. е. будем предполагать, что для любого $\varepsilon > 0$ наш метод позволяет построить элемент $u_{\varepsilon, \alpha}$ такой, что, во-первых, $u_{\varepsilon, \alpha} \in U_\alpha$, а во-вторых,

$$J(u_{\varepsilon, \alpha}) - \inf_{u \in U_\alpha} J(u) = J(u_{\varepsilon,\alpha}) - f(\alpha) < \varepsilon.$$

Один из таких методов мы рассмотрим в § 4. Алгоритм регуляризации определяем следующим образом.

Задаемся некоторой числовой монотонно убывающей последовательностью $\{\varepsilon_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$; $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to +\infty$.

В качестве нулевого приближения берем нулевой элемент $u_0 \equiv 0$ и параметр $\alpha_0 = 0$.

Первый шаг. Рассмотрим серию множеств $\{U_{\alpha_0, k}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, полученных в результате пересечения исходного множества U и серии концентрических шаров $Ш[0, \alpha_{0,k}]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где

$$\alpha_{0,k} = \alpha_0 + \frac{R - \alpha_0}{2^k} = \frac{R}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (\text{так как } \alpha_0 = 0).$$

Последовательно для $k = 1, 2, 3, \ldots$ решается экстремальная задача одновременно на двух множествах $U_{\alpha_0, k}$ и U со все возрастающей точностью ε_k. Это продолжается до тех пор, пока при некотором k_1 получим, что найденное с точностью ε_{k_1} минимальное значение функционала $J(u)$ на множестве U_{α_0, k_1} более чем на ε_{k_1} превышает найденное с той же точностью ε_{k_1} минимальное значение функционала $J(u)$ на исходном множестве U. Полученное соотношение позволяет заключить, что все элементы, минимизирующие $J(u)$ на U, лежат вне множества $U_{0, \alpha_{k_1}}$.

В качестве первого приближения берем

$$u_1 = u_{\varepsilon_{k_1}, \alpha_{0, k_1}}, \qquad \alpha_1 = \alpha_{0, k_1} = \alpha_0 + \frac{R - \alpha_0}{2^{k_1}} = \frac{R}{2^{k_1}}.$$

После этого первый шаг считается законченным.

Второй шаг. Рассмотрим серию множеств $\{U_{\alpha_1, k}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, полученных в результате пересечения исходного множества U и серии концентрических шаров $Ш[0, \alpha_{1,k}]$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$\alpha_{1,k} = \alpha_1 + \frac{R - \alpha_1}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Последовательно для $k = 1, 2, 3, \ldots$ решается экстремальная задача одновременно на двух множествах $U_{\alpha_1, k}$ и U со все возрастающей точностью $\varepsilon_{(k_1+k)}$. Это продолжается до тех пор, пока при некотором k_2 получим, что найденное с точностью $\varepsilon_{(k_1+k_2)}$ минимальное значение функционала $J(u)$ на множестве U_{α_1, k_2} более чем на $\varepsilon_{(k_1+k_2)}$ превышает найденное с той же точностью $\varepsilon_{(k_1+k_2)}$ минимальное значение функционала $J(u)$ на исходном множестве U. Полученное соотношение позволяет заключить, что все элементы, минимизирующие $J(u)$ на U, лежат вне множества U_{α_1, k_2}. В качестве второго приближения берем

$$u_2 = u_{\varepsilon_{(k_1+k_2)}, \alpha_{1, k_2}}, \qquad \alpha_2 = \alpha_{1k_2} = \alpha_1 + \frac{R - \alpha_1}{2^{k_2}}.$$

Второй шаг окончен.

n-й шаг. Рассмотрим серию множеств $\{U_{\alpha_{n-1}, k}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, полученных в результате пересечения исходного множества U и серии концентрических шаров $\{Ш[0, \alpha_{n-1,k}]\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$\alpha_{n-1,k} = \alpha_{n-1} + \frac{R - \alpha_{n-1}}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Последовательно для $k = 1, 2, 3, \ldots$ решается экстремальная задача одновременно на двух множествах $U_{\alpha_{n-1,k}}$ и U со все возрастающей точностью $\varepsilon_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j + k\right)}$. Это продолжается до тех пор, пока при некотором k_n получим, что найденное с точностью $\varepsilon_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j\right)}$ минимальное значение функционала $J(u)$ на множестве $U_{\alpha_{n-1,k_n}}$ более чем на $\varepsilon_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j\right)}$ превышает найденное с той же точностью $\varepsilon_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j\right)}$ минимальное значение функционала $J(u)$ на исходном множестве U. Полученное соотношение позволяет заключить, что все элементы, минимизирующие $J(u)$ на U, лежат вне множества $U_{\alpha_{n-1,k_n}}$.

В качестве n-го приближения берем

$$u_n = u_{\varepsilon_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j\right)}, \alpha_{n-1}, k_n}, \qquad \alpha_n = \alpha_{n-1,k_n} = \alpha_{n-1} + \frac{R - \alpha_{n-1}}{2^{k_n}}.$$

n-й шаг окончен. И так далее.

С помощью указанного алгоритма получаем две последовательности $\{u_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Обе эти последовательности непустые, так как всегда содержат нулевые приближения. Обе последовательности будут состоять из одного элемента в том случае, если функционал $J(u)$ достигает на нулевом приближении u_0 своего минимального значения на множестве U. В противном случае обе последовательности будут состоять из бесконечного числа элементов, так как при выполнении n-го шага рассматривается серия множеств $\{U_{\alpha_{n-1,k}}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, стягивающихся при $k \to +\infty$ к множеству $U_{\alpha_{n-1}}$, на котором минимальное значение $J(u)$ превышает $\inf\limits_{u \in U} J(u)$ на вполне определенную конечную величину. В силу непрерывности функции

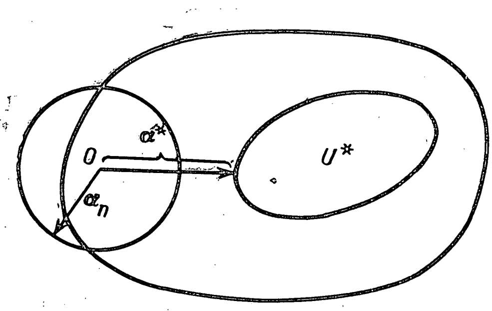
$$f(\alpha) = \inf_{u \in U_\alpha} J(u), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant R,$$

и в силу все возрастающей точности вычисления минимального значения $J(u)$ на множествах $U_{\alpha_{n-1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, обязательно найдется такое достаточно большое k_n, при котором будут выполняться

$$\inf_{u \in U_{\alpha_{n-1,k_n}}} J(u) - \inf_{u \in U} J(u) > 2\varepsilon_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_i + k_n\right)}.$$

Следовательно, найденные с точностью $\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j + k_n}$ минимальные значения функционала $J(u)$ на этих множествах будут различаться более чем на $\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j + \bar{k}_n}$, что и доказывает выполнимость n-го шага общего алгоритма.

Заметим также, что последовательность $\{\alpha_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, будет строго возрастающей последовательностью, оценивающей расстояние от нулевого элемента до множества U^* (см. фиг. 2).



Фиг. 2. $\rho(0, U^*) = \alpha^* > \alpha_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Теорема 1. *Построенные с помощью указанного алгоритма последовательности $\{u_n\}$, $\{\alpha_n\}$ обладают следующими свойствами:*

1) $\alpha_n \to \alpha^* - 0$ *при* $n \to +\infty$,

2) $u_n \to u^*_{\min}$ (*сильно в метрике* H) *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. 1. Последовательность $\{\alpha_n\}$ возрастает и ограничена $\alpha_n \leqslant \alpha^*$, следовательно, $\alpha_n \to \bar{\alpha} \leqslant \alpha^*$. Покажем, что $\bar{\alpha} = \alpha^*$. Предположим противное: $\bar{\alpha} < \alpha^*$. Возьмем произвольную точку $\alpha_0 \in (\bar{\alpha}, \alpha^*)$. Положим $\varepsilon_0 = f(\alpha_0) - f(\alpha^*)$, $\varepsilon_0 > 0$. Определим n_1 из условия $\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n_1} k_j} < {}^1/_2\varepsilon_0$. Определим n_2 из условия $\alpha_0 - \bar{\alpha} > \bar{\alpha} - \alpha_{n_2}$. Положим $n_3 = \max(n_1, n_2)$.

Заметим, что в силу монотонности последовательности $\{\alpha_n\}$ справедливо $\alpha_0 - \bar{\alpha} > \bar{\alpha} - \alpha_{n_3}$. Рассмотрим $(n_3 + 1)$-й шаг. На этом шаге имеем

$$\alpha_{n_3k} = \alpha_{n_3} + \frac{R - \alpha_{n_3}}{2^k}, \qquad \varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n_3} k_j + k} < {}^1/_2\varepsilon_0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Возможны два случая: а) $(n_3 + 1)$-й шаг выполняется при $\alpha_{(n_3+1)} \geqslant \alpha_0$; б) $(n_3 + 1)$-й шаг выполняется при $\alpha_{(n_3+1)} < \alpha_0$. В случае а) получаем противоречие с условием $\alpha_n < \bar{\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$. В случае б) заметим, что $(n_3 + 1)$-й шаг выполняется при $\alpha_{n_3+1} \in (\bar{\alpha}, \alpha_0)$. Действительно, как только точка $\alpha_{n_3\bar{k}}$ впервые попадает на интервал (α_{n_3}, α_0), она обязательно попадает также на интервал $(\bar{\alpha}, \alpha_0)$ в силу того, что

$$\alpha_{n_3,k} = \alpha_{n_3} + \frac{R - \alpha_{n_3}}{2^k}, \qquad \alpha_0 - \bar{\alpha} > \bar{\alpha} - \alpha_{n_3}.$$

С другой стороны, минимальное значение функционала $J(u)$ на множестве $U_{\alpha_{n_3,\bar{k}}}$, вычисленное с точностью $\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n_3} k_j + \bar{k}} < {}^1/_2\varepsilon_0$, более чем на ${}^1/_2\varepsilon_0$ превысит минимальное значение функционала $J(u)$ на множестве U, вычисленное с той же точностью $\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n_3} k_j+\bar{k}}$, в силу того, что

$$f(\alpha_{n_3,\bar{k}})-f(\alpha^*)\geqslant f(\alpha_0)-f(\alpha^*)=\varepsilon_0.$$

Следовательно, (n_3+1)-й шаг выполняется при $\alpha_{n_3+1}\in(\bar{\alpha},\ \alpha_0)$, что противоречит условию $\alpha_n<\bar{\alpha}$, $n=1,2,\ldots$. Итак, $\alpha_n\to\bar{\alpha}=\alpha^*$.

2. Покажем, что для последовательности $\{u_n\}$ и множества U_{α^*} выполнены все условия леммы 1. Действительно, множество U_{α^*} ограничено, замкнуто и выпукло; $\{u_n\}\in U_{\alpha^*}$ по построению. Функционал $J(u)$ достигает наименьшего значения на множестве U_{α^*} в единственной точке $\overset{*}{u}_{\min}$ такой, что $\overset{*}{u}_{\min}\in$ границе U_{α^*} и $\|\overset{*}{u}_{\min}\|=\sup\limits_{\in U_{\alpha^*}}\|u\|=\alpha^*$. Наконец, последовательность $\{u_n\}$ является минимизирующей для $J(u)$ на U_{α^*}:

$$|J(u)-J(\overset{*}{u}_{\min})|\leqslant|J(u_n)-f(\alpha_n)|+|f(\alpha_n)-f(\alpha^*)|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j}+|f(\alpha_n)-f(\alpha^*)|\to 0\quad\text{при}\ n\to+\infty,$$

так как $\varepsilon_{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j}\to 0$ при $n\to+\infty$ по определению, $[f(\alpha_n)-f(\alpha^*)]\to 0$ при $n\to+\infty$ в силу того, что $\alpha_n\to\alpha^*$ при $n\to+\infty$, а функция $f(\alpha)$ непрерывна. Следовательно, в силу леммы 1, последовательность $\{u_n\}$ сходится сильно к $\overset{*}{u}_{\min}$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Об использовании метода условного градиента в общем алгоритме

В качестве конкретного метода для решения экстремальной задачи на каждом шаге общего алгоритма может быть взят любой метод, позволяющий решать экстремальную задачу с заданной точностью (по функционалу). В частности, если функционал дифференцируем и его градиент удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям (см., например, [3, 4]), то может быть предложен метод условного градиента. Этот метод дает оценку

$$J(v)-J^*\leqslant(I(v),\ \bar{v}^\alpha-v),$$

где $J^*=\inf\limits_{v\in U_\alpha}J(v)$, $(I(v),\ \bar{v}-v)$ — линейный (по отношению к стоящей справа разности $\bar{v}-v$) функционал, представляющий собой результат применения градиента $I(v)$ функционала $J(v)$ в точке v к разности $\bar{v}-v$; $\bar{v}^\alpha$ — решение линейной экстремальной задачи для $(I(v),\ w)$ на $U_\alpha(w\in\in U_\alpha)$. Ясно, что для эффективного применения метода условного градиента нужно уметь находить $\bar{v}^\alpha$, т. е. уметь решать экстремальную задачу для линейного функционала $(I(v),\ w)$ при $w\in U_\alpha$. Покажем, как можно находить $\bar{v}^\alpha$ в следующем практически важном случае:

$$H=L_2{}^r[0,\ T],\ v(t)=(v^1(t),\ldots,v^r(t)),\ v^i(t)\in L_2[0,\ T];$$

$U=\{|v^i(t)|\leqslant 1$ для всех $t\in[0,T]$ и всех $i=1,2,\ldots,r\}$.

В данном случае имеем следующую задачу.

Найти такое $\bar{v}^\alpha\in U_\alpha$, чтобы

$$(I(v), \bar{v}^{\alpha}) = \min_{w \in U_\alpha} (I(v), w), \quad \text{где} \quad U_\alpha = U \cap Ш[0, \alpha],\ U = \{|v^i(t)| \leqslant 1,$$

$$t \in [0, T],\ i = 1, 2, \ldots, r\}, \qquad Ш[0, \alpha] = \left\{ \|v\|^2_{L_2^r[0,T]} = \int_0^T v^2(t)\,dt \leqslant \alpha^2 \right\}.$$

В силу линейности функционал $(I(v), w)$ представим в виде

$$(I(v), w) = \int_0^T \psi(t) w(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — известная функция.

Если, например, функционал $J(u)$ имеет вид

$$J(u) = \int_0^T g(x(t), u(t), t)\,dt + \Phi(x(T)),$$

причем $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x(0) = x_0$, то функция $\psi(t)$ находится как решение сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -f_x{}^*\psi(t) + g_x, \quad T \geqslant t \geqslant 0, \quad \psi(T) = -\Phi_x(x(T))$$

(см., например, [4]). Не ограничивая общности, можно считать, что $\|\psi\| = \alpha$. Введем обозначения

$$w_1(t) = \operatorname{sign}[-\psi(t)], \quad w_2(t) = [-\psi(t)].$$

Определим элемент $\bar{w}^\alpha$ следующим образом:

1) $\bar{w}^\alpha = w_1$, $\quad \|w_1(t)\| \leqslant \alpha$;

2) $\bar{w}^\alpha = w_2$, $\quad |w_2{}^i(t)| \leqslant 1$, $\quad i = 1, \ldots, r$, $\quad t \in [0, T]$.

Если одновременно выполнены оба условия, то в качестве элемента $\bar{w}^\alpha(t)$ можно взять либо w_1, либо w_2. Если не выполнено ни одно из двух вышеприведенных условий, то полагаем

3) $\bar{w}^\alpha(t) = [-\bar{\psi}_{\bar{\gamma}}(t)]$,

где $\bar{\psi}_{\bar{\gamma}}(t)$ определяется следующим образом. Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $\{\psi_\gamma(t)\}$, $\gamma \geqslant 1$, построенное по правилу

$$\psi_\gamma(t) = \gamma\psi(t).$$

Образуем семейство «срезанных» функций

$$\bar{\psi}_\gamma(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\psi_\gamma(t), & t \in \mu_1 = \{t: |\psi_\gamma(t)| > 1\}, \\ \psi_\gamma(t), & t \in \mu_2 = \{t: |\psi_\gamma(t)| \leqslant 1\}. \end{cases}$$

Заметим, что $[-\bar{\psi}_\gamma(t)] \xrightarrow[L_2^r[0,T]]{} w_1(t)$ при $\gamma \to +\infty$. Следовательно, $\|\bar{\psi}_\gamma(t)\| \to \|w_1(t)\| > \alpha$ при $\gamma \to +\infty$, причем $\|\bar{\psi}_{\gamma_2}\| > \|\bar{\psi}_{\gamma_1}\|$ при $\gamma_2 > \gamma_1$, $\|\bar{\psi}_{\gamma_2}\| < \|w_1(t)\|$.

С другой стороны, $\|\bar{\psi}_{\gamma=1}\| < \|\psi\| = \alpha$. Следовательно, существует, и притом единственное, $\bar{\gamma}$ такое, что $\|\bar{\psi}_{\bar{\gamma}}(t)\| = \alpha$. Именно это значение параметра $\bar{\gamma}$ используется для определения функции $\bar{w}^\alpha$ в третьем случае.

Теорема 2. *Если функция $\overline{w}^\alpha(t)$ определена указанным выше способом, то справедливо равенство*

$$(I(v),\ \overline{w}^\alpha) = \min_{\overline{w}\in U_\alpha} (I(v)\overline{w}).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательно три случая, возможные при определении $\overline{w}^\alpha(t)$.

1. $\overline{w}^\alpha(t) = w_1(t)$, заметим, что, $w_1(t)$ удовлетворяет условию

$$(I(v), w_1) = \min_{w\in U} (I(v), w).$$

Так как $\|w_1\| \leqslant \alpha$, то $w_1 \in U_\alpha = U \cap Ш[0,\alpha]$. С другой стороны, $U_\alpha \subseteq U$, поэтому

$$(I(v), w_1) = \min_{w\in U_\alpha} (I(v), w).$$

2. $\overline{w}^\alpha(t) = w_2(t)$. Заметим, что $w_2(t)$ удовлетворяет условию

$$(I(v), w_2) = \min_{w\in Ш[0,\alpha]} (I(v), w).$$

С другой стороны, $U_\alpha \subseteq Ш[0,\ \alpha]$. Поэтому если $|w_2{}^i(t)| \leqslant 1$, $t\in[t_0,\ T]$, $i = 1, 2, \ldots, r$, то $w_2 \in U_\alpha = U \cap Ш[0,\ \alpha]$ и, кроме того,

$$(I(v), w_2) = \min_{w\in U_\alpha} (I(v), w).$$

Ясно также, что если одновременно выполнены оба условия, то в качестве минимизирующего элемента $\overline{w}^\alpha(t)$ может быть взят либо w_1, либо w_2.

3. $\overline{w}^\alpha(t) = -\psi_\gamma(t)$. Покажем, что для любого $\overline{\overline{w}} \in U_\alpha$ выполняется неравенство

$$(I(v),\ \overline{w}^\alpha) - (I(v),\ w) \leqslant 0,$$

т. е.

$$\int_0^T \psi\overline{w}^\alpha\,dt - \int_0^T \psi\overline{\overline{w}}\,dt \leqslant 0.$$

Разобьем множество $[0,\ T]$ на три подмножества:

$$\mu_0 = \{t : |\overline{w}^\alpha| = |\overline{\overline{w}}| = 1\},\qquad \mu_1 = \{t : |\overline{w}^\alpha| = 1,\quad |\overline{\overline{w}}| < 1\},$$

$$\mu_2 = \{t : |\overline{w}^\alpha| < 1\}.$$

Ясно, что можно ограничиться доказательством неравенства на множестве $\mu_1 \cup \mu_2$.

Ясно также, что в силу линейности функционала $(I(v),\ w)$ можно ограничиться рассмотрением только тех элементов $\overline{\overline{w}}$, для которых $\|\overline{\overline{w}}\| = \alpha$. Действительно, рассмотрим «линейный» функционал $(\tilde{I}(v), w) = (I(v), w) + C$, где $C = \mathrm{const}$ определяется из условия $(\tilde{I}(v), w) < 0$ для любого $w \in U_\alpha$. Существование такой константы C следует из линейности функционала $(I(v),\ w)$ и ограниченности множества U_α. Минимизирующие элементы у функционалов $(\tilde{I}(v), w)$ и $(I(v), w)$ одинаковы.

Если $\|\overline{\overline{w}}\| < \alpha$, то найдется такое число $\gamma > 1$, что $\|\gamma\overline{\overline{w}}\| = \alpha$, причем

$$(\tilde{I}(v),\ \gamma\overline{\overline{w}}) = \gamma(\tilde{I}(v),\ \overline{\overline{w}}) \leqslant (\tilde{I}(v),\ \overline{\overline{w}}),$$

так как $(\tilde{I}(v), \overline{\overline{w}}) < 0$, а $\gamma > 1$.

Полученное неравенство позволяет ограничиться рассмотрением только тех элементов $\overline{\overline{w}}$, для которых $\|\overline{\overline{w}}\| = \alpha$. Для удобства вычислений возьмем в качестве функции $\psi(t)$, задающей линейный функционал, функцию $\psi_{\bar{\gamma}}(t)$:

$$\int_0^T \psi_{\bar{\gamma}}(t)\,\overline{w}^{\alpha}(t)\,dt - \int_0^T \psi_{\bar{\gamma}}(t)\,\overline{\overline{w}}(t)\,dt = \int_{\mu_1} \psi_{\bar{\gamma}}\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt + \int_{\mu_2} \psi_{\bar{\gamma}}\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt.$$

В первом члене подынтегральная функция отрицательна, причем $|\psi_{\bar{\gamma}}(t)| > 1$, поэтому

$$\int_{\mu_1} \psi_{\bar{\gamma}}\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt \leqslant \int_{\mu_1} \operatorname{sign}\,[\psi_{\bar{\gamma}}]\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt = -\int_{\mu_1} \overline{w}^{\alpha}\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt.$$

В силу определения $\overline{w}^{\alpha}(t)$ имеем

$$\int_{\mu_2} \psi_{\bar{\gamma}}\,(t)\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt = -\int_{\mu_2} \overline{w}^{\alpha}\,(\overline{w}^{\alpha} - \overline{\overline{w}})\,dt,$$

откуда получаем

$$\int_0^T \psi_{\bar{\gamma}}\overline{w}^{\alpha}\,dt - \int_0^T \psi_{\bar{\gamma}}\overline{\overline{w}}\,dt \leqslant -\int_{\mu_1\cup\mu_2} (\overline{w}^{\alpha})^2\,dt + \int_{\mu_1\cup\mu_2} \overline{w}^{\alpha}\overline{\overline{w}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant -\|\overline{w}^{\alpha}\|^2_{L_2^r[\mu_1\cup\mu_2]} + \|\overline{w}^{\alpha}\|_{L_2^r[\mu_1\cup\mu_2]}\|\overline{\overline{w}}\|_{L_2^r[\mu_1\cup\mu_2]} = 0,$$

так как

$$\|\overline{\overline{w}}\|^2_{L_2^r[\mu_1\cup\mu_2]} = \|\overline{w}^{\alpha}\|^2_{L_2^r[\mu_1\cup\mu_2]} = \alpha^2 - \|\overline{w}^{\alpha}\|^2_{L_2^r[\mu_0]}.$$

Теорема 2 доказана.

Поступила в редакцию 29.04.1968
Переработанный вариант 16.01.1969

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов. О методах регуляризации задач оптимального управления. Докл. АН СССР, 1965, 162, № 4, 763—765.
2. А. Н. Тихонов. Об устойчивости задачи оптимизации функционалов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 4, 631—634.
3. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. Вестн. ЛГУ, 1964, вып. 19, 5—18.
4. Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк. Методы минимизации при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 5, 787—823.