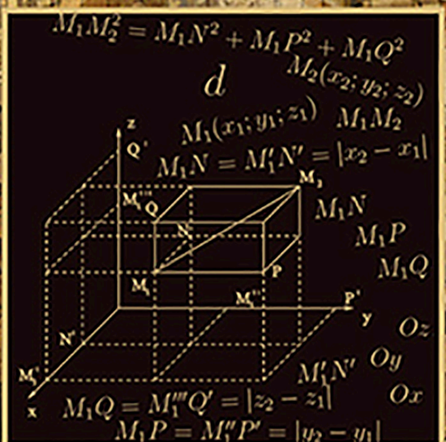
Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря

КУРС МАТЕМАТИКИ
для технических высших учебных заведений

- Аналитическая геометрия
- Пределы и ряды
- Функции и производные
- Линейная и векторная алгебра



ЛАНЬ

Лауреат второго Всероссийского конкурса НМС по математике
Министерства образования и науки РФ «Лучшее учебное издание по математике
в номинации «Математика в технических вузах»

**В. Г. ЗУБКОВ, В. А. ЛЯХОВСКИЙ,
А. И. МАРТЫНЕНКО, В. Б. МИНОСЦЕВ**

КУРС МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Часть 1
Аналитическая геометрия. Пределы и ряды. Функции и производные. Линейная и векторная алгебра

Под редакцией
В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря

Издание второе, исправленное

*ДОПУЩЕНО
НМС по математике Министерства образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по инженерно-техническим специальностям*

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2013 •

ББК 22.1я73
К 93

Зубков В. Г., Ляховский В. А., Мартыненко А. И., Миносцев В. Б.

К 93 Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 1. Аналитическая геометрия. Пределы и ряды. Функции и производные. Линейная и векторная алгебра: Учебное пособие / Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 544 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1558-8

Учебное пособие соответствует Государственному образовательному стандарту, включает в себя лекции и практические занятия. Первая часть пособия содержит 34 лекции и 34 практических занятия по следующим разделам: «Множества», «Системы координат», «Функции одной переменной», «Теория пределов и числовые ряды», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Элементы линейной, векторной и высшей алгебры, аналитической геометрии».

Пособие предназначено для студентов технических, физико-математических и экономических направлений.

ББК 22.1я73

Рецензенты:

А. В. СЕТУХА — доктор физико-математических наук, профессор, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; *А. А. ПУНТУС* — профессор факультета прикладной математики и физики МАИ, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; *А. В. НАУМОВ* — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей МАИ; *А. Б. БУДАК* — доцент, зам. председателя отделения учебников и учебных пособий НМС по математике Министерства образования и науки РФ; *У. Г. ПИРУМОВ* — профессор, зав. кафедрой вычислительной математики и программирования МАИ (Технический университет), член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

Оглавление

Предисловие 7

ГЛАВА I. Введение 9

Лекция 1. Множества. Символика и терминология 9

Практическое занятие 1. Множества 23

Лекция 2. Системы координат 30

Практическое занятие 2. Системы координат 42

ГЛАВА II. Функции одной переменной 45

Лекция 3. Функция. Основные понятия 45

Лекция 4. Основные элементарные функции 60

Практическое занятие 3. Основные свойства функций 77

Практическое занятие 4. Построение графиков функций 80

Лекция 5. Кривые второго порядка 88

Практическое занятие 5. Кривые второго порядка 101

ГЛАВА III. Теория пределов и числовые ряды 105

Лекция 6. Теория пределов. Определения 105

Практическое занятие 6. Контрольная работа по материалу лекций 1–5 116

Лекция 7. Теория пределов. Основные теоремы 120

Практическое занятие 7. Теория пределов 130

Лекция 8. Приёмы раскрытия неопределённостей 141

Практическое занятие 8.
Теория пределов (продолжение) 151

Лекция 9. Непрерывность функции 160

Практическое занятие 9. Непрерывность функции 169

Лекция 10. Числовые ряды.
Определения и свойства 174

Практическое занятие 10. Числовые ряды.
Основные понятия 181

Лекция 11. Знакопостоянные ряды 185

Практическое занятие 11. Знакопостоянные ряды 192

Лекция 12. Знакопеременные ряды 195

Практическое занятие 12. Знакопеременные ряды 205

ГЛАВА IV. Дифференциальное исчисление функций одной
переменной 209

Лекция 13. Производная функции. Определение 209

Практическое занятие 13.
Контрольная работа по материалам лекций 7–12 216

Лекция 14. Правила вычисления производных 219

Практическое занятие 14. Производная функции 227

Лекция 15. Приложения производной функции 232

Практическое занятие 15. Производная функции (продолжение) 238

Лекция 16. Дифференциал функции 242

Практическое занятие 16. Дифференциал
функции 250

Лекция 17. Теоремы о функциях 253

Практическое занятие 17. Теоремы о функциях 262

Лекция 18. Функциональные ряды 265

Практическое занятие 18.
Контрольная работа по материалам лекций 13–17 274

Лекция 19. Формула и ряд Тейлора 278

Практическое занятие 19. Формула и ряд Тейлора 289

Лекция 20. Экстремум и интервалы монотонности функции 297

Практическое занятие 20. Исследование функций 306

Лекция 21. Выпуклость и вогнутость,
точки перегиба 310

Практическое занятие 21.
Выпуклость и вогнутость, точки перегиба 319

Лекция 22. Асимптоты и общая схема
исследования функций 324

Практическое занятие 22. Общая схема
исследования функций 334

Лекция 23. Решение нелинейных уравнений 342

Практическое занятие 23.
Контрольная работа по материалу лекций 20–22 352

ГЛАВА V. Элементы векторной и линейной алгебры 359

Лекция 24. Матрицы и определители 359

Практическое занятие 24. Матрицы
и определители 369

Лекция 25. Обратная матрица. Ранг матрицы 375

Практическое занятие 25. Обратная матрица.
Ранг матрицы 381

Лекция 26. Системы линейных уравнений 385

Практическое занятие 26.
Системы линейных уравнений 397

Лекция 27. Векторная алгебра. Основные понятия 401

Практическое занятие 27. Контрольная работа по исследованию и решению систем линейных уравнений 409

Лекция 28. Векторная алгебра (продолжение) 415

Практическое занятие 28. Векторная алгебра. Основные понятия 423

Лекция 29. Векторное и смешанное произведения векторов 431

Практическое занятие 29. Векторное и смешанное произведение векторов 439

Лекция 30. Плоскость 444

Практическое занятие 30. Плоскость 451

Лекция 31. Прямая в пространстве 454

Практическое занятие 31. Прямая в пространстве 464

Лекция 32. Понятие n-мерного векторного пространства 470

Практическое занятие 32. Контрольная работа по материалу лекций 27–31 488

ГЛАВА VI. Элементы высшей алгебры 490

Лекция 33. Комплексные числа 490

Практическое занятие 33. Комплексные числа 501

Лекция 34. Рациональные функции одной переменной 506

Практическое занятие 34. Разложение дробей на простейшие 516

Ответы 521

Предметный указатель 539

Предисловие

Данное учебное пособие в значительной части повторяет «Курс высшей математики» под редакцией В.Б.Миносцева, выдержавший восемь изданий и ставший победителем конкурса «Университетская книга — 2008». Изменения и дополнения внесены в основном в III и IV части пособия, посвящённые дифференциальным уравнениям, элементам вариационного исчисления и теории оптимизации, теории вероятности и математической статистике. Решение сложных задач этих разделов данного курса входит в лабораторные работы, проводимые с использованием пакетов прикладных программ Excel, MathCad, а также для контингента, не имеющего соответствующих лицензий на пользование этими пакетами, в Maxima, находящемся в свободном доступе.

Мы считаем, что выпускники технических высших учебных заведений должны уметь доводить решение до числа, а в сложных случаях это невозможно сделать без использования численных методов и пакетов прикладных программ. С этими вопросами студенты должны начать активно знакомиться уже в курсе математики.

Учебное пособие объединяет лекционный материал, примеры и задачи для практических занятий и лабораторных работ. Авторы считают, что наряду со студентами дневной (очной) формы обучения данное пособие с успехом может быть использовано студентами дистанционной (заочной) формы обучения. Основное отличие таких студентов от студентов очной формы обучения состоит в том, что они систематически не слушают лекции и не занимаются на практических занятиях непосредственно под руководством преподавателей, которые специально подбирают и дозируют материал, приучая студентов к регулярным занятиям. Поэтому построенное по предложенной схеме учебное пособие поможет студенту-заочнику изучать материал подобно студенту очной формы системы обучения при условии регулярной и последовательной его проработки.

Кроме изучения материала лекций, решения примеров на практических занятиях студентам необходимо выполнить индивидуальные задания, выпущенные отдельными сборниками. При этом ссылки даются на соответствующие определения, теоремы и формулы лекций.

Понимая все трудности изучения курса математики, особенно при дистанционном обучении, авторы в рамках программы старались, по возможности, облегчить обучающимся выполнение этой задачи. Курсивом в пособии выделены определения и теоремы, формулировки которых следует выучить наизусть. Пособие рассчитано на 404 часа аудиторных занятий, соответственно, в I-ой части (семестре) 8 часов в неделю, во II и III частях по 6 часов, в IV части по 4 часа в неделю. При отличающемся числе аудиторных часов материал рекомендуется распределять по числу лекций и практических занятий, соответствующих учебному плану направлений или специальностей.

В принятом в 2011 году Государственном образовательном стандарте математика разбивается на отдельные курсы. В нашем пособии «Алгебра и геометрия» изложены в лекциях 2–5, 24–34 (часть I), «Математический анализ» в лекциях 1, 3, 4, 6–23 (часть I), 35–50 (часть II), «Кратные и криволинейные интегральные элементы теории векторного поля» в лекциях 51–68 (часть II), «Теория функций комплексной переменной» в лекциях 33 (часть I), 42, 59 (часть II), «Дифференциальные уравнения» в лекциях 69–80 (часть III), «Вариационное исчисление и теория оптимизации» в лекциях 81–85 (часть III), «Теория вероятностей и математическая статистика» в лекциях 86–102 (часть IV). Пособие в целом соответствует Государственному стандарту технических специальностей. Однако мы считаем, что отдельные его разделы могут быть использованы для экономических, юридических и других направлений.

Мы благодарим рецензента пособия чл.-корр. РАН, зав. кафедрой «Вычислительная математика и программирование» МАИ У.Г. Пирумова за постоянное внимание к нашей работе. Профессора А.И. Кибзун, А.А. Пунтус, А.В. Сетуха и доценты А.Б. Будак, А.В. Наумов ознакомились с отдельными разделами пособия и сделали ряд ценных замечаний, которые мы учли при подготовке издания. Всем им мы чрезвычайно признательны.

Авторы благодарны преподавателям кафедры общей и прикладной математики МГИУ, принявшим участие в обсуждении материала данного учебного пособия. Активное участие в подготовке «Курса высшей математики» принимал скончавшийся в 1999 году профессор МГИУ В.А. Ляховский. В память об этом замечательном человеке и прекрасном педагоге мы посчитали необходимым оставить его в числе авторов первых двух частей данного «Курса математики для технических высших учебных заведений».

В.Б.Миносцев, Е.А.Пушкарь

ГЛАВА I

Введение

Лекция 1. Множества. Символика и терминология

Предмет математики. Множества. Операции над множествами. Кванторы общности и существования. Необходимое и достаточное условия. Числовые множества. Элементы математической логики.

1.1. Предмет математики

Математика — это точная абстрактная наука, оперирующая своими специальными понятиями, структурами и символами. Основными методами в математических исследованиях являются строгие логические рассуждения, а объектами изучения – математические модели. Но абстрактность математики не означает её отрыв от реальной жизни. Реальные задачи описываются в математических терминах, как правило, в безразмерном виде. Это есть так называемая математическая модель явления. При решении уже поставленной математической задачи используются абстрактные математические методы.

Одна и та же математическая модель может описывать свойства различных реальных явлений. Само реальное явление рассматривается вновь после решения математической задачи и её анализа, на основании которого могут быть сделаны выводы не только о состоянии явления, но и о его развитии. В этом смысле без математики нет науки. Ещё великий Леонардо да Винчи писал: «Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя применить ни одну из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой». И ещё: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства».

Математические методы играют огромную роль в образовании современного высококвалифицированного специалиста в технических областях, предоставляя ему аппарат исследования, дисциплинируя, приучая к строгим логическим рассуждениям. Поскольку язык и методы математики широко используются при современном преподавании всех естественно-научных и технических дисциплин, математика изучается с первого семестра в любом высшем техническом учебном заведении, и на неё выделяется значительная часть времени студента.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторой математической символики и терминологии.

1.2. Множества. Основные понятия

Под множеством понимается совокупность каких-либо объектов, называемых элементами этого множества. Например, можно говорить о множестве студентов данного вуза, множестве учебников по математике, множестве треугольников, множестве действительных чисел и т.д. Множества, содержащие конечное число элементов, называются конечными (множество студентов, множество учебников). Множества с бесконечным числом элементов называются бесконечными (множество треугольников, множество действительных чисел).

Множество обычно обозначается заглавными латинскими буквами A, B, C, $\ldots$, а их элементы – малыми a, b, c, $\ldots$.

Утверждение «элемент x принадлежит множеству A» записывается так: $x \in A$, а противоположное утверждение «элемент x не принадлежит множеству A» записывается так: $x \notin A$.

Определение 1.1. *Если все элементы множества A принадлежат также множеству B, то говорят, что «A содержится в B» или: «A является подмножеством B», и записывают так: $A \subset B$.*

Определение 1.2. *Два множества называются равными (совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$.*

Пример 1.1. *Сформулируйте словами утверждение:*
$A = B \iff A \subset B$ *и* $B \subset A$ *и докажите его.*

Конечное множество можно задать перечислением его элементов. Так, запись $\text{A} = \{1;\ 2;\ 3\}$ означает, что множество A состоит из трёх чисел 1, 2, 3. При этом порядок перечисления элементов не играет роли: $\{1;\ 2;\ 3\} = \{3;\ 2;\ 1\}$.

Бесконечное множество можно задать, написав условие, которое выполняется для всех элементов данного множества и не выполняется для других. Запись

$$B = \{x \mid 1 < x < 2\}$$

означает множество всех чисел, больших одного, но меньших двух.

Множество удобно схематически изображать в виде «диаграмм Эйлера» — геометрических фигур на плоскости, взаимное расположение которых отражает отношение между множествами. Так, например, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то A изображается частью B, а B частью C (рис. 1). С помощью диаграммы Эйлера на рис. 1 наглядно видно свойство транзитивности операции включения множеств: $A \subset B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

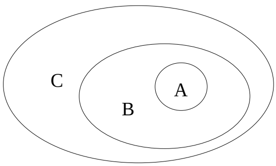


Рис. 1. *Диаграмма Эйлера*

Определение 1.3. *Множество называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом* $\oslash$.

Так, например, множество отрицательных натуральных чисел пусто.

1.3. Операции над множествами

Определение 1.4. *Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, одновременно входящих и в A, и в B. Это записывается следующим образом: $A \cap B = C$.*

Иллюстрация пересечения двух множеств с помощью диаграмм Эйлера приведена на рис. 2, где множество C заштриховано.

Пример 1.2. *Если множество A есть интервал (1;5) а множество B есть интервал (2;7), то пересечение множеств A и B есть интервал (2;5).*

Свойства операции пересечения множеств приведем без доказательств:

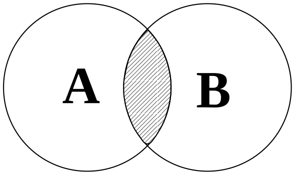


Рис. 2. *Пересечение множеств A и B*

1. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность).
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (ассоциативность).
3. $A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A$.
4. $A \cap A = A$.
5. $A \cap \oslash = \oslash$.

Определение 1.5. *Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из данных множеств или A, или B, или A и B одновременно. Это обозначается следующим образом: $A \cup B = C$.*

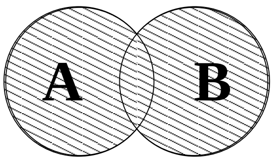


Рис. 3. *Объединение множеств A и B*

Иллюстрация объединения с использованием диаграмм Эйлера приведена на рис. 3, где множество C заштриховано.

Пример 1.3. *Если множество A есть отрезок $[1;3]$, множество B есть отрезок $[2;5]$, то $A \cup B$ есть отрезок $B = [1;5]$.*

Свойства операции объединения множеств приведем без доказательств:

1) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность).
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ (ассоциативность).
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность).

4) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
5) $A \cup A = A$.
6) $A \cup \oslash = A$.

Определение 1.6. *Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих B. Разность A и B обозначается $A \backslash B$ и изображена штриховкой на рис. 4.*

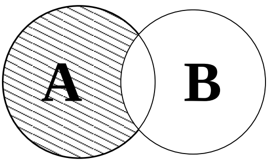


Рис. 4. *Разность множеств A и B*

Операция вычитания множеств не коммутативна : $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Пример 1.4. *Если* $A = (1; 10)$, $B = (3; 20)$, *то* $A \backslash B = (1; 3]$, $B \backslash A = [10; 20)$.

1.4. Кванторы общности и существования

При изложении материала мы будем использовать знак $\forall$, называемый квантором общности, и знак $\exists$, называемый квантором существования. Символ $\forall x$ означает:«для любого x», «для всех x», «для каждого x», «какое бы ни было x». Запись $\forall x > 0$ означает: «для всех положительных x». Запись $\forall x \in M$ читается: «для всех x, принадлежащих множеству M».

Обозначение $\exists x$ означает: «существует такое x, что ...», «по крайней мере для одного x...», запись $\exists x > 0$ читается: «существует такое положительное число x, что...», запись $\exists x_1, x_2 \in M$ означает: «существуют такие x_1, x_2 – элементы множества M, что ...».

Нам также неоднократно придется использовать символы $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

Запись логического следования $A \Longrightarrow B$ означает, что если верно утверждение A, то верно и утверждение B, то-есть, из A следует B.

Запись логической равносильности $\Longleftrightarrow$ означает, что из A следует B и наоборот, из B следует A.

Так, например, запись: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall x > N \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ читается следующим образом: «для любого ε больше 0 существует N такое, что для любых x, больших N, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$».

1.5. Необходимое и достаточное условие

Любая теорема может быть сформулирована в виде: если выполняется условие A, то верно утверждение B. Будем называть это прямой теоремой и схематически запишем в виде:

Теорема 1.1.

$$A \Longrightarrow B.$$

Условие A стоит после слова «если», утверждение B написано после слова «то».

Определение 1.7. *A называется достаточным условием для выполнения B. В свою очередь, B является необходимым условием для выполнения A.*

Для лучшего усвоения введённых понятий рассмотрим очевидно справедливое утверждение не из области математики.

Теорема 1.2. *Если человек здоров, то у него есть голова.*

Здесь здоровье является достаточным условием наличия у человека головы. Наоборот, наличие головы является необходимым условием здоровья. Подумайте, будет ли это условие достаточным для того, чтобы человек был здоров? Реально ли вообще сформулировать достаточное условие того, что человек здоров?

Обозначим $\bar{A}$ утверждение, заключающееся в отрицании утверждения A(читается «не A»). Если справедлива прямая теорема 1.1, то методом «от противного» легко можно доказать справедливость следующего утверждения, которое называется «противоположная к обратной теорема»:

Теорема 1.3. $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$.

Доказательство Имеем $A \Longrightarrow B$, нужно доказать, что $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$ Предположим противное: $\bar{B} \Longrightarrow A$, но в соответствии с теоремой 1.1 $A \Longrightarrow B$. Полученное противоречие ($\bar{B} \Longrightarrow B$) доказывает теорему.

Аналогично можно доказать, что если справедлива теорема 1.3, то верна теорема 1.1, т.е. эти утверждения равносильны.

Для теоремы 1.2 противоположным к обратному будет утверждение: «Если у человека нет головы, то он не здоров».

Проведите доказательство этого утверждения самостоятельно методом «от противного».

Наряду с прямой теоремой 1.1 можно рассмотреть утверждение, называемое «обратной теоремой»:

Теорема 1.4.
$$B \Longrightarrow A.$$

Однако обратная теорема не всегда справедлива, если верна прямая. Так, например, для теоремы 1.2 обратное утверждение: «Если у человека есть голова, то он здоров», очевидно, не верно.

Если все же теорема 1.4 справедлива, то методом «от противного» исходя из неё доказывается справедливость утверждения, называемого «противоположная теорема»:

Теорема 1.5. $\bar{A} \Longrightarrow \bar{B}$.

Наоборот, из теоремы 1.5 вытекает справедливость теоремы 1.4, т.е. эти утверждения равносильны. Заметим, что из прямой теоремы 1.1 не обязательно следует справедливость противоположной теоремы 1.5.

Приведенные связи удобно запоминать, представляя себе следующий «логический квадрат» (рис. 5):

$A \Longrightarrow B$ Прямая теорема	$B \Longrightarrow A$ Обратная теорема
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$ Противоположная к обратной теорема	$\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$ Противоположная теорема

Рис. 5. *Логический квадрат*

Если наряду с прямой теоремой выполняется также обратная теорема, то A является «необходимым и достаточным» условием для B. То же самое можно сказать про B по отношению к A.

Так, например, то, что треугольник прямоугольный, является необходимым и достаточным условием того, что квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других.

1.6. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел

Определение 1.8. *Числа 1,2,3,... называются натуральными.*

Сумма и произведение натуральных чисел будет числом натуральным, а разность и частное – не всегда. При вычитании натуральных чисел может получится отрицательное число, а при делении – не целое. Например, при делении $\frac{7}{3}$ получится целая часть 2 и 1 в остатке, что записывается следующим равенством: $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$.

Приводя к общему знаменателю, получим равенство: $7 = 2 \cdot 3 + 1$. В этих равенствах 7 называется делимым, 3 – делителем, 2 – целой частью и 1 – остатком (остаток всегда меньше делителя). Если остаток равен нулю, то говорят, что делимое делится на делитель, как, например, 6 делится на 3. Если натуральное число, большее единицы, делится только на 1 и на себя (что всегда справедливо), то оно называется простым. Простыми числами являются числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т.д. Любое натуральное число может быть представлено в виде произведения простых сомножителей. Например : $12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 7 = 1 \cdot 7$ и т.д.

Определение 1.9. *Наименьшим общим кратным двух данных натуральных чисел называется наименьшее из чисел, которые делятся на каждое из них.*

Для любых двух натуральных чисел всегда найдется наименьшее общее кратное, поскольку их произведение всегда делится на каждое из двух данных.

Наименьшее общее кратное 12 и 18 равно 36. Для того чтобы найти наименьшее общее кратное двух чисел, нужно первое число домножить на простые множители, входящие в разложение второго числа и не входящие в разложение первого: $12 \cdot 3 = 36$.

Определение 1.10. *Наибольшим общим делителем двух данных натуральных чисел называется наибольшее из чисел, на которые делится каждое из них.*

Для любых двух натуральных чисел всегда найдется наибольший общий делитель, поскольку любые два числа всегда делятся на единицу. Если у двух натуральных чисел нет других общих делителей кроме единицы, они называются взаимно простыми. Наибольший общий делитель 12 и 18 равен 6. Для того, чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел, нужно перемножить общие простые множители, входящие в разложение и одного, и другого числа: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

1.7. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. *Натуральные, противоположные натуральным числам и ноль образуют множество целых чисел (множество $\mathbb{Z}$).*

Сумма, произведение и разность целых чисел является целым числом, а частное – не всегда. Иногда множество отрицательных целых чисел обозначается $\mathbb{Z}_-$.

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.8. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. *Рациональными числами называются числа вида $\dfrac{m}{n}$, где m – целое ($m \in \mathbb{Z}$), n – натуральное ($n \in \mathbb{N}$), m и n взаимно простые. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.*

Множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел, так как любое целое число m можно рассматривать как рациональное, представив в виде $\left(\dfrac{m}{1}\right)$. Сумма, произведение, разность, частное рациональных чисел (при ненулевом знаменателе) является числом рациональным, однако корень из рационального числа – не всегда, как, например, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и т.д.

Всякое рациональное число $\left(\dfrac{m}{n}\right)$ можно представить в виде десятичной дроби, конечной или периодической. И наоборот, любая конечная или периодическая десятичная дробь может быть записана в виде простой дроби.

ПРИМЕР 1.5. $\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,5$; $\left(\dfrac{4}{5}\right) = 0,8$; $\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0,666... = 0,(6)$; $\left(\dfrac{965}{132}\right) = 7,31(06)$.

Две последние десятичные дроби бесконечные периодические. Повторяющиеся цифры называются периодом дроби и пишутся в скобках, количество этих цифр называется длиной периода. Для обратного преобразования конечной десятичной дроби её нужно представить в виде простой и сократить: $0,8 = \left(\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)$. На самом деле разница между конечной дробью и периодической непринципиальная. Так, $0,5 = 0,4(9)$.

Перевод периодической десятичной дроби в простую объясним на примере.

Пример 1.6. *Записать в виде простой дроби 0,(6)*

Р е ш е н и е: Периодическую дробь 0,(6) обозначим за x: 0,(6)=x, тогда, поскольку $10 \cdot x = 10 \cdot 0,666... = 6,666...$, легко заметить, что $10 \cdot x = 6 + x$. Решая это уравнение, получаем: $9 \cdot x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

Определение 1.13. *Целой частью числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данное. Целая часть числа x обозначается $[x]$.*

Примеры. $[3,56] = 3; [0,12] = 0; [-0,12] = -1; \left[-\dfrac{13}{4}\right] = -4;$ $[5] = 5; [0] = 0.$

Определение 1.14. *Дробной частью числа называется разность между самим числом и его целой частью. Дробная часть числа обозначается $\{x\}$. Она строго меньше единицы и находится в пределах: $0 \leqslant \{x\} < 1$.*

Примеры. $3,56 = 0,56; 0,12 = 0,12; -0,12 = 0,88;$
$\left\{-\dfrac{13}{4}\right\} = \dfrac{3}{4}; 5 = 0; 0 = 0.$

1.9. Множество $\mathbb{J}$ иррациональных чисел

Определение 1.15. *Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь.*

Примерами иррациональных чисел являются $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{11}$, π, e и т.д. Заметим, что $\mathbb{J} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$. Иррациональное число нельзя представить в виде простой дроби, его также невозможно «выписать до конца» (представить в виде конечной десятичной дроби), поэтому запись $\sqrt{2} = 1{,}41$ ошибочна, следует писать $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Заданное бесконечной непериодической дробью иррациональное число определяет две последовательности конечных (рациональных) десятичных дробей, называемых десятичными приближениями по недостатку и по избытку. Например, для $\sqrt{2}$ можно написать:

$1 < \sqrt{2} < 2$,

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$,

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

$\ldots$

В инженерных расчетах при замене иррациональных чисел их рациональными приближениями достаточно во всех вычислениях брать на один знак больше, чем требуется в результате, и затем округлить результат.

Для иррациональных чисел можно также определить целую и дробную части, причём для $x \in \mathbb{J} \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{J}$.

1.10. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел

Определение 1.16. *Все рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных (вещественных) чисел:* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$.

В множестве действительных чисел всегда выполнимы сложение, вычитание, умножение, деление (не на ноль), возведение в любую действительную степень положительного числа, извлечение корня нечётной степени из отрицательного числа.

В множестве действительных чисел невозможно извлечение корня чётной степени из отрицательного числа.

1.11. Числовая ось

Множеству действительных чисел можно дать простую геометрическую интерпретацию. Выберем на прямой положительное направление (указывается стрелкой), начало отсчёта и единицу масштаба. Такая прямая называется числовой осью. Каждой её точке можно поставить в соответствие единственное действительное число следующим образом: положительное число x изображается точкой, расположенной на оси на расстоянии x в направлении стрелки (на рис. 6

справа от O), отрицательное – с другой стороны (на рис. 6 слева от O) на расстоянии x от O.

Число x называется координатой соответствующей точки на числовой оси. Из двух чисел больше будет то, которое расположено на числовой оси дальше в направлении стрелки (на рис. 6 – правее).

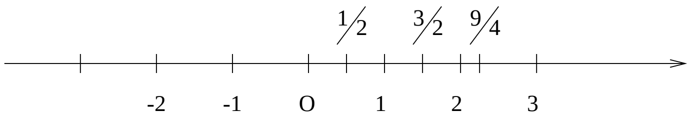


Рис. 6. *Числовая ось*

Например, $-1 > -2$.

1.12. Числовые промежутки

Если известны два действительных числа a и b, $a < b$, то можно определить следующие множества действительных чисел, находящихся между двумя данными – числовые промежутки.

Отрезок (сегмент) $[a; b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,

Интервал $(a; b) = \{x \mid a < x < b\}$.

В частности, можно рассматривать бесконечные интервалы:

$(-\infty; +\infty) = \{x \in R\}, (a; +\infty) = \{x \mid x > a\}, (-\infty; b) = \{x \mid x < b\}$.

Полуинтервал. $[a; b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}, (a; b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

В частности, можно рассматривать бесконечные полуинтервалы:

$[a; +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}, (-\infty; b] = \{x \mid x \leqslant b\}$.

Числовые промежутки изображают на числовой оси, причём если граничная точка принадлежит промежутку – она закрашена, если нет – изображается светлым кружком («выкалывается»). На рис. 7 изображен полуинтервал (2;5].

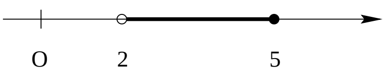


Рис. 7. *Полуинтервал (2;5]*

Числовые промежутки будем выделять штриховкой или утолщённой линией.

1.13. Элементы математической логики

В математической логике константы, переменные и выражения могут принимать всего лишь два значения: «истина» ("true") или «ложь» ("false"). Часто эти значения кодируются цифрами «истина»=1, «ложь»=0. Логические переменные обозначают большими и малыми латинскими буквами: x, y_1, y_2, A, B, C, $\ldots$.

Кроме логических констант, переменных и выражений, в математической логике рассматриваются «высказывания», которые также могут принимать значение «истина» или «ложь». Например, высказывание «$-7 < -5$» принимает значение «истина»; высказывание «$x^2 < 4$» истинно при $x \in (-2; 2)$ и ложно при остальных значениях x.

Существуют три основные логические операции – отрицание, дизъюнкция и конъюнкция.

Определение 1.17. *Отрицанием называется (унарная) логическая операция над одним аргументом, дающая значение «истина», когда аргумент ложен, и «ложь», когда аргумент истинен.*

Отрицание обозначается чертой, которая ставится над операндом $\bar{A}$ или $\neg A$. Все логические операции задаются таблицей истинности, в которой перечисляются возможные значения операндов и значений логических операций. Для операции отрицания таблица истинности имеет вид табл.1.

Простейшее свойство операции отрицания: $\bar{\bar{A}} = A$.

Определение 1.18. *Дизъюнкцией двух аргументов A и B называется бинарная логическая операция, в результате которой образуется логическая переменная C, истинная в том случае, если хотя бы один из аргументов A или B принимает значение «истина».*

Дизъюнкция также называется логическим *или*, логическим сложением.

Дизъюнкция обозначается $A \vee B$ или $A + B$.

Согласно определению операция «дизъюнкция» представляется таблицей истинности табл.2.

Простейшие свойства дизъюнкции:

$$A \vee 0 = A; \qquad A \vee 1 = 1; \qquad A \vee A = A; \qquad A \vee \bar{A} = 1;$$

$$A \vee B = B \vee A; \qquad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C).$$

Поэтому: $A \vee B \vee C \vee D \vee 1 \vee \cdots = 1$. $A \vee \bar{A} \vee B \cdots = 1$.

Определение 1.19. *Конъюнкцией двух аргументов A и B называется бинарная логическая операция, в результате которой образуется логическая переменная C, истинная в том и только том случае, если оба операнда A и B истинны.*

Конъюнкция также называется логическим *и*, логическим умножением.

Конъюнкция обозначается или $A\&B$, или $A \wedge B$, или AB.

Таблица истинности для операции «конъюнкция» представлена в табл.3.

Простейшие свойства конъюнкции:

$$A\&0 = 0; \qquad A\&1 = A; \qquad A\&A = A; \qquad A\&\bar{A} = 0;$$

$$A\&B = B\&A; \qquad (A\&B)\&C = A\&(B\&C)$$

Приоритет логических операций: отрицание (высший приоритет), конъюнкция (средний) и дизъюнкция (низший).

A	A
0	1
1	0

Таблица 1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 2

A	B	$A \,\&\, B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3

Приведем некоторые тождества, связывающие введенные логические операции:

$A\&B \vee A\&C = A\&(B \vee C)$

$(A \vee B)\&(A \vee C) = A \vee B\&C$

$\overline{A \vee B} = \overline{A}\&\overline{B}$

$\overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Все эти формулы можно доказать, используя приведенные выше таблицы истинности основных логических операций. Некоторые правила можно вывести, используя основные законы. Для простоты и удобства манипуляций над логическими выражениями логические операции дизъюнкции и конъюнкции можно обозначать как в элементарной математике $+$ и $\cdot$ (знак умножения можно не писать). Докажем так называемые правила поглощения:

$A \vee A\&B = A$

Доказательство: $A \vee A\&B = A + A \cdot B = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$.

$A\&(A \vee B) = A$

Доказательство: $A\&(A \vee B) = A(A + B) = AA + AB = A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$.

$A \vee A\&B \vee A\&C\&D = A$

Доказательство: $A \vee A\&B \vee A\&C\&D = A + AB + ACD = A(1 + B + CD) = A \cdot 1 = A$.

Логические выражения можно перемножать как в обычной алгебре, раскрывая скобки: $(A \vee B)\&(C \vee D) = A\&C \vee A\&D \vee B\&C \vee B\&D$, или в другой записи: $(A + B)(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$

Пример 1.7. *Найти значение логического выражения* $A\&B \vee C\&B \vee D\&B \vee A\&B\&C \vee A\&B\&E$ *при* $A = 1$

Решение: Переписываем выражение в более наглядной и привычной форме: $AB + CB + DB + ABC + ABE = (AB + AB + ABE) + CB + DB = AB(1 + C + E) + B(C + D) = AB + B(C + D) = B(A + C + D) = B(1 + (C + D)) = B \cdot 1 = B$

Пример 1.8. *Найти значение логического выражения* $A \vee A\&B \vee C\&D \vee C\&D\&E \vee A\&F$ *при* $C = 0$

Решение: $A + AB + CD + CDE + AF = (A \cdot 1 + AB + AF) + C(D + DE) = A(1 + B + F) + 0(D + DE) = A \cdot 1 + 0 = A$

Пример 1.9. *Найти значение логического выражения* $A\&B \vee A\&B\&C \vee A\&B\&D \vee B\&D \vee B\&E\&F$ *при* $D = 1$

Решение: $AB + ABC + ABD + BD + BEF = AB(1 + C + D) + BD + BEF = AB + B(D + EF) = AB + B(1 + EF) = AB + B = B$

Практическое занятие 1. Множества

При решении примеров данного практического занятия используется материал средней школы и материал лекции 1. Применение метода интервалов для решения неравенств иллюстрируется примерами 1.2–1.5

Пример 1.1. *Пусть* $A = [-3; 5], B = (-5; 7), C = [1; 2]$. *Найдите множество:* $A_0 = (A \cap B) \cup (B \cap C)$.

Решение: Для нахождения результата операций над числовыми промежутками их удобно изображать на числовых осях, расположенных одна под другой с согласованным началом и одинаковым масштабом. Если исходные промежутки A и B заштриховать, то их пересечением будет множество точек, заштрихованных на каждой из осей (рис. 8), а их объединением – множество точек, заштрихованных хотя бы на одной из осей (рис. 9).

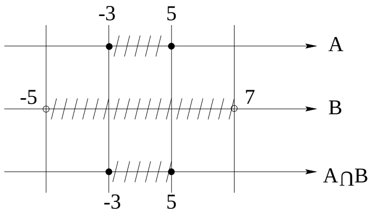


Рис. 8. *Нахождение пересечения* $[-3;5] \cap (-5;7)$

Пользуясь этим правилом, последовательно получим $A \cap B$, $B \cap C$ и, наконец, $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ (рис. 8, 10, 11).

Ответ: $A_0 = [-3;5]$.

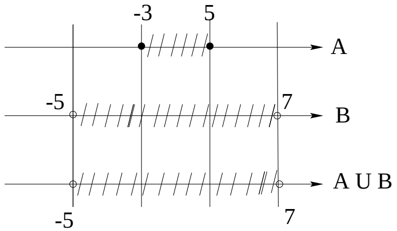


Рис. 9. *Нахождение объединения* $[-3;5] \cup (-5;7)$

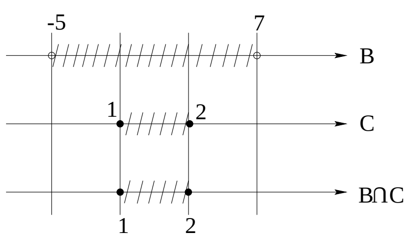


Рис. 10. *Нахождение пересечения* $(-5;7) \cap [1;2]$

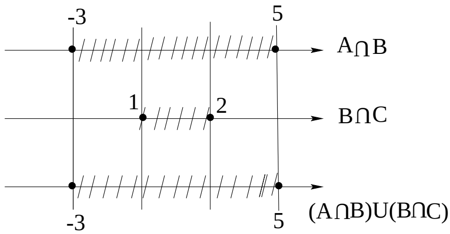


Рис. 11. *Решение примера 1.1*

Пример 1.2. *Найдите элементы множества:*
$A_0 = \{x \mid (2-3x)(x+4)(x-2) > 0\}$.

Р е ш е н и е: Неравенство $(2-3x)(x+4)(x-2) > 0$ решим методом интервалов, для чего нанесем на числовую ось значения x, при которых левая часть неравенства обращается в ноль: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$. (рис. 12)

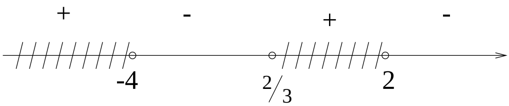


Рис. 12. *Решение примера 1.2*

Сами эти значения не удовлетворяют неравенству, поэтому соответствующие точки «выколоты».

Знаки выражения в левой части неравенства определим, подставляя в него по одному значению из каждого интервала, на которые все множество R разбилось точками x_1, x_2, x_3. Отметим штриховкой те интервалы, на которых выражение в левой части неравенства положительно. Это множество является искомым.

Ответ:$A_0 = (-\infty; -4) \cup (\frac{2}{3}; 2)$.

Пример 1.3. *Задайте характеристическим свойством множество:*

A_0 – множество всех натуральных чисел, меньших 5 или больших 10.

Р е ш е н и е: В условии требуется,чтобы натуральные числа были меньше 5 или больше 10, т.е. искомое множество есть объединение двух подмножеств: множества натуральных чисел, меньших 5 и больших 10.

Ответ: $A_0 = \{x|x < 5, x \in N\} \cup \{x|x > 10, x \in N\}$.

Пример 1.4. *Решите систему неравенств:*

$$\begin{cases} (x-3)(x+2) < 0, \\ (5-2x)(x+1) > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Решение системы неравенств есть пересечение множеств решений каждого из входящих в систему неравенств. Аналогично тому, как это делалось при решении примера 1.2, решим каждое из неравенств системы методом интервалов и найдем их пересечение (рис 13).

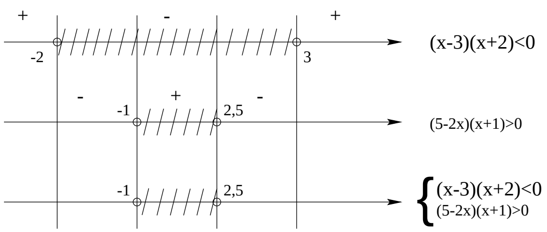


Рис. 13. *Решение примера 1.4*

Ответ: $x \in (-1; 2,5)$.

Пример 1.5. *Решите совокупность систем неравенств:*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0, \\ (x^2-1)(x^2+7) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 - x^2 + x - 1 < 0, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е: Решение совокупности систем неравенств есть объединение решений каждой системы, входящей в совокупность. Для решения разложим каждый многочлен в произведение с помощью корней:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0, \\ (x^2-1)(x^2+7) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 - x^2 + x - 1 < 0, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ (x+1)(x-1)(x^2+7) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x^2+1) < 0, \\ (x+2)(x-1) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение совокупности систем методом интервалов представлено на рис. 14

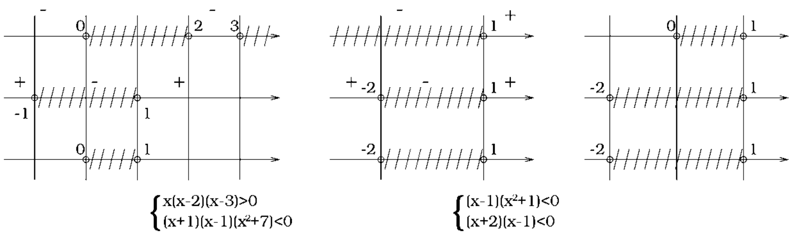


Рис. 14. *Решение примера 1.5*

Ответ: $x \in (-2; 1)$

Самостоятельная работа

Пример 1.6. *Пусть* $A = [-3; 5], B = (-5; 7), C = [1; 2)$. *Найдите множества:*
$A_1 = A \cap B \cap C,\quad A_2 = A \cup B \cup C,\quad A_3 = (A \cup B| \cap C,\quad A_4 = (A \cap B) \cup C$
$A_5 = A \cup (B \cap C),\quad A_6 = A \cap (B \cup C),\quad A_7 = B \setminus A.$

Пример 1.7. *Найдите элементы следующих множеств:*
$A_1 = \{x | 5x - 6 - x^2 = 0\}$, $B_1 = \{x | 5x - 6 - x^2 < 0\}$,
$A_2 = \{a | 5 - a^2 = 0\}$, $B_2 = \{a | 5 - a^2 > 0\}$,
$A_3 = \{y | 6y + y^2 = 0\}$, $B_3 = \{y | 6y + y^2 \leqslant 0\}$,
$A_4 = \{x | (x-1)(2x+1)(x+3) = 0\}$, $B_4 = \{x | (x-1)(2x+1)(x+3) < 0\}$,
$A_5 = \{x | x^2 + 1 = 0\}$, $B_5 = \{x | x^2 + 1 \geqslant 0\}$,
$C = \{x | 1 < x < 5, x \in N\}$, $D = \{x | x = (-1)^n, n \in N\}$,
$E = \{x | x = 1 + (-1)^n \cdot 3, n \in N\}$.

Пример 1.8. *Задайте характеристическим свойством множества:*
A_1 – *множество всех действительных чисел, больших 2 и меньших 5,*
A_2 – *множество всех действительных чисел, не больших 5,*
A_3 – *множество всех отрицательных рациональных чисел,*
A_4 – *множество всех неотрицательных действительных чисел,*
A_5 – *множество всех отрицательных целых чисел,*
A_6 – *множество всех цифр, т.е.* $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Решите системы неравенств, приведенные в примерах 1.9 – 1.13.

Пример 1.9. $\begin{cases} x^2 - 6x + 15 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 > 0. \end{cases}$

Пример 1.10. $\begin{cases} x^2 - 4x - 8 > 0, \\ x^2 - 8 < 0. \end{cases}$

Пример 1.11. $\begin{cases} (x-3)(2-x) \geqslant 0, \\ 4x^2 + 12x + 11 \geqslant 0. \end{cases}$

Пример 1.12. $\begin{cases} 8 - x^2 \geqslant 0, \\ x + 2 > 8 - x^2. \end{cases}$

Пример 1.13. $\begin{cases} x + 5 \geqslant 0, \\ 1 - x > 0, \\ x + 5 < (1-x)^2. \end{cases}$

Решите совокупности систем неравенств, приведенные в примерах 1.14 – 1.18.

Пример 1.14. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 > (8-2x)^2, \\ 8 - 2x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ 8 - 2x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 1.15. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 > 1, \\ 2 + x < x^2, \\ 2 + x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ x^2 < 2 + x. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 1.16. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ \dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 < 0, \\ \dfrac{3-x}{x^2 - 5x + 6} > 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 1.17. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7 - x \geqslant 0, \\ 5x + 1 \geqslant (7-x)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 5x + 1 \geqslant 0, \\ 7 - x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 1.18. $$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>1,\\ \dfrac{2x+\dfrac{2}{5}}{5(1-x)}>1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0<x<1,\\ 0<\dfrac{2x+\dfrac{2}{5}}{5(1-x)}<1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Пример 1.19. *Разложите на простые множители числа:*
а) 90; *б)* 120; *в)* 48; *г)* 54.

Пример 1.20. *Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел:*
а) 90 *и* 120; *б)* 48 *и* 54.

Пример 1.21. *Найдите целую часть и остаток от деления чисел:*
а) $\dfrac{17}{3}$; *б)* $\dfrac{22}{5}$; *в)* $\dfrac{6}{2}$; *г)* $\dfrac{2}{3}$.

Пример 1.22. *Представьте в виде десятичной дроби:*
а) $-\dfrac{4}{25}$; *б)* $\dfrac{2}{9}$; *в)* $-\dfrac{17}{16}$; *г)* $2\dfrac{4}{11}$.

Пример 1.23. *Представьте в виде обыкновенной дроби:*
а) 2,04; *б)* −3,12; *в)* 5,(3); *г)* 1,2(3).

Пример 1.24. *Вычислите без помощи калькулятора:*
а) $0{,}(2)+0{,}(3)$,
б) $0{,}(2)-0{,}(37)$,
в) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}+0{,}(3)\right):0{,}25}{0{,}12(3):0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}32.$

Предварительно переведите периодические дроби в простые и не забывайте порядок операций: сначала вычисляется выражение в скобках, потом операции возведения в степень (извлечение корня), умножение и деление, затем сложение и вычитание.

Лекция 2. Системы координат

Абсолютная величина действительного числа. Положение точки на прямой, на плоскости, в пространстве. Расстояние между двумя точками. Преобразование координат. Полярные координаты.

2.1. Абсолютная величина действительного числа

Определение 2.1. *Абсолютной величиной или модулем действительного числа x называется само это число, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Например: $|2| = 2$, т.к. $2 > 0$, $|-3| = -(-3) = 3$, т.к. $-3 < 0$, $|x^2+4| = x^2+4$, так как $x^2+4 > 0$ при всех $x \in R$, $|0| = 0$.

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{если} \quad x-3 \geqslant 0, \\ -(x-3), & \text{если} \quad x-3 < 0; \end{cases}$$

$$|a+5| = \begin{cases} a+5, & \text{если} \quad a+5 \geqslant 0, \\ -(a+5), & \text{если} \quad a+5 < 0. \end{cases}$$

Модуль дейтвительного числа x равен расстоянию на числовой оси от точки x до начала координат.

Расстояние между двумя точками на оси с координатами x_1 и x_2 выражается формулой:

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{2.2}$$

Получим эту формулу для случая, когда $x_2 \geqslant x_1 \geqslant 0$ (рис. 15).

В этом случае $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$ и $d = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$.

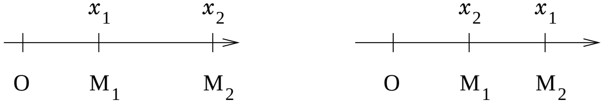


Рис. 15. *Расстояние между точками на оси*

Если $x_1 > x_2 \geqslant 0$ (рис. 15), то $d = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = |x_2 - x_1|$, так как $x_2 - x_1 < 0$.

Для остальных случаев расположения M_1 и M_2 формула доказывается аналогично.

Пример 2.1. *Для данных a и $R > 0$ отметить на числовой оси множество $M = \{x||x - a| < R\}$.*

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой 2.2 множество M есть множество точек числовой оси, расстояние от которых до данной точки меньше R, т.е. интервал с центром в a и длиной $2R$:

$M = \{x||x - a| < R\} = \{x|x \in (a - R; a + R)\} =$
$= \{x|a - R < x < a + R\}$.

Ответ: см. рис. 16.

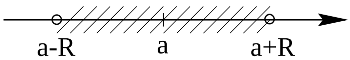


Рис. 16. $\{x||x - a| < R\}$

Приведем свойства модуля действительного числа, которые вытекают из определения модуля и свойств арифметических операций.

1) $|x| \geqslant 0$,
2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
3) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$,
4) $|x^\alpha| = |x|^\alpha$ если $\exists x^\alpha$,
5) $|x| = |-x|$,
6) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$ для $\forall a > 0$,
7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
8) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

Заметим, что из свойств модуля и того факта, что арифметический корень квадратный неотрицателен, следует, что корень квадратный из полного квадрата некоторого выражения a равен модулю этого выражения:

$$\sqrt{a^2} = |a|. \tag{2.3}$$

Так, например, $\sqrt{5^2}=5$; $\sqrt{(-3)^2} = 3$(а не -3);
$\sqrt{(x+5)^2}=|x+5|$.

Аналогичное замечание справедливо при любом сокращении показателя корня и степени подкоренного выражения на чётное число:

$$\sqrt[2k]{a^{2n}} = \sqrt[k]{|a|^n} \quad \forall k, n \in N. \tag{2.4}$$

Например: $\sqrt[4]{(x-3)^6} = \sqrt{|x-3|^3}$.

2.2. Положение точки на прямой

Определение 2.2. *Координатой точки M на числовой оси называется действительное число x, которое соответствует этой точке (см. п. 1.11 лекции 1).*

2.3. Положение точки на плоскости

В декартовой системе координат положение точки на плоскости определяется двумя числами. Зададим на плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси Ox и Oy, имеющие общее начало O (совпадающее с точкой пересечения). Плоскость, в которой расположены оси, назовем координатной плоскостью Oxy. Проекцией точки M на ось Ox называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту ось; аналогично определяется проекция точки M на ось Oy. Произвольная точка M плоскости имеет две координаты, одна из которых (координата x) соответствует её проекции на ось Ox, а другая (координата y) – её проекции на ось Oy (рис. 17).

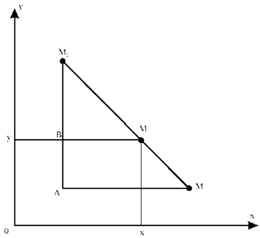


Рис. 17. *Координатная плоскость Oxy*

Определение 2.3. *Координата x называется абсциссой точки M, а координата y — ординатой точки M. Упорядоченная пара чисел $(x; y)$ называется прямоугольными или декартовыми координатами точки M на плоскости Oxy.*

Каждой точке M координатной плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x; y)$ и, наоборот, каждая такая пара чисел определяет единственную точку M плоскости, расположенную на пересечении перпендикуляров к осям в точках x и y соответственно. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy – осью ординат, точка O – началом координат.

Заметим, что обычно горизонтальную ось называют осью абсцисс и устанавливают положительное направление направо, а вертикальную ось называют осью ординат и устанавливают положительное направление вверх, как на рис. 17. Оси Ox и Oy делят координатную плоскость на четыре четверти (на четыре квадранта): в I-й $x > 0$, $y > 0$, во II-й $x < 0$, $y > 0$, в III-й $x < 0$, $y < 0$, в IV-й $x > 0$, $y < 0$. Запись $M(1;2)$ будет означать, что точка M имеет абсциссу 1 и ординату 2.

2.4. Положение точки в пространстве

В декартовой системе координат положение точки в пространстве определяется тремя числами. Зададим в пространстве три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy, Oz, имеющие общее начало O (совпадающее с точкой их пересечения). Оси назовем координатными осями: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Координатное пространство обозначим $Oxyz$.

Произвольная точка M пространства $Oxyz$ имеет три координаты: координата x – её проекция на ось Ox (пересечение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно оси Ox, с этой осью), координата y – её проекция на ось Oy и координата z – её проекция на ось Oz (рис. 18). Упорядоченная тройка чисел $(x;y;z)$ называется прямоугольными или декартовыми координатами точки M в пространстве.

Очевидно, между точками в пространстве $Oxyz$ и упорядоченными тройками чисел существует взаимно-однозначное соответствие. Координаты x, y, z называются аналогично осям – абсцисса, ордината и аппликата соответственно. Кроме координатных осей можно рассмотреть также три взаимно перпендикулярные координатные плоскости Oxy, Oyz, Ozx, проходящие через оси, приведенные в обозначении. Мы будем стараться располагать координатные оси как показано на рис. 18. Координатные плоскости делят пространство на 8 октантов: в I-м $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, во II-м $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, в III-м $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$, в IV-м $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, в V-м $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$, в VI-м $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$, в VII-м $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$, в VIII-м $x > 0$, $y < 0$,

$z < 0$. Запись $M(-1; -2; -3)$ будет означать, что точка M имеет абсциссу -1, ординату -2, аппликату -3 и расположена, следовательно, в VII октанте.

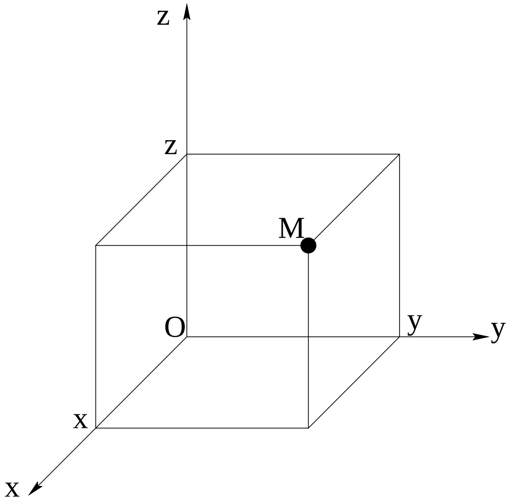


Рис. 18. *Координатное пространство Oxyz*

2.5. Расстояние между двумя точками

Найдем расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве. Построив прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является отрезок M_1M_2, и с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 19), на основании известной теоремы курса стереометрии средней школы получим:

$$M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_1P^2 + M_1Q^2.$$

Спроектировав концы ребер M_1N, M_1P, M_1Q на оси Ox, Oy, Oz, получим на этих осях отрезки $M_1'N'$, $M_1''P'$, $M_1'''Q'$ и в соответствии с формулой (2.2): $M_1N = M_1'N' = |x_2 - x_1|$; $M_1P = M_1''P' = |y_2 - y_1|$; $M_1Q = M_1'''Q' = |z_2 - z_1|$.

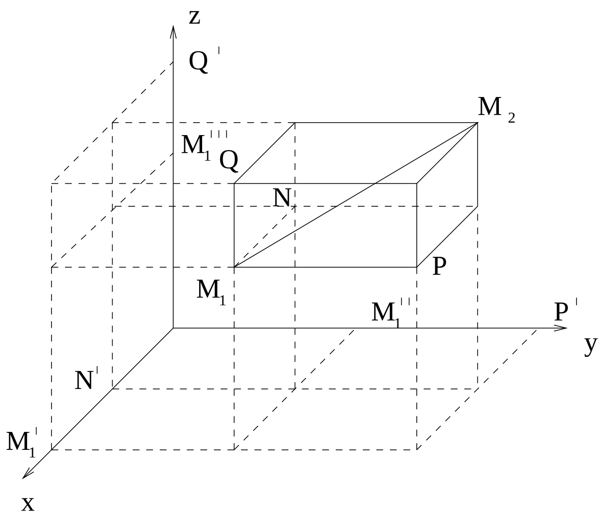


Рис. 19. *Расстояние между двумя точками в пространстве*

Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим:

$$M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2,$$

или:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.5)$$

Данная формула остается, безусловно, справедливой, если отрезок M_1M_2 параллелен каким-либо координатным плоскостям (рассмотрите эти случаи самостоятельно). Если точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ лежат в плоскости Oxy, то формула для расстояния между этими точками принимает вид:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2.6)$$

Пример 2.2. *Найти расстояние d_1 между точками $M_1(-1; -2; -3;)$ и $M_2(0; -2; 5)$, расстояние d_2 между точками $M_3(2; 3)$ и $M_4(-1; 0)$ и расстояние d_3 между началом координат O и точкой $M_5(-2; 1; 3)$.*

Р е ш е н и е: По формуле (2.5):

$$d_1 = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-2-(-2))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{65}.$$

По формуле (2.6):

$$d_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}.$$

По формуле (2.5):

$$d_3 = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}.$$

2.6. Деление отрезка в заданном соотношении

Пусть дан отрезок M_1M_2, расположенный на плоскости Oxy (рис.17). Определить точку M делящую этот отрезок в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, иначе говоря, по заданным координатам точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определить координаты искомой точки $M(x; y)$. Построим прямоугольный треугольник AM_1M_2 с катетами AM_1 и AM_2, параллельными, соответственно, осям Ox и Oy. Координаты точки их пересечения будут $(x_2; y_1)$. Возьмём также точку B с координатами $(x_2; y)$. Треугольники BM_2M и AM_2M, изображенные на рис. 17, будут подобными и, следовательно,

$$\frac{BM}{AM_1} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{MM_2}{M_1M_2} = \frac{MM_2}{M_1M+MM_2} = \frac{1}{\dfrac{M_1M}{MM_2}+1} = \frac{1}{\lambda+1},$$

$$\frac{BM_2}{AM_2} = \frac{y_2-y}{y_2-y_1} = \frac{MM_2}{M_1M_2} = \frac{1}{\lambda+1} \quad \text{и}$$

$$(x-x_2)(1+\lambda) = x_1-x_2 \qquad \text{и} \qquad (y-y_1)(1+\lambda) = y_2-y_1.$$

Выразив из последних соотношений x и y, получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{2.7}$$

В частности, при делении отрезка пополам $\lambda = 1$ и $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Пример 2.3. *Даны точки* $M_1(2;-3)$ *и* $M_2(-1;2)$. *Найти координаты точки* $M(x;y)$, *делящей отрезок* M_1M_2 *в отношении* $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda=5$.

Р е ш е н и е: По формулам (2.7) $x=\dfrac{2+5\cdot(-1)}{6}=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{-3+5\cdot 2}{6}=\dfrac{7}{6}$.

2.7. Параллельный перенос осей координат

В некоторых случаях приходится одновременно рассматривать две системы координат на плоскости и решать следующую задачу: зная координаты точки в одной системе координат, найти её координаты в другой системе. Эти формулы называются формулами преобразования координат.

Мы будем предполагать, что обе системы – декартовы (прямоугольные), причём одноимённые оси этих систем параллельны и одинаково направлены, и на каждой из осей выбрана одна и та же масштабная единица. На рис. 20 изображены две такие системы Oxy и O_1XY. Система O_1XY может быть получена параллельным переносом осей Ox и Oy.

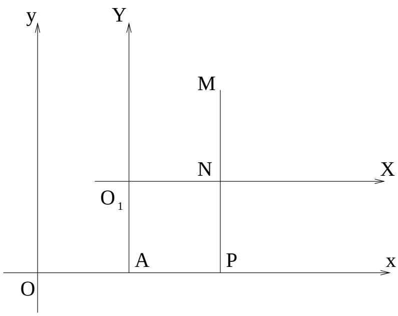


Рис. 20. *Параллельный перенос осей координат*

Условимся называть координаты точек в системе Oxy старыми, а в системе O_1XY – новыми. Пусть x_0, y_0 – координаты нового начала

O_1 в старой системе. Предположим, что произвольно выбранная точка M на плоскости имеет старые координаты x и y и новые координаты X и Y. Выведем формулы, выражающие старые координаты точки M через новые. Проецируя новое начало O_1 и точку M на ось Ox, а также точку M на ось O_1X, получим соответственно точки A, P и N. Очевидно, $O_1N = AP$. Но $O_1N = |X|,\ AP = |x - x_0|$, так что

$$|X| = |x - x_0|,$$

т.е. новая абсцисса X и разность $x - x_0$ равны по модулю. Нетрудно заметить, что и знаки этих величин одинаковы. В самом деле, если N лежит правее O_1, то P расположена правее A, и обе величины X и $(x - x_0)$ положительны. Если же N находится левее O_1, то P – левее A и, следовательно, X и $(x - x_0)$ отрицательны. В обоих случаях $X = x - x_0$, откуда $x = X + x_0$. Аналогично получается формула для старой ординаты y. Таким образом, мы получили следующие формулы преобразования координат (параллельного переноса осей):

$$x = X + x_0,\ y = Y + y_0. \tag{2.8}$$

Пример 2.4. *Дана точка $M(2; -1)$ в системе Oxy. Найти её новые координаты X и Y при параллельном переносе осей, если новое начало в старой системе имеет координаты -1 и 3.*

Р е ш е н и е: По формулам (2.8) получим $2 = X - 1,\ -1 = Y + 3$, откуда $X = 3, Y = -4$.

2.8. Полярные координаты

Наряду с декартовыми координатами на плоскости употребляются полярные координаты, в которых положение точки M на плоскости задаётся (рис. 21) полярным углом φ и полярным радиусом r, называемыми полярными координатами точки M : $M(r; \varphi)$. Пусть на плоскости задана числовая ось l. Назовем её полярной осью, а её начало — точку O – полюсом. Проведем через точку M и полюс ось l_1, начало которой совпадает с O (рис. 21), а положительное направление от O к M. Полярный угол φ – это угол между полярной осью l и осью l_1, отсчитываемый со знаком «+» против часовой стрелки и со знаком «−» по часовой стрелке. Полярный радиус r – это расстояние от O до точки M по оси $l_1 (r \geqslant 0)$. Если значение полярного угла φ ограничить промежутком $-\pi \leqslant \varphi < \pi$, то между точками плоскости и упорядоченными парами полярных координат $(r;\varphi)$ будет существовать взаимно-однозначное соответствие.

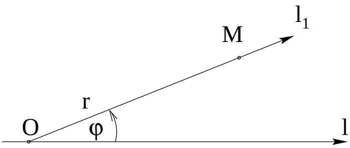


Рис. 21. *Полярные координаты*

Пример 2.5. *Построить в полярной системе координат точки* $M_1(3;\dfrac{\pi}{6});\ M_2(3;\dfrac{\pi}{2});\ M_3(4;\pi);\ M_4(3;0)$.

Р е ш е н и е: Точки $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$, отмечены на рис. 22.

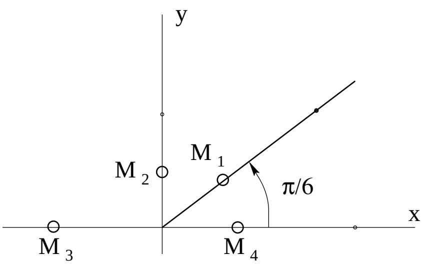


Рис. 22. *Решение примера 2.5*

Выведем формулы, связывающие декартовы и полярные координаты точки на плоскости, для чего расположим полярную ось l, совпадающую с осью Ox, а полюс O – с началом координат O (рис. 23).

Из $\triangle\, OMM'$ находим: $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}, \sin\varphi=\dfrac{y}{r},\ \ r^2=x^2+y^2,$ откуда :

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{2.10}$$

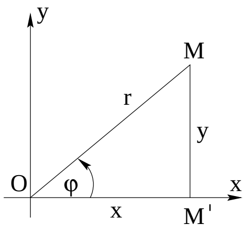


Рис. 23. *Связь декартовых и полярных координат*

Легко понять,что формулы (2.9), (2.10) будут справедливы при любом расположении точки M на плоскости. Формулы (2.9) дают зависимость декартовых координат $(x; y)$ от полярных $(r; \varphi)$, а формулы (2.10) – наоборот. В последней формуле (2.10) из двух значений угла φ, соответствующих найденной величине $\operatorname{tg}\varphi$, выбирается то $(-\pi \leqslant \varphi < \pi)$, при котором удовлетворяются условия (2.9).

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \ \text{ при } \ x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \ \text{ при } \ x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \ \text{ при } \ y > 0, \ x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \ \text{ при } \ y < 0, \ x = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Пример 2.6. *Найти полярные координаты точки M с декартовыми координатами $x = 2,\ y = -2$.*

Решение: По формулам (2.10) находим : $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\varphi = -1$. По формуле (2.11) $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $M\left(2\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.9. Поворот осей координат

Пусть на плоскости заданы две системы координат, имеющие общее начало O: система Oxy (старая) и система OXY (новая), которая получена поворотом старой системы на угол α. Это значит, что угол $(\widehat{Ox; OX}) = \alpha$ (рис. 24) и, следовательно, угол $(\widehat{Oy; OY}) = \alpha$. Найдем формулы, выражающие старые координаты x и y произвольной точки M плоскости через её новые координаты X и Y.

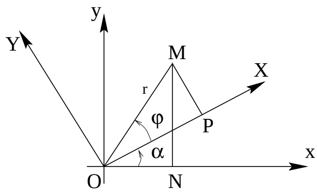


Рис. 24. *Поворот осей координат*

Введем полярные координаты: старые – с полярной осью, совпадающей с осью Ox, и новые – с полярной осью OX. Пусть точка M в новой полярной системе имеет полярный угол φ и полярный радиус r. В старой полярной системе полярный угол точки M равен $\alpha+\varphi$, а полярный радиус такой же, как и в новой системе. Поэтому по формулам (2.9) имеем:

$$x = r\cos(\alpha+\varphi),\ \ y = r\sin(\alpha+\varphi).$$

Используя тригонометрические тождества для косинуса и синуса суммы двух углов, получим:

$$x = r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) = (r\cos\varphi)\cos\alpha - (r\sin\varphi)\sin\alpha;$$

$$y = r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = (r\cos\varphi)\sin\alpha + (r\sin\varphi)\cos\alpha.$$

Но $r\cos\varphi = X$ и $r\sin\varphi = Y$, поэтому

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ \ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \tag{2.12}$$

Формулы (2.12) называются формулами поворота осей. Выразив отсюда X и Y, получим

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ \ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{2.13}$$

Пример 2.7. *Выразить старые координаты точки x и y через её новые координаты X и Y при повороте осей на угол $\alpha = \pi/4$.*

Р е ш е н и е: Так как $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, то по формулам (2.12) получим:

$$x = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y = -X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2},$$

или

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y + X),\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - X).$$

Практическое занятие 2. Системы координат

В этом практическом занятии на основании материала лекций 1 и 2 решите примеры с модулями, а также на преобразование координат.

Пример 2.1. *Запишите с помощью знака модуля неравенство* $-3 < x < 3$.

Решение: Неравенство $-3 < x < 3$ на основании свойства 6 модуля действительного числа (лекция) равносильно неравенству $|x| < 3$.

Ответ: $-3 < x < 3 \Leftrightarrow |x| < 3$.

Пример 2.2. *Решите неравенство* $|x - 1| < 5$.

Решение: Неравенство можно решить с помощью свойства 6 модуля действительного числа (лекция 2), однако здесь целесообразно использовать определение модуля:

$$|x-1| = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x - 1 \geqslant 0, \\ -(x-1), \text{ если } x - 1 < 0. \end{cases}$$

Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$|x-1| < 5 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x-1 < 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0, \\ -(x-1) < 5, \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > -4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Решение последней совокупности представлено на рис. 25. Следует помнить, что решение системы неравенств получается как пересечение множеств решений каждого, а решение совокупности систем (неравенств) получается как объединение множеств решений каждой.

Для решения этого примера можно также воспользоваться решением примера 1.1 лекции 1.

Ответ: $x \in (-4; 6)$.

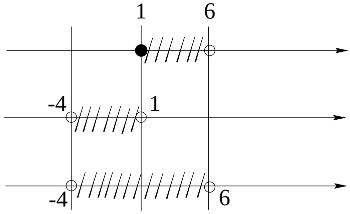


Рис. 25. *Решение примера 2.2*

Самостоятельная работа

Пример 2.3. *Запишите с помощью знака модуля следующие неравенства:*
а) $-4 < x < 4$;
б) $-7 \leqslant x \leqslant 7$;
в) $-4 < x + 1 < 4$;
г) $-5 < x < 3$;
д) $-3 \leqslant x \leqslant 5$;
е) $-8 \leqslant x - 1 \leqslant 4$.

Пример 2.4. *Решите неравенства:*
а) $|x + 3| \geqslant 2$; *б)* $|x| < x + 1$;
в) $|x^2 - 5| > 2$; *г)* $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$;
д) $|x^2 - 12x| > x^2 - 12x$; *е)* $|x + 2| + |x + 4| \leqslant 10$;
ж) $|\frac{x}{x+1}| > \frac{x}{x+1}$.

Пример 2.5. *Решите уравнения:*
а) $|2x + 3| = x^2$,
б) $|\frac{x-1}{x+1}| = \frac{x-1}{x+1}$;
в) $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$;
г) $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$;
д) $|\cos x| = \frac{1}{2}$.

Решите эти примеры, заменяя уравнения совокупностью систем уравнения и неравенства в соответствии с определением модуля. Выполнение неравенства в системе удобнее проверить подстановкой в него корней уравнения. Заметим, что уравнение вида 0=0 справедливо при всех значениях x.

Пример 2.6. *Найдите новые координаты* X, Y *точки* $M(x, y)$ *при параллельном переносе осей с последующим поворотом на угол* α, *если новое начало в старой системе имеет координаты* x_0, y_0.

а) $x = 0,\ y = 0,\ x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

б) $x = 1,\ y = 1,\ x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ \alpha = -\dfrac{\pi}{4}$;

в) $x = 1,\ y = 1,\ x_0 = -1,\ y_0 = -1,\ \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

При решении этого примера последовательно используйте формулы (2.8),(2.13) лекции .

Пример 2.7. *Найдите полярные координаты точки* P *с декартовыми координатами* x, y:

а) $x = 1 \quad y = 1$;

б) $x = -3 \quad y = 3$;

в) $x = -2 \quad y = -2$.

Пример 2.8. *Найдите декартовые координаты точки* M *с полярными координатами* r, φ:

а) $r = 2 \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$; *б)* $r = 3 \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{6}$;

в) $r = 4 \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; *г)* $r = 1 \quad \varphi = \pi$.

ГЛАВА II

Функции одной переменной

Лекция 3. Функция. Основные понятия

Понятие числовой функции. Способы задания. Чётные, нечётные, периодические функции. Обратные функции.

3.1. Понятие числовой функции

Определение 3.1. *Пусть даны два множества действительных чисел X и Y. Числовой функцией $y = f(x)$ называется правило, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$. Переменную x называют независимой переменной или аргументом, переменную y – зависимой переменной или функцией.*

Определение 3.2. *Областью определения функции $D(f)$ называется множество $x \in X$, для каждого элемента которого задано $y = f(x)$. Множество значений $y \in Y$, для каждого из которых существует такое $x \in D(f)$, что $y = f(x)$ называется областью изменения или множеством значений функции $E(f)$.*

Наряду с обозначениями функции $y = f(x)$ используются и другие, в частности $y = y(x)$. Значение функции для фиксированного значения аргумента x_0 будем обозначать $y_0 = f(x_0)$ или $y_0 = y(x_0)$. Сама функция, её аргумент и значение могут быть обозначены и другими буквами, например: $V = F(u)$.

Если переменные x и y рассматривать как декартовы координаты точек на плоскости, то графиком числовой функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x; f(x))$.

Основными способами задания функции являются *аналитический*, *графический* и *табличный*.

При аналитическом способе функция задаётся посредством формул. При этом она может быть задана в декартовых и полярных координатах в явном и неявном виде, в параметрическом виде.

Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции y выражено в явном виде (изолировано в левой части уравнения), то говорят, что функция задана в явном виде:

$$y = f(x). \tag{3.1}$$

Пример 3.1. $y = 2x + 1$.

Данная функция, заданная в явном виде, каждому действительному числу $x \in R$ ставит в соответствие единственное действительное число y, для получения которого необходимо значение x умножить на 2 и к результату прибавить 1.

Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область изменения $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции y не выражено в явном виде (не изолировано в левой части уравнения), то говорят, что функция задана в неявном виде уравнением вида:

$$F(x, y) = 0. \tag{3.2}$$

Так заданную функцию для краткости называют *неявной функцией.*

При этом, согласно определения 3.1, правило, которое задаёт y как функцию аргумента x подразумевает, что при заданном значении x из области определения функции уравнение (3.2) может быть решено относительно y и выделено единственное решение. Заметим, что при этом остается требование, чтобы каждому числу $x \in D(f)$ соответствовало единственное значение $y \in E(f)$. Например, уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ определяет две функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. К этому примеру мы ещё вернёмся.

Пример 3.2. *Неявная функция* $xy = 1$.

Функция задана уравнением в неявном виде. Для каждого действительного значения $x \neq 0$ существует единственное значение y, удовлетворяющее этому уравнению. Область определения этой функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, область изменения $E(f) = (-\infty; 0) \cup \cup (0; +\infty)$.

При графическом способе функция задаётся с помощью графика.

Например, по графику функции, изображённому на рис. 26, можно установить, что значению $x = 0$ соответствует единственное значение $y = 1$, значению $x = 1$ соответствует единственное значение $y = 2$ и т.д.

При параметрическом задании функции в декартовых координатах значение функции y и её аргумента x задаются как функции от третьей переменной величины, так называемого параметра t из множества T:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{3.3}$$

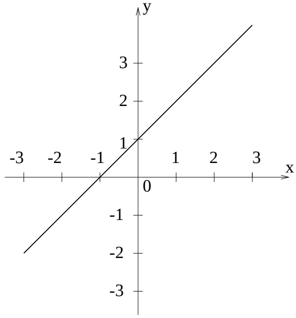


Рис. 26. *Графическое задание функции*

Если эти функции вычислить при одном и том же значении параметра t, мы получим координаты точки на плоскости $M(x;y)$; когда переменная t пробегает все значения из множества T, точка $M(x,y)$ описывает некоторую линию в плоскости Oxy.

Уравнения (3.3) называются параметрическими уравнениями этой линии. Иногда, исключив параметр t из системы (3.3), можно получить явное или неявное уравнение функции.

Пример 3.3. *Функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями*

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если эти уравнения почленно возвести в квадрат и сложить, то в силу тождества $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ получится уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Этому уравнению удовлетворяют координаты точек окружности радиуса R с центром в начале координат, так как в силу формулы (2.6) для точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, расстояние до начала координат $O(0;0)$ постоянно и равно R.

Если из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ выразить y в явном виде, получим две элементарные функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Каждая из этих функций задаётся параметрически одними и теми же уравнениями, но области изменения параметра для этих функций различны: для первой из них $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (графиком служит верхняя полуокружность), для второй $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ графиком является нижняя полуокружность).

Пример 3.4.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \tag{3.5}$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями циклоиды. Можно показать, что линия, описываемая этими уравнениями (циклоида), получается как траектория фиксированной точки M окружности радиуса a, касавшейся в начальный момент оси абсцисс в начале координат, которая катится без скольжения по оси абсцисс (рис. 27). При этом в начальный момент точка M совпадает с началом координат.

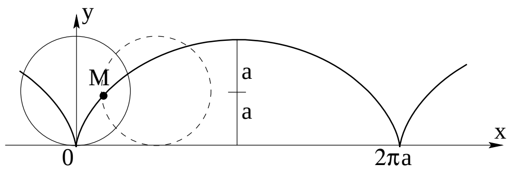


Рис. 27. *Циклоида*

При изменении параметра t от 0 до 2π окружность совершит один полный оборот. Точка M при этом опишет одну арку циклоиды.

При задании функции в явном виде в полярных координатах полярный радиус r выражается через полярный угол φ:

$$r = r(\varphi). \tag{3.6}$$

При этом каждому значению φ из области определения соответствует единственное значение r. Это, однако, не гарантирует, что при переходе к декартовым координатам каждому значению x будет соответствовать единственное значение y.

Пример 3.5. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Кривая, описываемая этим уравнением в полярных координатах, называется кардиоидой (рис. 28).

Составив таблицу для некоторых значений полярного угла φ и соответствующих им значений r, построим получившуюся кривую

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	$2a$	$a\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$	a	$a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	0	$a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	a	$a\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$	$2a$

При табличном способе функция задаётся посредством таблицы. Например, следующая таблица устанавливает закон, который каждому из перечисленных в этой таблице значений аргумента x ставит в соответствие единственное значение y.

x	-2	-1	-0,5	0	1
y	-3	-1	0	1	3

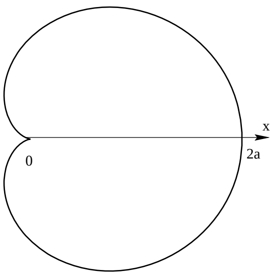


Рис. 28. *Кардиоида*

Пример 3.6. *Найти область определения и область изменения функции* $y = \sqrt{2x-1}$.

Р е ш е н и е: Так как операция извлечения квадратного корня определена только для неотрицательных величин, то данная функция определена только для значений аргумента x, удовлетворяющих неравенству: $2x - 1 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получаем: $D(f) = [0,5; +\infty)$. Поскольку арифметический корень не может быть отрицательным, заключаем, что область изменения $E(f) = [0; +\infty)$.

Ответ: $D(f) = [0,5; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$.

Пример 3.7. *Найти область определения и область изменения функции* $y = \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

Р е ш е н и е: Поскольку областью определения логарифмической функции является бесконечный интервал $(0; +\infty)$, заключаем, что область определения $D(f) = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$. Решим это неравенство, для чего определим корни уравнения:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Следовательно, решением неравенства $x^2 - 3x + 2 > 0$ является $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Областью значений логарифмической функции является множество R, поэтому $E(f) = \{y | y \in R\}$.

Ответ: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Пример 3.8. *Найти область определения функции*
$$y = \frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Р е ш е н и е: Недопустимыми значениями аргумента x являются решения уравнения $(x+1)(x-2) = 0$. Решениями данного уравнения являются $x_1 = -1,\ x_2 = 2$, следовательно
$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3.9. *Найти область определения функции* $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Р е ш е н и е: Допустимые значения аргумента x удовлетворяют неравенству $1 - x^2 > 0$. Решая это неравенство, находим, что $D(f) = (-1; 1)$.

Ответ: $D(f) = (-1; +1)$.

3.2. Операции над функциями

Пусть даны две функции: $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с областью определения $D(f)$ и $D(g)$ соответственно. Тогда можно определить новую функцию $y = f(x) + g(x)$, значения которой при каждом x из области определения вычисляются как сумма значений $f(x)$ и $g(x)$. Область определения функции $y = f(x) + g(x)$ есть $D(f) \cap D(g)$.

Аналогично определяются функции $y = f(x)g(x),\ y = f(x) - g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём область определения функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть множество $D(f) \cap D(g) \cap \{x | g(x) \neq 0\}$.

Пример 3.10. *Найти область определения функции* $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x-1}$.

Р е ш е н и е: Представим нашу функцию в виде $y = f(x) + g(x)$, где $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Найдем область определения каждой функции.

$D(f) : x - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow D(f) = [1; +\infty)$,

$D(g) : x - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Область определения исходной функции есть пересечение этих множеств.

Ответ: $(1; +\infty)$.

3.3. Сложная функция

Пусть $u = f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и областью изменения $E(f)$, а $y = g(u)$ – числовая функция с областью определения $D(g)$, $E(f) \subset D(g)$ и областью изменения $E(g)$.

Тогда каждому $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(g)$: каждому $x \in D(f)$ функция $u = f(x)$ ставит в соответствие единственное значение $u \in E(f)$, которому функция $y = g(u)$ ставит в соответствие единственное значение $y \in E(g)$. Полученная функция называется сложной функцией (или суперпозицией двух функций) и обозначается $y = g(f(x))$. Функция $u = f(x)$ называется внутренней функцией, функция $y = g(u)$ – внешней.

Например, если $u = x^2 - 3x + 2$, и $y = \log_2 u$, то можно определить сложную функцию $y = \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

Пример 3.11. *Записать сложную функцию, являющуюся суперпозицией двух функций :* $u = 1 - x^2$ *и* $y = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$.

Р е ш е н и е: В данном примере $f(x) = 1 - x^2 \;\Rightarrow\; D(f) = R$, $E(f) = (-\infty; 1]$, $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}} \Rightarrow D(g) = (0; +\infty)$, $E(g) = (0; +\infty)$. Как видим, $E(f) \not\subset D(g)$. Однако, если определить внутреннюю функцию на множестве $\{x | 1 - x^2 > 0\} = (-1; 1)$, это требование будет выполнено.

Ответ: $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $x \in (-1; 1)$.

3.4. Чётные и нечётные функции

Определение 3.3. *Множество $X \subset R$ называется симметричным относительно начала координат, если $-x \in X$ для любого $x \in X$. На числовой оси симметричное множество X расположено симметрично относительно точки O.*

Определение 3.4. *Числовая функция $y = f(x)$ называется чётной, если область её определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$.*

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ для чётной функции симметричны относительно оси Oy, поскольку $f(-x) = f(x)$. Например, функция $y = x^2 + 1$ является чётной, поскольку $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат и $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

График функции $y = x^2 + 1$ симметричен относительно оси Oy (рис. 29).

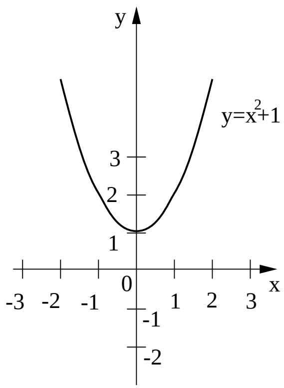


Рис. 29. *График функции $y = x^2 + 1$*

Сумма, разность, произведение и частное двух чётных функций есть чётная функция.

Попробуйте доказать это самостоятельно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. *Числовая функция $y = f(x)$ называется нечётной, если область её определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$.*

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (точки O), так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ для нечётной функции симметричны относительно точки O, поскольку $f(-x) = -f(x)$. Например, функция $y = x^3$ является нечётной, поскольку её область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат и $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

График функции $y = x^3$ симметричен относительно точки O (см. рис. 30).

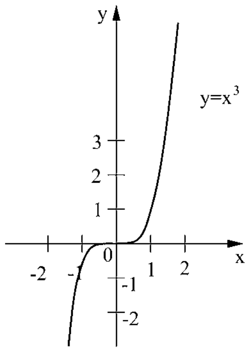


Рис. 30. *График функции $y = x^3$*

Нечётные функции имеют следующие свойства:

- сумма и разность нечётных функций есть нечётная функция;
- произведение и частное нечётных функций есть чётная функция.

Доказательство этих утверждений проводится аналогично тому, как это было сделано для чётных функций: сначала устанавливается симметричность области определения, затем проверяется справедливость требуемого равенства. Докажите их самостоятельно.

Наряду с чётными и нечётными существуют функции, не являющиеся ни теми, ни другими, т.е. не обладающие свойством чётности-нечётности. Например, функции $y = x^3 + 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2^x$, $y = \lg x$ не являются ни четными, ни нечётными.

Заметим, что любую функцию $y = \varphi(x)$ с областью определения $D(f)$, симметричной относительно начала координат, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функции: $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, где $f(x) = \dfrac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$ есть функция чётная (докажите), а $g(x) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$ есть функция нечётная. Например, функция $y = x^3+1$ представима в виде суммы чётной функции $f(x) = 1$ и нечётной функции $g(x) = x^3$.

Пример 3.12. *Функция $y = \sqrt{x}$ не является ни чётной, ни нечётной, так как её область определения $D(f) = [0; +\infty)$ не является симметричной относительно O.*

Пример 3.13. *Является ли функция $y = \dfrac{x^2+x}{x}$ чётной или нечётной?*

Решение: Область определения этой функции $D(f) = (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ симметрична относительно O. Проверим выполнение одного из равенств:

$f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$,

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-x}{-x} = \dfrac{x-x^2}{x} \neq f(x)$,

$-f(x) = -\dfrac{x^2+x}{x} \neq f(-x)$.

Ответ: $y = \dfrac{x^2+x}{x}$ не является ни чётной ни нечётной функцией.

Пример 3.14. *Является ли функция $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ чётной или нечётной?*

Решение: Область определения этой функции

$D(f) = (-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; +\infty)$ симметрична относительно O.

Проверим выполнение одного из равенств:

$f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2-1} = \dfrac{1}{x^2-1} = f(x)$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ является чётной функцией.

3.5. Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если $x - T$ и $x + T$ принадлежат области определения, $f(x) = f(x \pm T)$ для любого $x \in D(f)$. Обычно под основным периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов, если такой период существует. В этом случае все периоды T кратны основному периоду $T_0 : T = n \cdot T_0$, где $n \in Z,\ n \neq 0$. Из определения следует, что $T_0 > 0$.

Пример 3.15. *Функция $y = \sin x$ имеет период $T_0 = 2\pi$, так как $x + 2\pi \in D(f)$, $x - 2\pi \in D(f)$ и $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.*

Пример 3.16. *Функция $y = \{x\}$ имеет период $T_0 = 1$, так как $x + 1 \in D(f)$, $x - 1 \in D(f)$ и $\{x + 1\} = \{x\}$.*

Сумма, разность, произведение и частное периодических функций с периодом T является периодической функцией с периодом T.

Например, $y = \{x\} + 1$ является периодической функцией с периодом $T = 1$, так как $y = \{x\}$ и $y = 1$ периодические функции с тем же периодом. Если $u = f(x)$ есть периодическая функция с периодом T, то сложная функция $y = g(f(x))$ тоже периодическая (возможно с другим периодом), если выполняется первое требование в определении периодической функции.

Например, $y = \sin^2 x$ является периодической функцией с периодом $T_0 = \pi$.

В пункте 4.12 лекции 4 будет показана справедливость следующего утверждения:

Теорема 3.1. *Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = Kf(kx + b) + a$ будет также периодической с периодом $T_1 = T/|k|$, $k \in R$.*

Пример 3.17. *Найти период функции $y = 2\sin(3x + 2)$.*

Решение: $y = \sin x$ имеет период $T = 2\pi$, $k = 3$. Поэтому период T_1 функции $y = 2\sin(3x + 2)$ будет равен $T_1 = \dfrac{2 \cdot \pi}{3}$.

Ответ: $T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

Пример 3.18. *Является ли функция $y = \sqrt{x}$ периодической?*

Р е ш е н и е: Эта функция не является периодической, так как, например, для $x = 0$ и $T > 0$ $x - T$ не принадлежит области определения. При $T < 0$ $x + T$ при $x = 0$ не принадлежит области определения. Таким образом, не выполняется первое требование определения периодической функции.

Пример 3.19. *Является ли функция $y = x$ периодической?*

Р е ш е н и е: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, поэтому $x + T \in D(f)$ и $x - T \in D(f)$, если $x \in D(f)$. Найдем период T_0 из условия: $f(x + T_0) = f(x)$, т.е. $x + T_0 = x$. Отсюда $T_0 = 0$.

Ответ: $y = x$ не является периодической функцией.

3.6. Ограниченные функции

Определение 3.6. *Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что для всех $x \in D(f)$ выполняется неравенство: $f(x) \leqslant M$. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех $x \in D(f)$ выполняется неравенство: $f(x) \geqslant m$. Функция, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.*

Например, $y = x^2$ ограничена снизу, например, числом $m = -2$ и неограничена сверху. Функция $y = -x^4$ ограничена сверху, например, числом $M = 1$ и неограничена снизу. Функция $y = \sin x$ ограничена: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Функции $y = x$, $y = \lg(x)$, $y = \operatorname{tg}(x)$, $y = \dfrac{1}{x}$ неограничены.

3.7. Возрастание и убывание функций

Определение 3.7. *Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ (т.е. «чем больше x, тем больше y»). Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ (т.е. «чем больше x, тем меньше y»). Функция $y = f(x)$ называется неубывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Функция $y = f(x)$ называется невозрастающей на* *множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Функции, только возрастающие или только убывающие, называются монотонными, а соответствующие множества X — областями монотонности.*

Например, функция $y = x^2$ на $(-\infty; 0]$ убывает, а на $[0; +\infty)$ возрастает.

Пример 3.20. *Доказать возрастание функции $y = \sqrt{x}$.*

Р е ш е н и е: $D(f) = [0; +\infty)$. Возьмём $x_1 > x_2 > 0$ два значения аргумента из области определения. Необходимо доказать, что $f(x_1) > f(x_2)$. Рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$. Умножим и разделим на сумму корней:

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

Т.к. $x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} > 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Утверждение доказано.

Пример 3.21. *Функция, изображённая на рис. 31, возрастает на интервалах $(a; x_1)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; b)$ и убывает на интервалах $(x_1; x_2)$, $(x_3; x_4)$.*

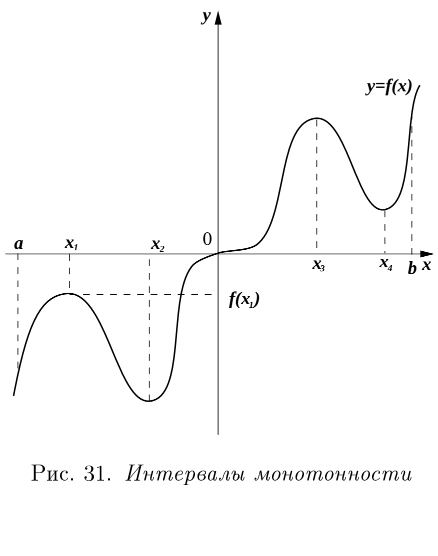


Рис. 31. *Интервалы монотонности*

3.8. Обратные функции

Пусть $y = f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и областью изменения $E(f)$. Согласно определению функции, каждому значению $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(f)$. Однако разным значениям $x_1 \in D(f)$ и $x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, может соответствовать одно значение $y \in E(f)$. Например, функция $y = x^2$ ставит в соответствие двум разным значениям аргумента $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ одно значение $y = 1$.

Определение 3.8. *Функция $y = f(x)$ называется обратимой, если разным значениям аргумента $x_1 \neq x_2$ соответствуют разные значения функции $y_1 \neq y_2$.*

Если функция $y = f(x)$ обратима, то можно каждому значению $y \in E(f)$ поставить в соответствие единственное число $x \in D(f)$. Такое обратное соответствие называют функцией, обратной к $y = f(x)$, и обозначают $x = f^{-1}(y)$. Аргумент обратной функции обычно обозначают через x, а значения функции через y. Тогда обратная функция запишется в виде: $y = f^{-1}(x)$.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к f, то f^{-1} является обратимой, и f является обратной по отношению к f^{-1}. Функции f и f^{-1} называют взаимно обратными. Для взаимно обратных функций имеют место следующие равенства:

$D(f^{-1}) = E(f); f^{-1}(f(x)) = x$ для $x \in D(f)$;

$E(f^{-1}) = D(f); f(f^{-1}(x)) = x$ для $x \in D(f^{-1})$.

Функция является обратимой тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз. В частности, периодические и чётные функции не являются обратимыми.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 32), что является следствием замены x на y и y на x.

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 3.2. *Если $y = f(x)$ возрастающая (убывающая) непрерывная функция, то она имеет обратную, которая тоже является возрастающей (убывающей).*

Функция, обратная нечётной, также нечётная.

Пример 3.22. *Найти обратную функцию к функции $y = 2x - 1$. Построить графики обеих функций.*

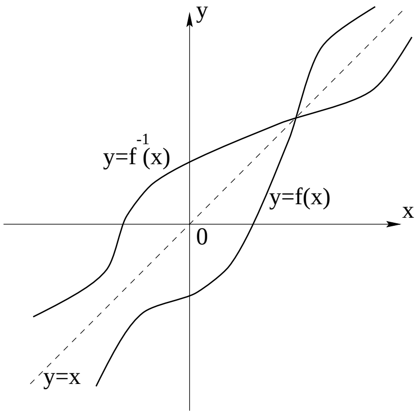


Рис. 32. *График прямой и обратной функций*

Р е ш е н и е: Выразим значение x через y : $y = 2x - 1 \iff x = \dfrac{y+1}{2}$. Заменим x на y, а y на x. Уравнение обратной функции примет вид: $y = \dfrac{x+1}{2}$. Графики этих функций изображены на рис. 33.

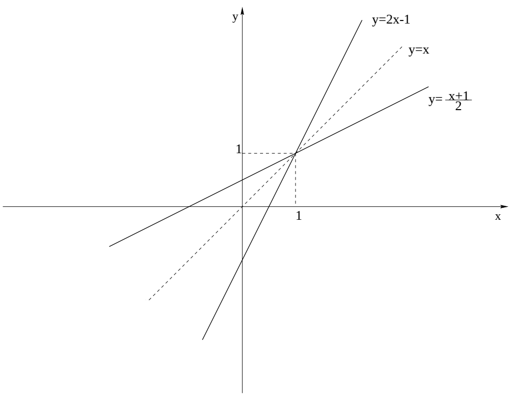


Рис. 33. *График функции $y = 2x - 1$ и обратной к ней*

Функция $y = x^2$, как отмечалось, необратима, однако если её рассматривать только при $x \in [0; +\infty)$, то она будет монотонной и, следовательно, обратимой. График обратной функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке 34.

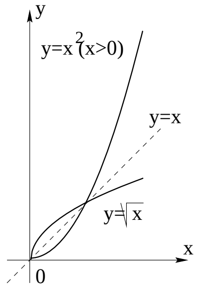


Рис. 34. *Графики функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$*

Лекция 4. Основные элементарные функции

Элементарные функции. Свойства основных элементарных функций. Элементарные преобразования графиков

4.1. Основные понятия

Определение 4.1. *Основными элементарными функциями являются: постоянная функция ($y = C$), степенная ($y = x^n, n \in R$), показательная ($y = a^x$), логарифмическая ($y = \log_a x$), тригонометрические ($y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$) и обратные к ним ($y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$).*

Определение 4.2. *Элементарными функциями называются те функции, которые можно задать в явном виде одним аналитическим выражением из основных элементарных функций с помощью арифметических операций и нахождения функции от функций, применённых конечное число раз.*

Примерами элементарных функций являются многочлены, дробно-рациональная функция (отношение двух многочленов), иррациональные (корень из элементарной функции) и т.д.

Не являются элементарными, например, функции:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ при } x > 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ -1, \text{ при } x < 0, \end{cases}$$
$$y = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in Q, \\ -1, \text{ при } x \in I, \end{cases}$$
$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, \text{при } x < 0, \\ 3, \text{ при } 0 \leqslant x < 5, \\ \sqrt{x}, \text{ при } x \geqslant 5. \end{cases}$$

и т.д.

Рассмотрим свойства некоторых элементарных функций.

4.2. Линейная функция. Прямая на плоскости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Линейной функцией называется функция вида:*

$$y = kx + b. \tag{4.1}$$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$; *при* $k \neq 0$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$, *функция неограниченная, непериодическая. При* $b = 0$ *функция нечётная; при* $k > 0$ *функция возрастает, при* $k < 0$ *– убывает, при* $k = 0$ *– постоянна. (Докажите все эти свойства самостоятельно.)*

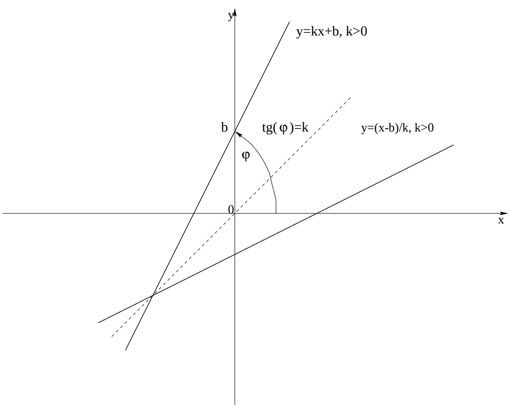


Рис. 35. *Линейная функция* $y = kx + b$ *при* $k > 0$

Точки пересечения с осями координат $(0; b)$ и $\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$; графиком функции $y = kx + b$ является прямая с угловым коэффициентом (тангенс угла с осью Ox) $k = \operatorname{tg}\varphi$ (рис. 35, 36) при $k \neq 0$. Обратная функция $y = \dfrac{x - b}{k}$ также является линейной.

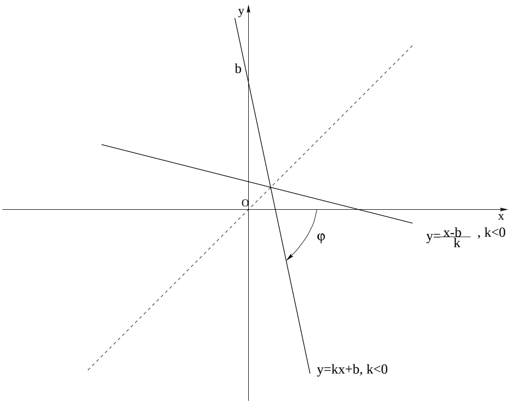


Рис. 36. *Линейная функция $y = kx + b$ при $k < 0$*

Условием параллельности двух невертикальных прямых на плоскости $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ является:

$$k_1 = k_2, \tag{4.2}$$

так как $\varphi_1 = \varphi_2 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 \Longleftrightarrow k_1 = k_2$.

Замечание 4.1. *Условие (4.2) означает, что две прямые или не пересекаются при $b_1 \neq b_2$ или совпадают при $b_1 = b_2$.*

Угол между двумя прямыми на плоскости определяется с помощью известной тригонометрической формулы:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{4.3}$$

Используя формулу (4.3), получим условие перпендикулярности двух невертикальных прямых. В этом случае $\varphi_2 - \varphi_1 = 90^\circ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = +\infty \Longrightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Окончательно получаем условие перпендикулярности двух прямых на плоскости:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{4.4}$$

Как известно, две точки определяют прямую на плоскости. Покажем, что уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.5}$$

Действительно, выразив y из уравнения (4.5), получим уравнение вида (4.1) при $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и $b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$; кроме того, координаты данных двух точек удовлетворяют уравнению (4.5), т.е. эта прямая проходит через данные две точки.

Из изложенного следует, что уравнение (4.5) описывает любую прямую на плоскости, кроме вертикальной. Действительно, если две точки лежат на вертикальной прямой, то $x_1 = x_2$ и в уравнении (4.5) $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ не существует (угол $\varphi = 90^\circ \Longrightarrow k = \operatorname{tg}\varphi = +\infty$). Заметим также, что если две точки лежат на горизонтальной прямой, то $y_1 = y_2 \Longrightarrow k = 0$ и уравнение прямой (4.5) приобретает вид $y = b$. Данная точка прямой $(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент k также определяют прямую. Легко показать (сделайте это самостоятельно по аналогии с предыдущим), что её уравнение имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4.6}$$

Определение 4.4. *Пучком прямых, проходящих через данную точку* $(x_0; y_0)$, *называется множество всех прямых на плоскости, проходящих через данную точку.*

Из сказанного следует, что однопараметрическое уравнение всех прямых пучка, кроме вертикальной, имеет вид (4.6). Уравнение конкретной прямой пучка получается из (4.6) при фиксированном k.

Наряду с уравнением (4.1) прямая на плоскости может быть задана так называемым общим уравнением прямой:

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.7}$$

где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно.

Действительно, уравнение (4.1) легко записать в виде (4.7), перенеся все члены в левую часть. Наоборот, если $B \neq 0$ в уравнении

(4.7), то выражая y, получаем уравнение $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ вида (4.1) При $B = 0$, $A \neq 0$ из уравнения (4.7) можно выразить $x = -\dfrac{C}{A}$ и получается уравнение вертикальной прямой. Таким образом, уравнение (4.7) является более общим уравнением прямой, чем (4.1), что объясняет его название.

4.3. Обратная пропорциональная зависимость

Определение 4.5. *Обратной пропорциональной зависимостью называется функция вида:* $y = \dfrac{1}{x}$; $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция неограниченная, непериодическая. Функция нечётная, так как $D(f)$ симметрична относительно точки O и $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. Функция убывает на$(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

Докажем последнее утверждение. Возьмём $x_1 > x_2 > 0$ и рассмотрим $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}$. $x_1 > x_2 > 0 \Longleftrightarrow x_2 - x_1 < 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} < 0 \Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Точек пересечения с осями координат нет. Графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ является гипербола (рис. 37). Функция обратимая, обратная функция $y = \dfrac{1}{x}$.

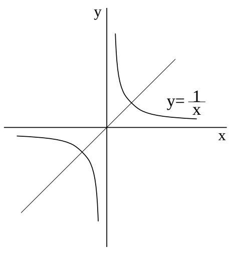


Рис. 37. *График гиперболы* $y = \dfrac{1}{x}$

Неправильно говорить, что $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, так как, например, для $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_1 > x_2, \quad f(x_1) > f(x_2)$. Нельзя так же утверждать, что функция на объединении интервалов возрастает, так как, например, $f(2) < f(1)$.

4.4. Квадратичная зависимость $y = x^2$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = [0; +\infty)$ Функция ограничена снизу: $y \geqslant 0$; непериодическая. Функция чётная, так как $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Функция убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(0; +\infty)$. Докажем возрастание на $(0; +\infty)$. Возьмём $x_1 > x_2 > 0$ и рассмотрим $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2), x_1 > x_2 > 0 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 > 0, x_1 + x_2 > 0 \Longleftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Точка пересечения с осью Oy – начало координат $(0; 0)$.

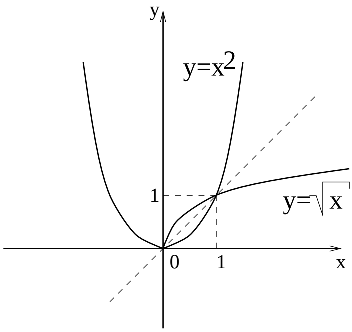


Рис. 38. *График параболы* $y = x^2$

Графиком функции $y = x^2$ является парабола (рис. 38). Функция необратимая, но если рассмотреть одну её ветвь на $[0; +\infty)$ (или на $(-\infty; 0]$), то существует обратная функция $y = \sqrt{x}$ (или $y = -\sqrt{x}$).

4.5. Степенная функция $y = x^n$

Рассмотренные выше функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$ являются частными случаями степенной функции $y = x^n$ при $n = 1, 2, -1$ соответственно. Рассмотрим другие случаи. Возьмём $n = 3$: $\ y = x^3$.

Тогда область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Функция неограниченная, непериодическая. Функция нечётная. Функция монотонно возрастает. Точка пересечения с осями (0;0). Графиком функции $y = x^3$ является кубическая парабола (рис. 39). Функция имеет обратную функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Функции $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$ и т.д. обладают аналогичными свойствами и имеют приблизительно такие же графики. Функции $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$ и т.д. обладают свойствами, аналогичными свойствам функции $y = x^2$, и имеют похожие графики.

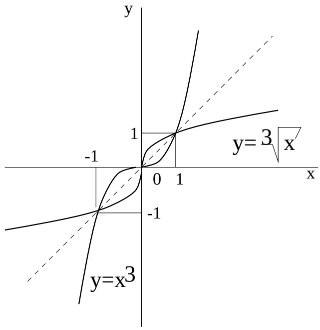


Рис. 39. *График параболы* $y = x^3$

4.6. Показательная функция $y = a^x, a > 0$

Область определения показательной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений функции $E(f) = (0; +\infty)$. Функция ограничена снизу: $y > 0$; непериодическая. Функция ни чётная, ни нечётная. Функция при $a > 1$ возрастает, при $a < 1$ убывает. При $a = 1$ функция $y = a^x$ постоянна и равна 1. Точка пересечения с осью Oy: $(0; 1)$. График функции для разных значений a приведен на рис. 40. Функция обратимая, обратная функция $y = \log_a x$.

4.7. Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Поскольку функция $y = \log_a x$ является обратной к функции $y = a^x$, она обладает следующими свойствами: область определения функции $D(f) = (0; +\infty)$, область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Функция неограниченная, непериодическая. Функция ни чётная, ни нечётная. При $a > 1$ функция возрастает, при $a < 1$ убывает. Точка пересечения с осью Ox: $(1; 0)$. График функции для разных значений a приведен на рис. 40. Функция обратимая, обратная функция $y = a^x$.

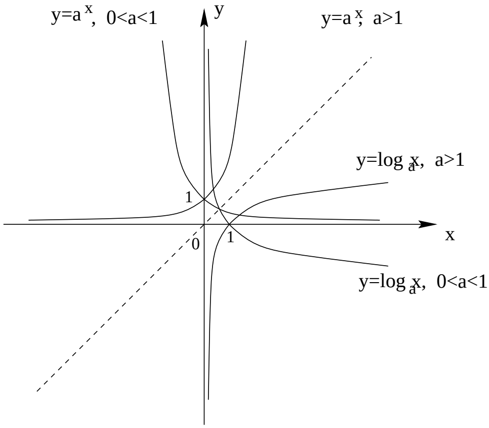


Рис. 40. *График показательной и логарифмической функций*

4.8. Тригонометрические функции

Функция $y = \sin x$.

Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Функция нечётная, так как $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$. Функция не монотонная: возрастает на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; убывает на интервалах $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Точки пересечения с осью $Ox : (\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$, с осью $Oy : (0; 0)$. Графиком функции является синусоида (рис. 41). Функция необратимая, но если рассмотреть её на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то существует обратная функция $y = \arcsin x$.

Функция $y = \cos x$.

Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Функция чётная, так как $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$.

Функция не монотонная: убывает на интервалах $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ и возрастает на интервалах $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Точки пересечения с осью Ox: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$; $n \in \mathbb{Z}$, точка пересечения с осью Oy: (0;1).

График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 42.

Функция необратимая, но если рассмотреть её на $[0; \pi]$, то существует обратная функция $y = \arccos\ x$.

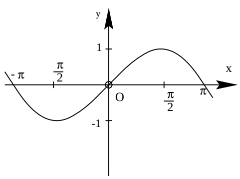


Рис. 41. *График функции* $y = \sin x$

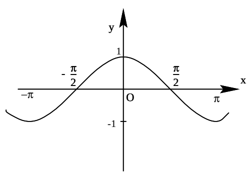


Рис. 42. *График функции* $y = \cos x$

Функция $y = \operatorname{tg}\ x$.

Область определения $D(f) = \{x|\ x \in R, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \text{где } n \in \mathbb{Z}\}$; область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Функция неограниченная.

Функция нечётная, т.к. $D(f)$ симметрична относительно O и $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$.

Функция периодическая с периодом $T = \pi$.

Функция не монотонная; возрастает на интервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Точки пересечения с осью Ox: $(\pi n; 0)$; $n \in \mathbb{Z}$, точка пересечения с осью Oy: (0;0).

График функции $y = \operatorname{tg}\ x$ изображен на рис. 43.

Функция необратимая, но если рассмотреть её на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то существует обратная функция $y = \operatorname{arctg}\ x$.

Функция $y = \operatorname{ctg}\ x$.

Область определения $D(f) = \{x|\ x \in R, x \neq \pi n, \text{где}\ \ n \in \mathbb{Z}\}$; область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Функция неограниченная.

Функция нечётная, т.к. $D(f)$ симметрична относительно начала координат O и $f(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -f(x)$.

Функция периодическая с периодом $T = \pi$.

Функция не монотонная; убывает $x \in (\pi n; \pi + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$.

Точки пересечения с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)\ n \in \mathbb{Z}$.

График функции $y = \operatorname{ctg}\ x$ изображен на рис. 44.

Функция необратимая, но если рассмотреть её на интервале $(0; \pi)$, то существует обратная функция $y = \operatorname{arcctg}\ x$.

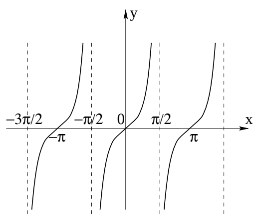


Рис. 43. *График функции* $y = \operatorname{tg}\ x$

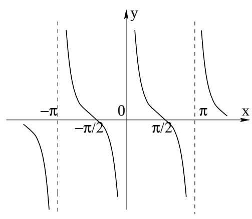


Рис. 44. *График функции* $y = \operatorname{ctg}\ x$

4.9. Обратные тригонометрические функции

Свойства этих функций получаются из свойств тригонометрических функций на основании п. 3.8. Перечислим их кратко.

$y = \arcsin\ x$.

$$D(f) = [-1; 1];\ E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Функция ограничена: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Функция нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin\ x$.

Функция непериодическая.

Функция возрастает на области определения.

Точка пересечения с осями: (0;0).

График функции изображен на рис. 45.

$y = \arccos\ x$.

$$D(f) = [-1; 1];\ E(f) = [0; \pi].$$

Функция ограничена: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Можно показать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Функция убывает на области определения.

Точка пересечения с осью Ox: (1;0); с осью Oy: $(0; \dfrac{\pi}{2})$.

График функции изображен на рис. 46.

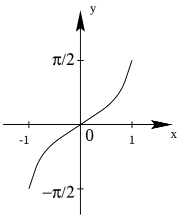


Рис. 45. *График функции* $y = \arcsin x$

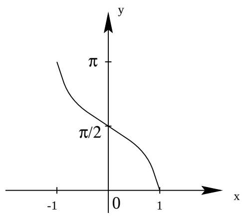


Рис. 46. *График функции* $y = \arccos x$

$y = \operatorname{arctg} x$.

$$D(f) = (-\infty; +\infty)\,;\ E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Функция ограничена: $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$.

Функция нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}\ x$

Функция непериодическая.

Функция возрастает на области определения.

Точка пересечения с осями: (0;0).

График функции изображен на рис. 47.

$y = \operatorname{arcctg}\ x$.

$$D(f) = (-\infty; +\infty)\,;\ E(f) = \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Функция ограничена: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.
Можно показать, что $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
Функция убывает на области определения.
Точка пересечения с осью Oy: $(0; \frac{\pi}{2})$.
График функции изображен на рис. 48.

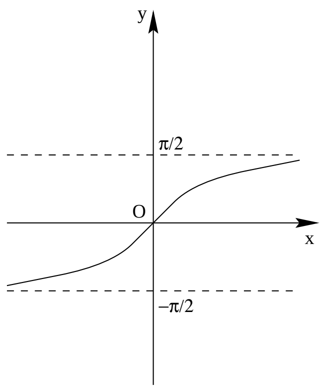


Рис. 47. *График функции* $y = \operatorname{arctg} x$

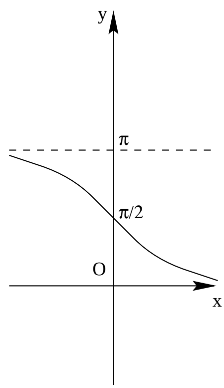


Рис. 48. *График функции* $y = \operatorname{arcctg} x$

4.10. Элементарные преобразования графиков

Графики многих функций можно получить из ранее рассмотренных с помощью элементарных геометрических преобразований: параллельного переноса, сжатия, растяжения, симметричного отображения. Рассмотрим некоторые из этих преобразований. Для каждого из элементарных преобразований предлагается два способа построения графика: с помощью преобразования графика и с помощью преобразования системы координат. Обучающийся должен выбрать тот, который кажется ему проще, и овладеть им. В каждом случае считается известным график функции $y = f(x)$.

4.11. Параллельный перенос графиков

График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: ко всем ординатам графика $y = f(x)$

прибавляется величина b, что означает сдвиг графика вдоль оси Oy. Если $b > 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится вверх параллельно оси Oy на b, если $b < 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится вниз параллельно оси Oy на $|b|$ (рис. 49).

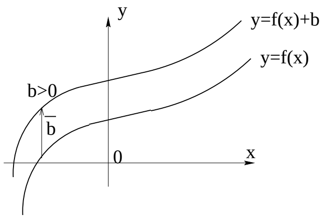


Рис. 49. *Построение графика функции* $y = f(x) + b$

Заметим, что вместо переноса графика, можно перенести в противоположном направлении ось Ox (если $b > 0$ – вниз, если $b < 0$ – вверх), прибавив ко всем значениям по оси Oy величину b.

Пример 4.1. *График функции* $y = x^2 - 1$ *(рис. 50) смещён на 1 вниз параллельно оси* Oy *относительно графика функции* $y = x^2$.

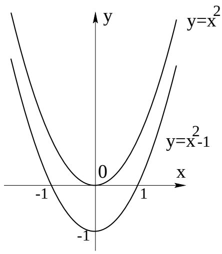


Рис. 50. *Построение графика функции* $y = x^2 - 1$

График функции $y = f(x + a)$ получается с помощью переноса графика функции $y = f(x)$. Действительно, если перейти к новым координатам $X = x + a$, $Y = y$, что эквивалентно параллельному переносу вдоль оси Ox на $-a$, можно заметить, что относительно новых координат получится исходный график функции $Y = f(X)$. Если $a > 0$, то старые координаты получаются из новых сдвигом направо вдоль оси Ox на a, т.к. $x = X - a$. Если же сдвигать график, а не систему координат, то его нужно двигать в противоположном направлении – налево. Итак, если $a > 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится налево параллельно оси Ox на a, если $a < 0$, то график функции $y = f(x)$ переносится направо вдоль оси Ox на $|a|$ (рис. 51).

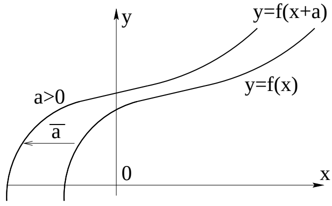


Рис. 51. *Построение графика функции* $y = f(x + a)$

Вместо графика можно перенести в противоположном направлении ось Oy (если $a > 0$ – вправо, если $a < 0$ – влево), отняв от всех значений по оси Ox величину a.

Пример 4.2. *График функции* $y = (x - 2)^2$ *смещён на 2 единицы вправо параллельно оси* Ox *относительно графика функции* $y = x^2$. *(рис. 52).*

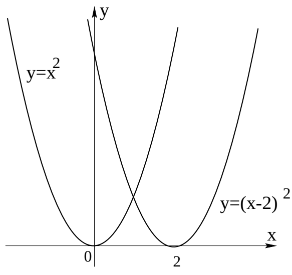


Рис. 52. *Построение графика функции* $y = (x - 2)^2$

4.12. Сжатие и растяжение графиков

График функции $y = kf(x)$, где $k \in R$, получается с помощью «растяжения» графика функции $y = f(x)$ в k раз в направлении от оси Ox. «Растяжение» здесь понимается как умножение на k ординат всех точек графика $y = f(x)$. При $k > 1$ это будет действительно растяжение в k раз от оси Ox вдоль оси Oy. При $0 < k < 1$ это будет сжатие в $\frac{1}{k}$ раз к оси Ox вдоль оси Oy. При $k \leqslant -1$ это будет растяжение в $|k|$ раз с последующим симметричным отображением относительно оси Ox (перевернуть сверху вниз); при $-1 \leqslant k < 0$ это будет сжатие в $\frac{1}{|k|}$ раз и симметрия относительно оси Ox (рис. 53). В частности, график функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением относительно оси Ox графика функции $y = f(x)$.

Вместо преобразования графика при $k > 0$ можно исправить значения по оси Oy, умножив их на k. При $k < 0$ в этом случае пришлось бы менять направление оси, что неудобно; лучше перевернуть график сверху вниз.

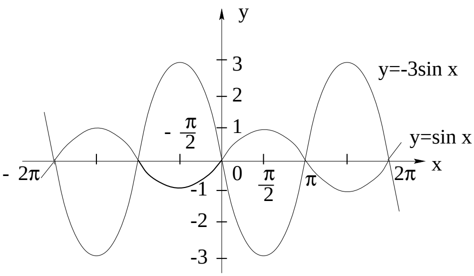


Рис. 53. *Построение графика функции* $y = -3\sin\ x$

График функции $y = f(kx)$, где $k \in R$, получается с помощью «сжатия» графика $y = f(x)$ в k раз в направлении к оси Oy. «Сжатие» здесь понимается как деление на k абсцисс всех точек графика $y = f(x)$. Действительно, если, например, $f(1) = 0$, то, сделав замену $X = kx$, $Y = y$, получим, что функция $y = f(kx)$ обращается в нуль при $kx = 1$, т.е. при $x = \frac{1}{k}$.

При $k > 1$ график функции $y = f(x)$ сжимается в k раз к оси Oy вдоль оси Ox; при $0 < k < 1$ график функции $y = f(x)$ растягивается в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox; при $k \leqslant -1$ исходный график сжимается в $|k|$ раз и симметрично отражается относительно оси Oy (слева направо); при $-1 \leqslant k < 0$ исходный график растягивается в $\dfrac{1}{|k|}$ раз с последующей симметрией относительно оси Oy.

В частности, график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси Oy.

Вместо преобразования графика при $k > 0$ можно исправить значения по оси Ox, поделив их на k. При $k < 0$ в этом случае следует предварительно перевернуть график слева направо.

Пример 4.3. *График функции $y = \cos\ 2x$ получается из графика $y = \cos\ x$ сжатием в 2 раза к оси Oy; график функции $y = \ln(-x)$ получается из графика $y = \ln\ x$ симметрией относительно оси Oy (рис. 54).*

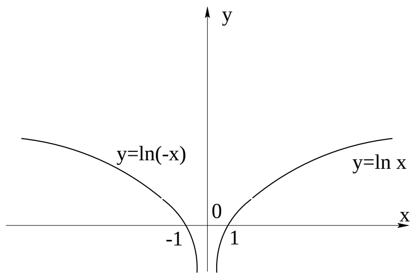


Рис. 54. *Построение графика функции $y = \ln(-x)$*

Пользуясь изложенными методами, приведем последовательность преобразований при построении графика функции $y = f(kx+b)$, если дан график функции $y = f(x)$:

- нарисовать график функции $y = f(x)$;
- получить график функции $y = f(x + b)$, сдвинув исходный, как описано в п. 4.11;
- получить график функции $y = f(kx+b)$, «сжав» предыдущий в k раз к оси Oy, как описано выше.

Пример 4.4. *Написать последовательность преобразований и построить график функции $y = \sqrt{4 - 5x}$.*

Р е ш е н и е:

- нарисуем график функции $y = \sqrt{x}$;

- получим график функции $y = \sqrt{x+4}$, сдвинув исходный на 4 единицы влево вдоль оси Ox;
- получим график функции $y = \sqrt{-5x+4}$, сжав предыдущий в 5 раз к оси Oy и затем отобразив симметрично относительно оси Oy.

Построение графика показано на рис. 55.

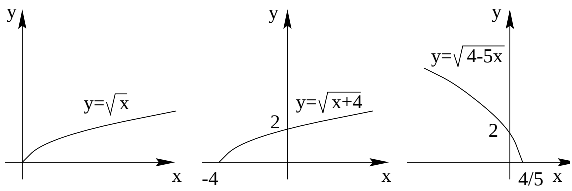


Рис. 55. *Построение графика функции* $y = \sqrt{4-5x}$

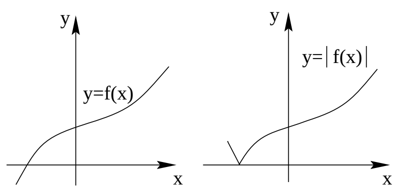


Рис. 56. *Построение графика функции* $y = |f(x)|$

Замечание. Теперь понятно, что если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = K \cdot f(kx+b)+a$ тоже периодическая с периодом $T_1 = \dfrac{T}{|k|}$ (п. 3.5 лекции 3). Действительно, график последней функции получается из исходного сдвигом вдоль оси Ox, что не меняет период, последующим «сжатием» вдоль оси Ox, что «уменьшает» период в $|k|$ раз (период T делится на $|k|$), и окончательным умножением всех ординат на K с последующим прибавлением a, что также не изменяет получившийся период $T_1 = \dfrac{T}{|k|}$.

Практическое занятие 3. Основные свойства функций

На этом занятии мы на практике познакомимся с основными свойствами функций.

Пример 3.1. *Найдите область определения функции:*
$y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

Р е ш е н и е: Область определения данной функции есть пересечение областей определения функций $y = \sqrt{-x}$ т.е.$-x \geqslant 0$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$, т.е.:
$\begin{cases} 2+x \geqslant 0 \\ 2+x \neq 0 \end{cases}$
Таким образом, область определения искомой функции есть решение системы неравенств:
$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ 2+x \geqslant 0 \\ 2+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x > -2 \end{cases}$
Ответ: $(-2; 0]$.

Пример 3.2. *Найдите область определения функции*
$y = \arcsin(x+1)^3$.

Р е ш е н и е: Область определения данной функции есть множество решений системы неравенств:
$\begin{cases} (x+1)^3 \leqslant 1 \\ (x+1)^3 \geqslant -1 \end{cases}$
Решая данную систему, получаем:
$\begin{cases} x+1 \leqslant 1 \\ x+1 \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$
Ответ: $D(f) = [-2; 0]$

Пример 3.3. *Исследуйте функцию на чётность и нечётность:*
$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Р е ш е н и е: Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат. Проверим выполнение второго условия: $f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$, т.е. функция чётная.

Ответ: чётная функция.

Пример 3.4. *Исследуйте функцию $y = x^2 - 5x + 6$ на чётность и нечётность.*

Решение: Область определения этой функции есть $(-\infty; +\infty)$, симметрична относительно 0. Проверим выполнение второго условия:

$f(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6 \neq \pm f(x)$

Следовательно, данная функция свойствами чётности, нечётности не обладает. Заметим, что её можно представить в виде суммы чётной ($y = x^2 + 6$) и нечётной ($y = -5x$) функций.

Ответ: Функция общего вида, свойствами чётности и нечётности не обладает.

Пример 3.5. *Для приведённой функции найдите наименьший положительный период T, если она периодическая: $y = 5\sin 3x$.*

Решение: Период функции $y = \sin x$ равен 2π. В соответствии с теоремой п. 3.5 наименьший положительный период функции $y = 5\sin 3x$ будет равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}$.

Пример 3.6. *Найдите наименьший положительный период функции $y = 3\sin 5x + 4\cos 7x$.*

Решение: В соответствии с теоремой 3.1 функция $y = 3\sin 5x$ будет периодической с периодом $T_1 = \dfrac{2\pi}{5}$, функция $y = 4\cos 7x$ – периодической с периодом $T_2 = \dfrac{2\pi}{7}$. Таким образом, значения первой функции будут повторяться через $\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{5}, \ldots$, второй – через $\dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}, \ldots$. Очевидно, что наименьший общий положительный период этих двух функций равен 2π; это и будет наименьшим положительным периодом их суммы.

Ответ: $T = 2\pi$.

Самостоятельная работа

Найдите область определения функции:

Пример 3.7. $y = \sqrt{1 + x}$.

Пример 3.8. $y = \sqrt[3]{1 + x}$.

Пример 3.9. $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

Пример 3.10. $y = \sqrt[4]{9 - x^2}$.

Пример 3.11. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Пример 3.12. $y = \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x}$.

Пример 3.13. $y = \ln(\dfrac{2 + x}{2 - x})$.

Пример 3.14. $y = \arccos(\dfrac{2x}{1 + x})$.

Пример 3.15. $y = \lg(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1})$.

Пример 3.16. $y = \arcsin(\lg(\dfrac{x}{10}))$

Исследуйте функцию на чётность и нечётность:

Пример 3.17. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Пример 3.18. $y = \sqrt[4]{9 - x^2}$.

Пример 3.19. $y = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$.

Пример 3.20. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$.

Пример 3.21. $y = \lg(\dfrac{1 + x}{1 - x})$.

Пример 3.22. $y = x^2 - x + 1$.

Для приведённой функции найдите наименьший положительный период T, если она периодическая.

Пример 3.23. $y = 2\sin 3x + 7\cos 5x$.

Пример 3.24. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Пример 3.25. $y = \sin^2 x$.

Пример 3.26. $y = \sin\sqrt{x}$.

Практическое занятие 4. Построение графиков функций

Пример 4.1. *Для данной функции определите область, в которой она будет обратимой, и найдите обратную функцию:* $y = 2x + 3$.

Р е ш е н и е: Данная линейная функция монотонно возрастает при $x \in R$, поэтому обратима на r. Для нахождения обратной функции выразим x через y и затем обозначим x через y, а y через x: $y = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2} - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Ответ: Множество, на котором функция обратима: R. Обратная функция $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Пример 4.2. *Пусть* $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; *найдите* $2^{f(x)} - f^2(x)$.

Р е ш е н и е: Подставим в искомую функцию $y = 2^{f(x)} - f^2(x)$ вместо $f(x)$ данное выражение: $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Получим: $y = 2^{\sqrt{1+x^2}} - (\sqrt{1 + x^2})^2$ или $y = 2^{\sqrt{1+x^2}} - 1 - x^2$.

Ответ: $2^{f(x)} - f^2(x) = 2^{\sqrt{1+x^2}} - 1 - x^2$.

Пример 4.3. *Найдите уравнение прямой, удовлетворяющей следующим условиям: прямая проходит через точку* $M(1; 1)$ *под углом* 135° *к оси* Ox.

Р е ш е н и е: В уравнении прямой (4.6) $y - y_0 = k(x - x_0)$ угловой коэффициент равен тангенсу угла прямой с осью $Ox : k = \operatorname{tg}(\varphi)$. Для данной прямой $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Подставив в уравнение прямой (4.6) координаты точки M, получим $y - 1 = -(x - 1)$.

Ответ: $y = -x + 2$.

Пример 4.4. *Вычислите углы и координаты вершин треугольника, стороны которого даны уравнениями:* $l_1 : 18x + 6y - 17 = 0$, $l_2 : 14x - 7y + 15 = 0, l_3 : 5x + 10y - 9 = 0$.

Р е ш е н и е: Введём следующие обозначения: пусть A – точка пересечения прямых l_1 и l_2, B – точка пересечения прямых l_2 и l_3 и C – точка пересечения прямых l_1 и l_3. Найдем угол A $\triangle ABC$ по формуле: $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2. Выразим y из уравнений l_1 и l_2: $l_1 : 18x + 6y - 17 = 0 \Longleftrightarrow y = -3x + \dfrac{17}{6}$;

$l_2 : 14x - 7y + 15 = 0 \Longleftrightarrow y = 2x + \dfrac{15}{7}$; отсюда $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. Получаем: $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{-3-2}{1-6} = +1 \Longrightarrow \angle A = 45^\circ$. Остальные углы $\triangle ABC$ найдите самостоятельно.

Найдем координаты вершины A как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 18x + 6y - 17 = 0, \\ 14x - 7y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + \dfrac{17}{6}, \\ y = 2x + \dfrac{15}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{29}{42}, \\ y = 2\dfrac{44}{105}. \end{cases}$$

Ответ: $A(\dfrac{29}{210}; 2\dfrac{44}{105})$.

Пример 4.5. *Напишите условия, задающие множество точек ΔABC, если $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(3;0)$.*

Решение: Напишем уравнение сторон ΔABC, используя уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$AB: \quad \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1} \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

$$BC: \quad \frac{y-3}{0-3} = \frac{x-2}{3-2} \Leftrightarrow y = -3x + 9.$$

$$AC: \quad \frac{y-1}{0-1} = \frac{x-1}{3-1} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Прямая AB делит плоскость Oxy на две полуплоскости: $y \geqslant 2x - 1$ и $y \leqslant 2x - 1$. ΔABC расположен в той из них, в которой находится вершина C. Поскольку координаты точки $C(3;0)$ удовлетворяют второму из приведённых неравенств, заключаем, что ΔABC лежит в полуплоскости, удовлетворяющей неравенству $y \leqslant 2x - 1$.

Аналогично определяем, что координаты точек ΔABC удовлетворяют неравенствам $y \leqslant -3x + 9$ и $y \geqslant -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$. Окончательно заключаем, что ΔABC определяется пересечением этих полуплоскостей, т.е. системой неравенств:

$$\begin{cases} y \leqslant 2x - 1, \\ y \leqslant -3x + 9, \\ y \geqslant -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Пример 4.6. *Построить график функции $y = |x^2 - 1|$.*

Решение: График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом (рис. 56)

- все части графика функции $y = f(x)$, лежащие ниже оси Ox, следует отобразить вверх симметрично относительно этой оси;
- оставшиеся внизу части исходного графика следует стереть.

Действительно, по определению модуля действительного числа имеем:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \leqslant 0, \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, те участки исходного графика, которые лежат не ниже оси Ox ($f(x) \geqslant 0$), менять не нужно, а для тех участков, которые лежат ниже оси Ox, нужно построить функцию $y = -f(x)$. В соответствии с п. 5.2 это получается симметричным отображением исходного графика относительно оси Ox. Заметим, что полученный график лежит не ниже оси Ox, что естественно, т.к. $|f(x)| \geqslant 0$ для $\forall x \in D(f)$.

Построение графика функции $y = |x^2 - 1|$ показано на рис. 57.

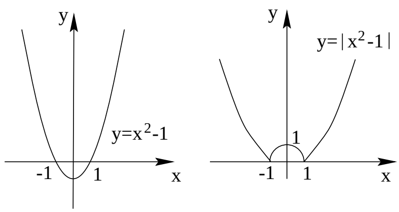


Рис. 57. *Построение графика функции $y = |x^2 - 1|$*

Пример 4.7. *Построить график функции $(|x| - 2)^2$.*

Р е ш е н и е: График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом (рис. 58):

- все части графика функции $y = f(x)$, лежащие слева от оси Oy, следует стереть;
- оставшуюся часть графика следует отобразить налево симметрично относительно оси Oy.

Действительно, по определению модуля действительного числа имеем:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, не нужно изменять те участки исходного графика, для которых $x \geqslant 0$, а для $x < 0$ (слева от оси Oy) следует построить график функции $y = f(-x)$. В соответствии с п. 5.2 это получается симметричным отображением исходного графика относительно оси Oy. Заметим, что полученный график симметричен относительно оси Oy, что естественно, т.к. функция $y = f(|x|)$ чётная (докажите самостоятельно).

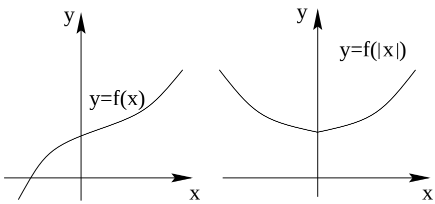


Рис. 58. *Построение графика функции* $y = f(|x|)$

Построение графика функции $y = (|x| - 2)^2$ показано на рис. 59.

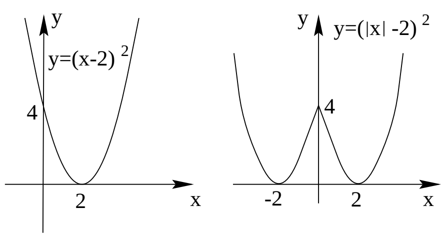


Рис. 59. *Построение графика функции* $y = (|x| - 2)^2$

Элементарными методами можно строить эскизы графиков более сложных функций.

Пример 4.8. *Построить эскиз графика* $y = \sqrt{\sin x}$

Решение: Построение графика показано на рис. 60. Заметим, что график отсутствует там, где $\sin x < 0$, так как $D(x) = \{x | \sin x \geqslant 0\}$.

Кроме того, так как $\sqrt{u} > u$ при $0 < u < 1$, то график $y = \sqrt{\sin x}$ (сплошная линия) будет лежать не ниже графика $y = \sin x$ (пунктирная линия), если их нарисовать в одних осях.

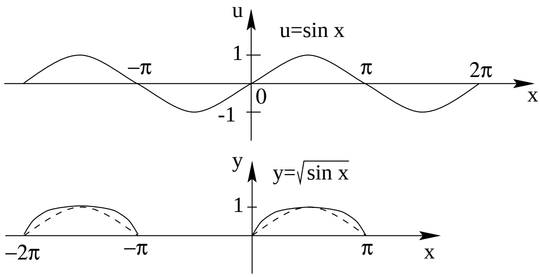


Рис. 60. *Построение графика функции* $y = \sqrt{\sin x}$

Пример 4.9. *С помощью элементарных преобразований постройте график функции:* $y = x^2 - x - 2$.

Решение: Выделим полный квадрат из правой части уравнения функции: $y = x^2 - x - 2 \Longleftrightarrow y = x^2 - x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{4} \Longleftrightarrow y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$.
График этой функции получается следующей последовательностью элементарных преобразований (рис. 61):

1) $y = x^2$.

2) $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$. Сдвиг вправо вдоль Ox на $\dfrac{1}{2}$.

3) $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$. Сдвиг вниз вдоль Oy на $\dfrac{9}{4}$.

Пример 4.10. *Используя сложение, деление функций, постройте график функции:* $y = x + \dfrac{1}{x}$.

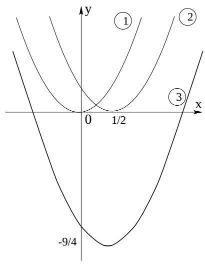


Рис. 61. *Построение графика функции* $y = x^2 - x - 2$

Р е ш е н и е: В одних осях координат нарисуем графики следующих функций (рис. 62):

1)$y = x$,

2)$y = \dfrac{1}{x}$,

3)$y = x + \dfrac{1}{x}$.

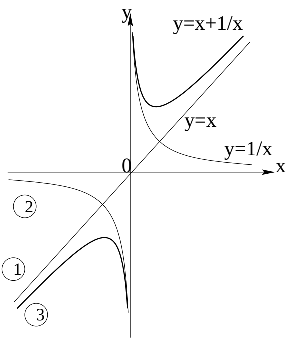


Рис. 62. *Построение графика функции* $y = x + \dfrac{1}{x}$

Пример 4.11. *Постройте график функции в полярной системе координат:* $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ *(прямая линия).*

Р е ш е н и е: Вычислим значения r для некоторых значений $\varphi \in (0; \pi)$ – см. таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+\infty$

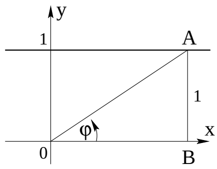


Рис. 63. *График функции* $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$

Соединив плавной линией найденные точки, получим прямую, параллельную оси Ox, проходящую через точку (0;1), (рис. 63). Действительно: из $\triangle OAB \Rightarrow\ \sin\varphi = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{1}{r} \Rightarrow r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

Самостоятельная работа

Для данной функции определите область, в которой она будет обратимой и найдите обратную функцию.

Пример 4.12. $y = x^2 - 1$.

Пример 4.13. $y = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Пример 4.14. $y = \operatorname{arctg}(3x)$.

Пусть $\varphi(U) = \arcsin U, U = f(x) = \lg(x)$; найдите:

Пример 4.15. $\varphi(f(x))$.

Пример 4.16. $\varphi(f(0,1))$.

Пример 4.17. $f(\varphi(x))$;

Пусть $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; найдите:

Пример 4.18. $f(-x)$.

Пример 4.19. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Пример 4.20. $\dfrac{1}{f(x)}$.

Найдите уравнения прямых, удовлетворяющих следующим условиям:

Пример 4.21. *Прямая проходит через точку $M(1;2)$ параллельно прямой $y = 3x + 7$.*

Пример 4.22. *Прямая проходит через точку $M(-2;3)$ перпендикулярно прямой $y = 2x - 8$.*

Пример 4.23. *Прямая проходит через начало координат и образует угол 45° с прямой $y = 2x + 5$.*

Пример 4.24. *Функция $f(x)$ – линейная. Найдите эту функцию если:*
$f(-1) = 2$ и $f(2) = 3$.

Постройте графики функций:

Пример 4.25. $y = (x-1)^3 + 2$.

Пример 4.26. $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.

Пример 4.27. $y = \sqrt{-x}$.

Пример 4.28. $y = \ln(1-x)$.

Пример 4.29. $y = 5\sin(2x - \dfrac{\pi}{3})$.

Используя сложение и деление функций, постройте графики:

Пример 4.30. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. *Локон Аньези.*

Пример 4.31. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$. *Трезубец Ньютона.*

Постройте графики сложных функций:

Пример 4.32. $y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Пример 4.33. $y = \lg(\cos x)$.

Постройте графики функций в полярной системе координат:

Пример 4.34. $r = \varphi$. *Спираль Архимеда*[1].

Пример 4.35. $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$. *Гиперболическая спираль.*

Пример 4.36. $r = 2\cos\varphi$. *Окружность.*

Пример 4.37. $r = 1$. *Окружность.*

Пример 4.38. $r = 3 \cdot \cos 4\varphi$.

Постройте графики функций:

Пример 4.39. $y = |\lg|x||$.

Пример 4.40. $y = 2^{|x|}$.

Пример 4.41. $y = x \cdot |x|$.

Лекция 5. Кривые второго порядка

Уравнение линии. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение к каноническому виду.

5.1. Уравнение линии в декартовых и полярных координатах

В лекции 3 было введено понятие неявной функции, задаваемой уравнением вида $F(x, y) = 0$.

Определение 5.1. *Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению*

$$F(x; y) = 0, \tag{5.1}$$

называется линией (плоской кривой).

Не всякое уравнение определяет линию. Например, уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не определяет никакой линии. Кроме того, линия может состоять из отдельных точек. Так, например, уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяет только начало координат.

Линия не обязательно является графиком функции. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиуса 1 (т.к. $d = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, расстояние от начала координат равно 1). Однако это не будет графиком функции y от x,

[1]Архимед(III в до н. э.) – великий греческий математик и механик.

т.к. каждому x, $|x| \leqslant 1$, соответствует два значения y: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, т.е. линия задаётся двумя функциями $y = \sqrt{1-x^2}$ (верхняя полуокружность) и $y = -\sqrt{1-x^2}$ (нижняя полуокружность).

Уравнение произвольной окружности с центром в точке $M(a;b)$ и радиуса R будет иметь вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \tag{5.2}$$

т.к. окружность радиуса R есть геометрическое место точек плоскости, находящихся на расстоянии $R > 0$ от центра, т.е. в соответствии с формулой (5.2) $d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

В частности, окружность радиуса R с центром в начале координат описывается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример 5.1. *Какую линию описывает уравнение $x^2 + y^2 = Rx$?*

Р е ш е н и е: Перенося слагаемое Rx из правой в левую часть и выделяя полный квадрат, получаем:

$$x^2+y^2 = Rx \iff x^2-Rx+y^2 = 0 \iff x^2-Rx+\frac{R^2}{4}+y^2 = \frac{R^2}{4} \iff$$
$$\iff (x-\frac{R}{2})+y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Ответ: данное уравнение описывает окружность с центром в точке $M(\frac{R}{2};0)$ и радиуса $\frac{R}{2}$.

Линия может определяться на плоскости уравнением как в декартовых, так и в полярных координатах: $F(\varphi;r) = 0$. Если при этом зависимость r от φ обладает тем свойством, что каждому значению φ из области определения соответствует единственное значение r, то данная линия будет графиком функции r от $\varphi : r = f(\varphi)$.

Пример 5.2. *Построить график функции, заданной в полярных координатах уравнением $r = 2\sin 3\varphi$, $\varphi \in (-\infty;+\infty)$.*

Р е ш е н и е: Составим таблицу некоторых значений этой функции:

φ	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	1	0	-2

Пользуясь тем, что из графика функции $r = 2\sin\ 3\varphi$, приведённого в декартовых координатах на рис. 64, следует, что неотрицательные

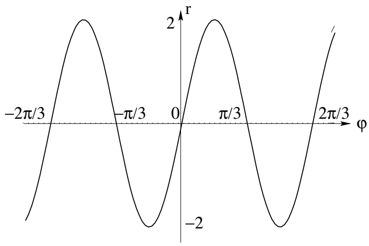


Рис. 64. *График функции* $r = 2\sin\ 3\varphi$ *в декартовых координатах*

значения r повторяются на промежутках $\varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$, $\varphi \in [\frac{2\pi}{3}; \pi], \varphi \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$ и т.д., заключаем, что если в полярных координатах построить график в секторе $\varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$, то в секторах $\varphi \in [\frac{2\pi}{3}; \pi], \varphi \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$ и т.д. вид графика будет аналогичный, а в секторах $\varphi \in (\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{3}; 0)$ и т.д. графика не будет, т.к. там $r < 0$. Соединяя плавной линией точки с координатами, приведёнными в таблице, получаем график приведённый на рис. 65.

Такой график называют называют «трехлепестковая роза».

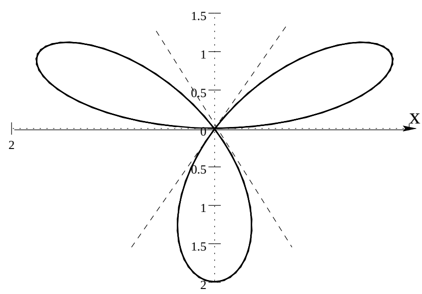


Рис. 65. *График функции* $r = 2\sin\ 3\varphi$ *в полярных координатах*

5.2. Кривые второго порядка

Определение 5.2. *Кривой второго порядка называется линия, определяемая в декартовых координатах уравнением:*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (5.3)$$

Здесь коэффициенты – действительные числа и, по крайней мере, одно из чисел A, B или C не равно нулю. Удобство обозначений для коэффициентов в виде $2B$, $2D$, $2E$ станет ясно из дальнейшего.

Всего существует три «реальных» кривых второго порядка: эллипс (окружность – частный случай эллипса), гипербола и парабола, не считая такие линии, как «пара пересекающихся прямых» (например, $xy = 0$) «пара параллельных прямых» (например, $(x - y)^2 = 4$), «точка» (например, $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 0$), «прямая» (например, $(x-1)^2 = 0$) и «мнимые кривые» (например, $x^2 + y^2 + 5 = 0$), которым не соответствует ни одна точка.

5.3. Окружность

Ранее было получено уравнение (5.2) окружности радиуса R с центром в точке $M(a; b)$. Это уравнение вида (5.3), т.е. окружность есть кривая второго порядка. Можно показать, что уравнение (5.3), в котором $A = C$ и $B = 0$ с помощью дополнения до полного квадрата каждой группы членов Ax^2+2Dx и By^2+2Ey приводится к виду (5.2), определяющему окружность радиуса R или к виду: $(x-a)^2+(y-b)^2 = -R^2$, не определяющему линию при $R \neq 0$. Покажем это на примере.

Пример 5.3. *Показать, что уравнение* $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 13 = 0$ *определяет окружность.*

Решение: Поделив обе части на 2, получим уравнение в виде: $x^2+y^2-2x+4y-6,5 = 0$ или, выделяя полный квадрат: $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4) = 11,5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 11,5$. Мы получим уравнение окружности с центром $M(1; -2)$ и радиусом $R = \sqrt{11,5}$.

Пример 5.4. *Показать, что уравнение* $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 22 = 0$ *не определяет никакой линии.*

Решение: Аналогично предыдущему, выделяя полный квадрат, получаем: $x^2+y^2+6x-6y+22 = 0 \Leftrightarrow (x^2+6x+9)+(y^2-6y+9) = -4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = -4$.

5.4. Эллипс

Определение 5.3. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, равна постоянной величине.*

Чтобы исключить вырожденные случаи, следует предполагать, что эта постоянная величина больше расстояния между фокусами.

Обозначим фокусы F_1 и F_2, расстояние между ними $2c$, а сумму расстояний до них от точек эллипса через $2a$ $(2a > 2c)$. Выберем декартову систему координат как показано на рис. 66. По определению эллипса: $MF_1 + MF_2 = 2a$. Пользуясь формулой (2.6), получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} =$$
$$= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2 =$$
$$\Leftrightarrow = a^2((x-c)^2+y^2) \Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

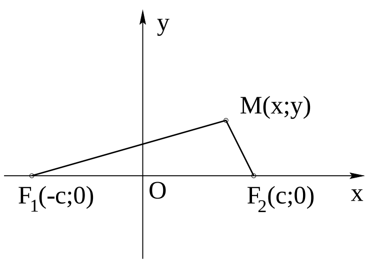


Рис. 66. *Фокусы эллипса и гиперболы*

Обозначив $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, получаем: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) называется каноническим уравнением эллипса, a и b – полуосями, a – большая полуось, b – малая, т.к. $b = \sqrt{a^2-c^2} < a$.

Поскольку x и y входят в уравнение только в чётных степенях, эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy. Выразив y из уравнения (5.4), получаем: $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $|x| \leqslant a$, что означает, что эллипс состоит из двух симметричных половин, верхней $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и нижней $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. При $x = a$, $y = 0$, при убывании x от a до 0, y возрастает от 0 до b. С учётом симметрии получаем линию, изображённую на рис. 67. Точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$. Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса.

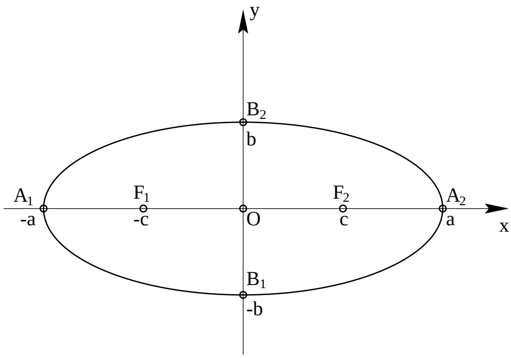


Рис. 67. *Эллипс*

Так как $2a > 2c$, то $\varepsilon < 1$. Эксцентриситет определяет форму эллипса: чем меньше ε, тем меньше его малая полуось b отличается от большой полуоси a $\left(\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \dfrac{c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2\right)$, т.е. тем меньше эллипс вытянут вдоль фокальной оси Ох. В пределе, при $\varepsilon \to 0, a = b$ и получается окружность $x^2 + y^2 = a^2$ радиуса a При этом $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$, т.е. $F_1 = F_2 = 0$. Если эллипс расположен так, что центр его симметрии находится в точке $P(x_0; y_0)$, а полуоси параллельны осям координат, то, перейдя к новым координатам $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, начало которых совпадает с точкой P, а оси параллельны исходным (см. п. 2.8), получим, что в новых координатах эллипс описывается каноническим уравнением $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$. Уравнение такого эллипса в старых координатах будет:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{5.5}$$

5.5. Гипербола

Определение 5.4. *Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, равен постоянной величине.*

Чтобы исключить вырожденные случаи, следует предполагать, что эта постоянная величина больше нуля.

Обозначим фокусы F_1 и F_2, расстояние между ними $2c$, а модуль разности расстояний до них от точек гиперболы через $2a$ $(2c>2a>0)$. Выберем декартову систему координат, как показано на рис. 66. По определению гиперболы: $MF_1-MF_2=\pm 2a$. Пользуясь формулой (2.6), аналогично тому, как это было сделано для эллипса, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Обозначив $b^2=c^2-a^2>0$ (сравните с выводом формулы (5.4) для эллипса), получаем: $-b^2x^2+a^2y^2=-b^2a^2$, или:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) называется каноническим уравнением гиперболы, a и b – полуосями, a – действительной полуосью, b – мнимой. Так как x и y входят в уравнение только в чётных степенях, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy. Выразив y из уравнения (5.6), получаем: $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $|x|\geqslant a$, что означает, что гипербола состоит из двух симметричных половин, верхней $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ и нижней $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. При $x=a$ $y=0$, при возрастании x от 0 до

$+\infty$, y для верхней части возрастает от 0 до $+\infty$. С учётом симметрии, получаем линию, изображённую на рис. 68

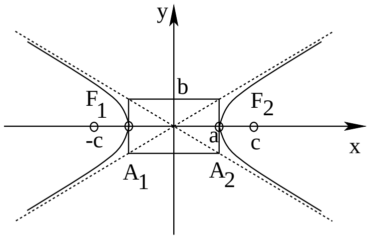


Рис. 68. *Гипербола*

Точки пересечения гиперболы с осью Ox (фокальной осью) называются её вершинами $A_2(a;0)$, $A_1(-a;0)$. С осью ординат гипербола не пересекается, поэтому фокальная ось называется действительной осью (a – действительная полуось), а перпендикулярная ей ось – мнимой осью (b – мнимая полуось). Можно показать, что при неограниченном возрастании абсциссы точка гиперболы неограниченно приближается к прямой $y = \dfrac{b}{a}x$ (изображена на рис. 68 пунктиром). Такая прямая, к которой неограниченно приближается некоторая линия, называется асимптотой. Из соображений симметрии вытекает, что у гиперболы две асимптоты: $y = \dfrac{b}{a}\,x$ и $y = -\dfrac{b}{a}\,x$, изображенные на рис. 68 пунктиром. Прямоугольник с центром в начале координат, со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям, называется основным. Асимптоты являются его диагоналями.

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Т.к. $2a < 2c$, то $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет определяет форму гиперболы: чем меньше ε, тем более вытянут в направлении фокальной оси её основной прямоугольник ($\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a^2} - 1 = \varepsilon^2 - 1$). Если $a = b$, гипербола называется равносторонней (равнобочной). Для неё $x^2 - y^2 = a^2$, асимптоты: $y = x$, $y = -x$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$. Если центр гиперболы (центр её симметрии) находится в точке $P(x_0; y_0)$, а оси параллельны осям координат, то, применяя параллельный перенос координат (п. 2.8), аналогично тому, как это было сделано для эллипса, получим уравнение гиперболы:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{5.7}$$

Уравнение асимптот такой гиперболы будет: $y - y_0 = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_0)$.

Заметим, что уравнение равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ при повороте осей на угол $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ (см. пример 2.6 лекции 2) принимает вид $XY = 1/2$.

5.6. Парабола

Определение 5.5. *Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой d, называемой директрисой ($F \notin d$).*

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы p. Эта величина называется параметром параболы.

Выберем декартову систему координат как показано на рис. 69.

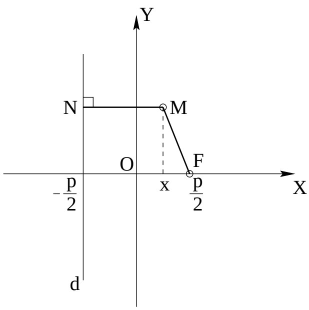


Рис. 69. *Фокус и директриса параболы*

По определению параболы $MF = MN$. Из рис. 69. ясно, что:

$$MN = x + \frac{p}{2};\ \ MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Приравнивая, получаем:
$x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} \Rightarrow x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 \Leftrightarrow y^2=2px,$
откуда находим

$$y^2 = 2px. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) называется каноническим уравнением параболы. Так как y входит в уравнение в чётной степени, парабола симметрична относительно оси Ox. Выразив y из уравнения, получаем: $y = \pm\sqrt{2px},\ x \geqslant 0$. При $x = 0$ получим $y = 0$. Когда x возрастает от 0 до $+\infty$, y в верхней полуплоскости возрастает от 0 до $+\infty$. С учётом симметрии получаем линию, изображённую на рис. 70.

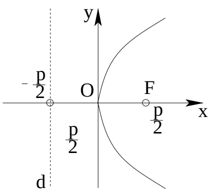


Рис. 70. *Парабола*

Ось симметрии параболы называется фокальной осью (ось Ox на рис. 70), точка пересечения параболы с ней называется вершиной параболы (точка O на рис. 70). Если вершина параболы находится в точке $P(x_0; y_0)$, фокальная ось параллельна и одинаково направлена с осью Ox и расстояние от директрисы до фокуса равно p, то с помощью параллельного переноса осей координат нетрудно получить уравнение такой параболы:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \tag{5.9}$$

Пример 5.5. *Найти фокус, директрису, фокальную ось для параболы $y = 4x^2$.*

Р е ш е н и е: Как известно, осью симметрии параболы $y = x^2$ является ось Oy, а вершиной – точка O, поэтому фокальной осью будет ось Oy, вершиной – начало координат.

Для определения фокуса и директрисы запишем уравнение данной параболы в виде: $x^2 = \dfrac{1}{4}y$, откуда $2p = \dfrac{1}{4}$, $p = \dfrac{1}{8}$. Поэтому фокус имеет координаты $F(0; \dfrac{1}{16})$, а директриса – уравнение $y = -\dfrac{1}{16}$ (рис. 71).

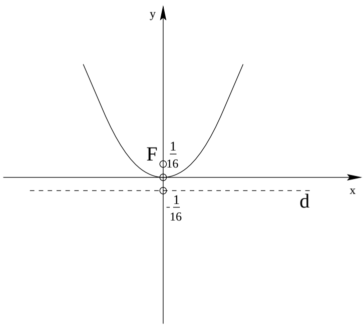


Рис. 71. *График параболы* $y = 4x^2$

5.7. Понятие о приведении общего уравнения второго порядка к каноническому виду

Если в общем уравнении кривой второго порядка (5.3)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

коэффициент $2B \neq 0$, то методами, которые будут изложены позже (лекция 32) это уравнение преобразуется к виду, в котором отсутствует член с произведением координат (т.е. $2B = 0$).

Для приведения к каноническому виду уравнения (5.3), в котором $2B = 0$, необходимо дополнить члены, содержащие x и y, до полных квадратов.

Если при этом ($B = 0$) $A = C$, то получится окружность (пример 5.3), точка или мнимая окружность (пример 5.4).

Если при этом ($B = 0$) $A \neq C$ и $A \cdot C > 0$, то получится эллипс (пример 5.8) или мнимый эллипс.

Если при этом ($B = 0$) $A \neq C$ и $A \cdot C < 0$, то получится гипербола (пример 5.6).

Если при этом ($B = 0$) $A \cdot C = 0$ (т.е. $A = 0$ или $C = 0$), то получится парабола (пример 5.7)

Пример 5.6. *Привести к каноническому виду уравнение кривой* $x^2 - 2y^2 + 2x + 12y - 33 = 0$, *определить и построить её.*

Р е ш е н и е: Для членов, содержащих x, и членов, содержащих y, выполним следующие преобразования с выделением полного квадрата:

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1;$$

$$-2y^2 + 12y = -2(y^2 - 6y) = -2(y^2 - 6y + 9 - 9) = -2(y-3)^2 + 18.$$

Данное уравнение теперь можно переписать так:

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 - 1 + 18 - 33 = 0,$$

откуда

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 = 16$$

или

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1.$$

Выполним преобразование параллельного переноса осей с новым началом $O_1(-1;3)$: $X = x+1$; $Y = y-3$. Тогда уравнение кривой примет вид:

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{8} = 1.$$

Это уравнение гиперболы с полуосями $a = 4$ и $b = 2\sqrt{2}$. На рис. 72 эта кривая построена в системе координат O_1XY. Но можно отнести её и к исходной системе координат Oxy, которая также имеется на рис. 72. В соответствии с изложенным в п. , уравнение асимптот в исходной системе координат будет: $y-3 = \pm\dfrac{\sqrt{8}}{4}(x+1)$. После упрощения получаем: $y = 3 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$.

Пример 5.7. *Приведите к каноническому виду уравнение и определите вид кривой:* $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.

Р е ш е н и е: Выделим полный квадрат: $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 4y - 20 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4(y-5)$. Сделав замену координат $X = x-3$, $Y = y-5$ мы получим каноническое уравнение параболы $X^2 = 4Y$ с осью OY и параметром $p = 2$. Таким образом исходная

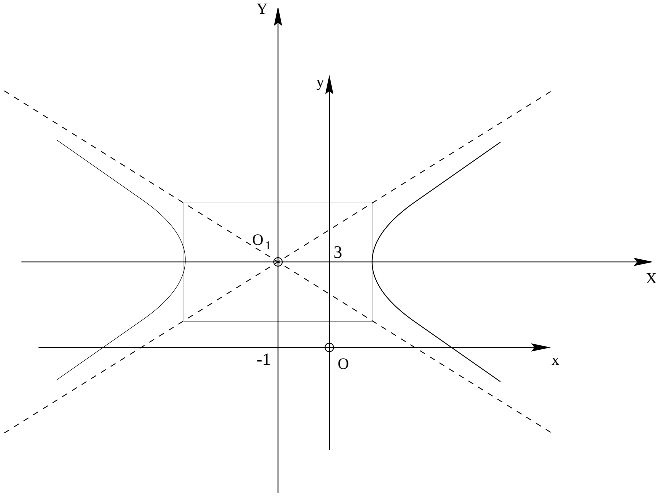


Рис. 72. *Гипербола* $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{(y-3)^2}{8} = 1$

парабола имела вершину $A(3;5)$ и ось $x = 3$ параллельную оси Oy (рис. 73).

Пример 5.8. *Приведите к каноническому виду уравнение и определите вид кривой:* $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 21 = 0$.

Р е ш е н и е: Выделив полный квадрат, получим уравнение: $(x+1)^2+4(y-3)^2 = 16$. Сделав замену координат: $X = x+1$, $Y = y-3$, получим каноническое уравнение эллипса: $X^2 + 4Y^2 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$ с параметрами $a = 4$, $b = 2$. Таким образом, исходный эллипс имел центр $A(-1;3)$ и полуоси $a = 4$, $b = 2$ (рис. 74).

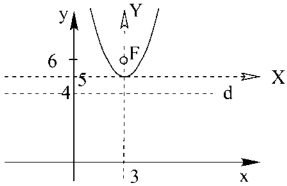


Рис. 73. *Решение примера 5.7*

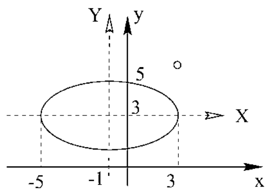


Рис. 74. *Решение примера 5.8*

Практическое занятие 5. Кривые второго порядка

Пример 5.1. *Составьте уравнение окружности, имеющей центр $O(2;-5)$ и радиус $R = 4$.*

Решение: В соответствии с формулой (5.2) искомое уравнение имеет вид: $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$.

Ответ: $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$.

Пример 5.2. *Составьте уравнение эллипса, зная, что сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.*

Решение: Из условия имеем: $a + b = 8$, $2c = 8$. С учётом того, что $b^2 = a^2 - c^2$, находим $c = 4, a = 5, b = 3$. Искомое уравнение эллипса будет: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Пример 5.3. *Составьте уравнение гиперболы, зная, что фокусы $F_1(10;0)$ и $F_2(-10;0)$ и что гипербола проходит через точку $M(12;3\sqrt{5})$*

Р е ш е н и е: Из условия имеем: $c = 10$, $|MF_1 - MF_2| = 2a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a = |\sqrt{(12-10)^2 + (3\sqrt{5}-0)^2} - \sqrt{(12+10)^2 + (3\sqrt{5}-0)^2}| \Leftrightarrow$ $a = 8$. С учётом того, что $b^2 = c^2 - a^2$, находим $a = 8, c = 10, b = 6$. Искомое уравнение гиперболы будет: $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

Пример 5.4. *Составьте уравнение параболы, зная, что фокус имеет координаты (5;0), а ось ординат является директрисой.*

Р е ш е н и е: Поскольку расстояние от директрисы параболы до её фокуса равно параметру p, а вершина находится на середине, из условия следует, что $p = 5$ и вершина расположена в точке $A(2,5;0)$. Таким образом, в новых координатах $X = x - 2,5; Y = y$ каноническое уравнение параболы будет: $Y^2 = 10X$, а в старых координатах: $y^2 = 10(x - 2,5)$.

Ответ: $y^2 = 10x - 25$.

Пример 5.5. *Приведите к каноническому виду уравнение* $x^2+y^2-2x+6y-5=0$, *определите вид кривой и её параметры.*

Р е ш е н и е: Выделим полный квадрат: $x^2-2x+y^2+6y-5=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9-1-9-5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=15$

В соответствии с формулой (5.2) это есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{15}$ с центром в точке $A(1;-3)$.

Ответ: $(x-1)^2+(y+3)^2=15$.

Пример 5.6. *Приведите к каноническому виду уравнение* $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$, *определите вид кривой и её параметры:*

Р е ш е н и е: Выделим полный квадрат: $x^2+4x+4y^2-16y-8=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+4x+4+4y^2-16y+16-4-16-8=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+4(y^2-4y+4)-28 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+2)^2+4(y-2)^2=28 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{28}+\dfrac{(y-2)^2}{7}=1$. Сделав замену координат: $X = x+2$, $Y = y-2$, в новых координатах получим уравнение эллипса $\dfrac{X}{28}+\dfrac{Y}{7}=1$ с полуосями $a=\sqrt{28}$ и $b=\sqrt{7}$. Таким образом, в старых координатах эллипс имеет центр $A(-2;2)$ и полуоси $a=2\sqrt{7}$ и $b=\sqrt{7}$.

Ответ: $\dfrac{(x+2)^2}{28}+\dfrac{(y-2)^2}{7}=1$.

Пример 5.7. *Приведите к каноническому виду уравнение* x^2+2y^2+ $+8x-4=0$, *определите вид кривой и её параметры.*

Решение: Выделим полный квадрат:

$x^2+2y^2+8x-4=0 \Leftrightarrow x^2+8x+16+2y^2-16-4=0 \Leftrightarrow (x+4)^2+$ $+2y^2-20=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+4)^2}{20}+\dfrac{y^2}{10}=1.$

Сделав замену координат $X=x+4$, $Y=y$, убеждаемся, что эта кривая – эллипс, с полуосями $a=2\sqrt{5}$ и $b=\sqrt{10}$ и центром $A(-4;0)$.

Ответ: $\dfrac{(x+4)^2}{20}+\dfrac{y^2}{10}=1.$

Самостоятельная работа

Пример 5.8. *Составьте уравнение окружности, имеющей центр* $O(-3;4)$ *и проходящей через начало координат.*

Пример 5.9. *Составьте уравнение окружности, проходящей через точки* $M_1(0;2), M_2(1;1), M_3(2;-2)$.

Пример 5.10. *На оси абсцисс найдите центр окружности, проходящей через точки* $A(2;3)$ *и* $B(5;2)$, *и напишите уравнение этой окружности.*

Пример 5.11. *Составьте уравнение эллипса, зная, что полуоси равны 4 и 2.*

Пример 5.12. *Составьте уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5.*

Пример 5.13. *Составьте уравнение эллипса, зная, что большая полуось равна 10 и эксцентриситет* $\varepsilon=0,8$.

Пример 5.14. *Составьте уравнение эллипса, зная, что малая полуось равна 3 и эксцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 5.15. *Найдите длину полуосей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса:* $25x^2+169y^2=4225$.

Пример 5.16. *Составьте уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояние между центром и фокусами пополам.*

Пример 5.17. *Составьте уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось равна 3 и гипербола проходит через точку* $(9; -4)$.

Пример 5.18. *Составьте каноническое уравнение гиперболы, зная, что гипербола проходит через точки* $M_1(-5; 2)$ *и* $M_2(2\sqrt{5}; \sqrt{2})$.

Пример 5.19. *Составьте уравнение гиперболы, зная, что фокусы* $F_1(10; 0)$ *и* $F_2(-10; 0)$ *и гипербола проходит через точку* $M(12; 3\sqrt{5})$.

Пример 5.20. *Найдите координаты фокусов, эксцентриситет, уравнение асимптот гиперболы* $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Пример 5.21. *Составьте уравнение параболы, зная, что парабола симметрична оси* Ox, *проходит через начало координат и через точку* $M(1; -4)$.

Пример 5.22. *Составьте уравнение параболы, зная, что парабола симметрична оси* Oy, *фокус помещается в точке* $F(0; 2)$ *и вершина совпадает с началом координат.*

Пример 5.23. *Составьте уравнение параболы, зная, что парабола симметрична оси* Oy, *проходит через начало координат и через точку* $M(6; -2)$.

Пример 5.24. *Определить координаты вершины* A, *величину параметра* p *и направление оси параболы* $y^2 + 8x - 16 = 0$.

Приведите к каноническому виду уравнения, и определите вид кривых и их параметры:

Пример 5.25. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 91 = 0$.

Пример 5.26. $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$.

Пример 5.27. $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$.

Пример 5.28. $x^2 - 4y^2 + 4x + 16y - 16 = 0$

Пример 5.29. $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.

Пример 5.30. $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$.

ГЛАВА III

Теория пределов и числовые ряды

Лекция 6. Теория пределов. Определения

Числовые последовательности, предел последовательности, прогрессии, предел функции, односторонние пределы, ограниченные функции.

6.1. Числовые последовательности

Определение 6.1. *Функция $y = f(n)$, областью определения которой является множество натуральных чисел N, называется функцией натурального аргумента, или числовой последовательностью.*

Члены числовой последовательности располагаются в порядке возрастания аргумента:

$$y_1 = f(1), y_2 = f(2), y_3 = f(3), \ldots, y_n = f(n), \ldots.$$

$y_1 = f(1)$ – первый член последовательности, $y_2 = f(2)$ – второй, $y_n = f(n)$ – n-й член последовательности, или общий член последовательности. Последовательности кратко обозначают $\{y_n\}$. Примеры числовых последовательностей:

Пример 6.1. $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ *или* $\{1/n\}$.

Пример 6.2. $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ *или* $\{(-1)^n\}$.

Пример 6.3. $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ *или* $\{2n-1\}$.

Пример 6.4. $0, 1/2, 2/3, \ldots, (n-1)/n, \ldots$ *или* $\{(n-1)/n\}$.

Характер изменения членов последовательности различен. Из представленных примеров видно, что последовательность может быть возрастающей $y_n < y_{n+1}$ (примеры 6.3 и 6.4), убывающей $y_n > y_{n+1}$ (пример 6.1), ограниченной снизу (пример 6.1), ограниченной сверху (пример 6.4), неограниченной (пример 6.3). Понятия возрастающей, убывающей, ограниченной функции были даны ранее, в лекции 3.

6.2. Предел числовой последовательности

Определение 6.2. *Число b называется пределом числовой последовательности $\{y_n\}$, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε найдется такое число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$.*

Символическая запись определения предела последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = b : \tag{6.1}$$

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ N\ \ \underset{n}{\forall}(n > N) \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon.$$

Поскольку неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$ равносильно $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$, то геометрический смысл предела последовательности можно представить следующим образом: если последовательность имеет пределом число b, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое N, что все точки, изображающие члены последовательности с номерами $n > N$, попадут в полосу, ограниченную прямыми $y = b - \varepsilon, y = b + \varepsilon$ (рис. 75).

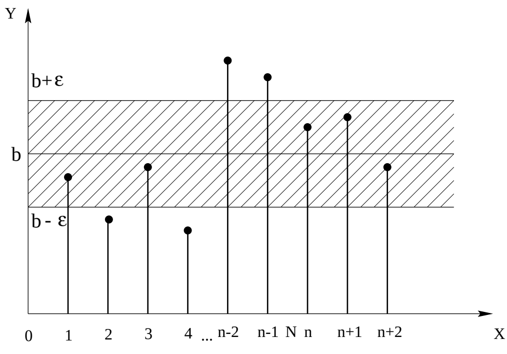


Рис. 75. *Геометрический смысл предела последовательности*

6.3. Прогрессии

Частным случаем последовательности являются прогрессии. Общий член арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$. Характеристическое свойство арифметической прогрессии: $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$.

Сумма k членов арифметической прогрессии $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_k)k = \frac{1}{2}(2a_1 + d(k-1))k$.

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число q, называемое знаменателем геометрической прогрессии $\Rightarrow b_1 = b (b \neq 0); b_{n+1} = b_n \cdot q (q \neq 0)$.

Общий член геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Характеристическое свойство геометрической прогрессии: $|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$. Формула суммы k членов геометрической прогрессии: $S_k = \dfrac{b_1(1-q^k)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$ и сумма $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

6.4. Предел функции

Выше мы рассмотрели предел последовательности y_n, но $y_n = f(n)$ есть функция натурального аргумента, значит, мы фактически имеем дело с пределом функции натурального аргумента. Теперь введем понятие предела функции от непрерывного аргумента. В отличие от предела последовательности определение предела функции зависит от условий стремления аргумента функции ($x \to +\infty, x \to -\infty, x \to x_0$ и т.д.). Рассмотрим некоторые из них.

6.4.1. *Предел функции при* $x \to +\infty$. Проследим характер изменения функции $y = f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ при возрастании значения аргумента x:

x	1	2	10	100	1000
y	1	1.5	1.9	1.99	1.999

и построим её график (рис. 76).

Пусть $M(x, y)$ – текущая точка графика функции $y = 2 - \dfrac{1}{x}$. Тогда расстояние MN от этой точки до прямой $y = 2$ можно определить как

$$d = |y - 2| = |f(x) - 2| = \left|\left(2 - \frac{1}{x}\right) - 2\right| = \left|\frac{1}{-x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

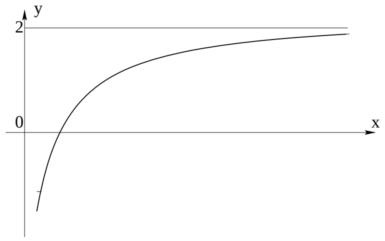


Рис. 76. *График функции* $y = 2 - \dfrac{1}{x}$

Совершенно очевидно,что с ростом значения аргумента x расстояние d уменьшается. Если $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $|f(x) - 2| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$, следовательно, функция неограниченно приближается к числу 2 или при бесконечно возрастающем x ($x \to +\infty$) имеет пределом число 2.

Определение 6.3. *Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число N, что для всех $x > N$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Символическая запись предела функции при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b : \underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ N\ \ \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Замечание 6.1. *Сравнив определение предела последовательности и предела функции при $x \to +\infty$, можно сделать вывод о том, что они похожи. При этом предел последовательности является частным случаем предела функции при $x \to +\infty$. Следовательно, все сформулированные ниже теоремы о пределах функции при $x \to +\infty$ переносятся на пределы последовательности при $n \to +\infty$.*

С учётом того, что неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ эквивалентно системе неравенств $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, геометрический смысл предела функции при $x \to +\infty$ можно проиллюстрировать с помощью графика функции (рис. 77).

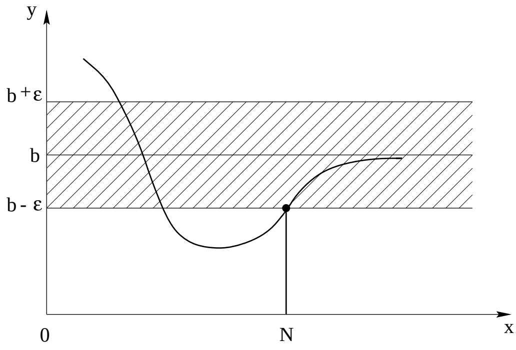


Рис. 77. *Геометрический смысл предела функции при $x \to +\infty$*

Аналогично пределу функции при $x \to +\infty$ можно ввести понятие предела функции при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b : \underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ M\ \ \underset{x}{\forall}(x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (6.3)$$

Замечание 6.2. *Наряду с* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *в математике рассматриваются* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$*.*

Определение этого предела отличается от определения 6.3 тем, что вместо условия $x > N$, требуется «для всех x, таких, что $|x| > N$, выполнение неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$». Другими словами, в $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ точка x может бесконечно удаляться от O не только направо, не только налево, но и любым другим способом, например – попеременно меняя знак. Заметим, что из существования конечного предела

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

следует существования конечных пределов этой функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и их равенство, т.е. будет:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Обратное утверждение неверно. Например $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$ не существует.

Однако, понятие $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ выходит за рамки нашего учебного пособия.

6.4.2. *Предел функции при* $x \to x_0$.

Определение 6.4. *Число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если каково бы ни было ε,можно найти такие числа N и M $(N < x_0 < M)$,что для всех x, лежащих в интервале $(N; M)$ (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Символическая запись предела функции при $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b : \underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ (N < x_0 < M) \tag{6.4}$$
$$\underset{x}{\forall}(N < x < M, \text{кроме м.б. } x = x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл этого предела легко понять из графика на рис. 78.

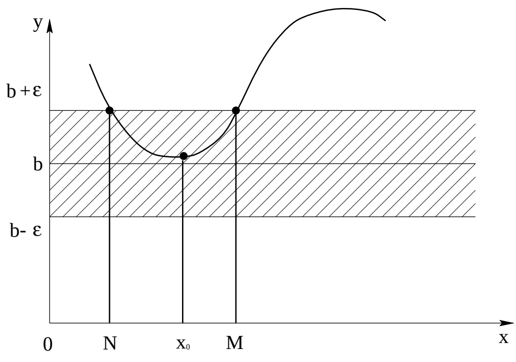


Рис. 78. *Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0$*

Определение предела функции можно дать в несколько ином виде.

Определение 6.5. *Число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b: \ \forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(|x - x_0| < \delta, \text{ кр.м.б. } x = x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Число δ определяет собой некоторую δ-окрестность точки x_0 – интервал $(x - \delta, x + \delta)$, содержащий точку x_0. Оба определения предела функции при $x \to x_0$ (6.4 и 6.5) равносильны.

6.5. Односторонние пределы

Рассмотрим вначале случай, когда независимая переменная x приближается к x_0 слева.

Определение 6.6. *Число b_1 называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число N (меньше x_0), что для всех x, лежащих между N и x_0 ($N < x < x_0$), выполняется неравенство $|f(x) - b_1| < \varepsilon$.*

Предел функции при $x \to x_0$ слева обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1$. Символ $x \to x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева.

Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число $N (N < x_0)$,что для всех x, заключенных между N и x_0, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b_1 - \varepsilon$ и $y = b_1 + \varepsilon$ (рис. 79).

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b: \ \forall(\varepsilon > 0)\exists(N < x_0)\forall(N < x < x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon.$$

Аналогично пределу функции при $x \to x_0$ слева вводится понятие предела при $x \to x_0$ справа.

Определение 6.7. *Число b_2 называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ справа, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число M (большее x_0), что для всех x, лежащих между x_0 и M ($x_0 < x < M$), выполняется неравенство $|f(x) - b_2| < \varepsilon$.*

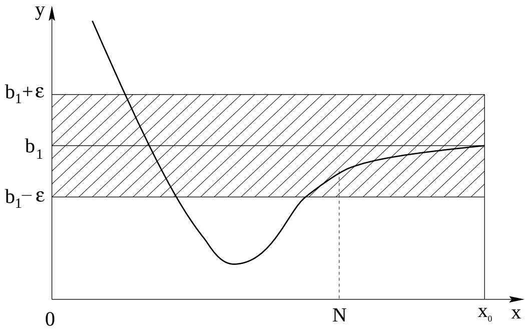


Рис. 79. *Геометрический смысл предела функции при* $x \to x_0 - 0$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = b: \ \forall(\varepsilon>0)\exists(M>x_0)\forall(x_0<x<M) \Rightarrow \ |f(x)-b_2|<\varepsilon.$$

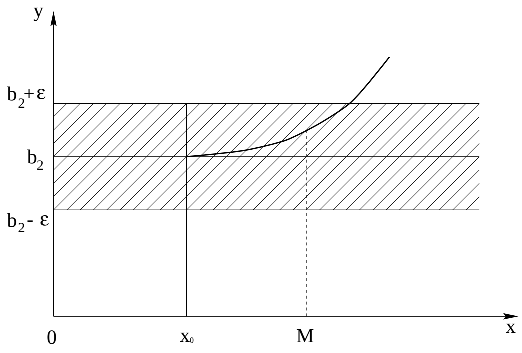


Рис. 80. *Геометрический смысл предела функции при* $x \to x_0 + 0$

Предел функции при $x \to x_0$ справа обозначают так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = b_2$. Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ справа имеет пределом число b_2, то геометрически это означает, что график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b_2 - \varepsilon$ и $y = b_2 + \varepsilon$ для всех x, заключенных между x_0 и M (рис. 80).

Пределы функции при $x \to x_0$ слева ($x \to x_0 - 0$) и при $x \to x_0$ справа ($x \to x_0 + 0$) называют односторонними пределами.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой $b_1 = b_2$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет двухсторонний предел при $x \to x_0$, или просто имеет предел при $x \to x_0$. (см. определение 6.4)

Замечание 6.3. *Можно доказать, что если функция имеет предел, то он единственный.*

6.6. Теоремы об ограниченных функциях

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определённости рассмотрим случай предела функции при $x \to +\infty$.

Теорема 6.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, то она ограничена на некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.*

Дано: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, т.е. функция имеет предел.

Доказать, что $|f(x)| \leqslant C$, т.е. $f(x)$ функция ограниченная.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \to +\infty$ (по определению предела функции). По свойству абсолютных величин $|f(x) - b| \geqslant |f(x)| - |b|$, а следовательно,

$$|f(x) - b| \geqslant |f(x)| - |b| < \varepsilon \text{ или } |f(x)| < |b| + \varepsilon = C.$$

Это и означает, что функция $y = f(x)$ ограничена на исследуемом интервале.

Теорема 6.2. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел, отличный от нуля (при $x \to +\infty$), то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ограничена на некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.*

Дано: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $b \neq 0$, т.е. функция имеет предел.

Доказать, что $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \leqslant C$, т.е. функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $b \neq 0$, то на основании определения предела и с учётом свойств абсолютных величин будем иметь:

$$|f(x) - b| = |b - f(x)| \geqslant |b| - |f(x)| < \varepsilon \text{ или}$$
$$|f(x)| > |b| - \varepsilon \neq 0 \text{ или} \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} = C.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 6.3. *Всякая возрастающая (убывающая) ограниченная функция (последовательность)имеет предел.*

Теорема приводится без доказательства.

В качестве примера на применение этой теоремы рассмотрим последовательность, общий член которой $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Покажем,что последовательность возрастает и ограничена.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона (см. лекцию 19):

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 +$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \cdots + b^n.$$

Полагая $a = 1, b = \dfrac{1}{n}$, получим

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением номера n дроби $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}$ и т.д. уменьшаются, а разности $1 - \dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{2}{n}, 1 - \dfrac{3}{n}$ и т.д. увеличиваются. Следовательно, $y_{n+1} > y_n$ и последовательность $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ – последовательность возрастающая.

Если в разложении y_n отбросить в скобках дроби $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}$ и т.д., то каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n}.$$

Но

$$\frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$ найдем по формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(n \to +\infty)$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2.$$

Откуда $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3$, а, следовательно, данная последовательность ограничена.

На основании теоремы 6.3 делаем вывод,что данная возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. Его называют числом e.

Итак,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{6.5}$$

Иногда данный предел называют вторым замечательным пределом.

Число e иррациональное. Его приблизительное значение с точностью до 10^{-8} : $e = 2,71828182$. Аналогично, предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$. Можно показать, что и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Обозначив $\dfrac{1}{x} = t$, этот же предел можно записать в виде

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \tag{6.6}$$

Предел (6.5) играет большую роль в математике. Показательная функция с основанием e, т.е. $y = e^x$, называется экспоненциальной, или экспонентой. Логарифмы с основанием e называются натуральными логарифмами, причём вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$.

Практическое занятие 6. Контрольная работа по материалу лекций 1–5

Примерный вариант контрольной работы

6.1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{4-x}}$.

6.2. Постройте графики функций с помощью элементарных преобразований

6.2.1 $y = x^2 - 2x - 3$.

6.2.2 $y = x^2 - 2|x| - 3$.

6.2.3 $y = x^2 - |2x+3|$.

6.2.4 $y = \sin^2(3x)$.

6.3. Приведите к каноническому виду уравнение $x + y^2 + 2y - 4 = 0$, определите вид кривой и её параметры.

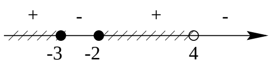
6.4. Даны уравнения сторон ΔABC: $y = x(AB)$, $y = -x + 4(AC)$, $y = 5x - 4(BC)$. Найдите уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC.

Решение примеров варианта контрольной работы

6.1. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{4-x}}$ $\qquad D(y) = \left\{x \middle| \dfrac{x^2+5x+6}{4-x} \geqslant 0\right\}$

Решим неравенство методом интервалов.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -3, -2$$



Ответ: $D(y) = (-\infty; -3] \cup [-2; 4)$

6.2.1. Выделим полный квадрат из правой части: $y = x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 4 \Leftrightarrow y = (x-1)^2 - 4$

Порядок построения графика следующий (см. рис. 81)

1) $y = x^2$

2) $y = (x-1)^2$ сдвинуть график вправо на 1.

3) $y = (x-1)^2 - 4$ сдвинуть график вниз на 4.

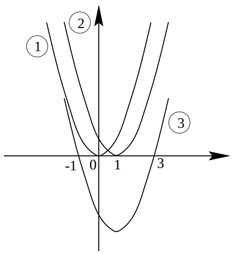


Рис. 81. *Построение графика функции* $y = x^2 - 2x - 3$

6.2.2. График получается, как изложено в примере 4.7 практического занятия 4, на основании графика функции $y = x^2 - 2x - 3$ (см. рис. 82)

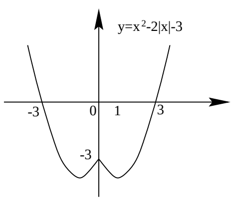


Рис. 82. *Построение графика функции* $y = x^2 - 2|x| - 3$

6.2.3 $y = x^2 - |2x + 3|$.

По определению $|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & \text{при} \quad 2x+3 \geqslant 0, \\ -(2x+3) & \text{при} \quad 2x+3 < 0. \end{cases}$

Таким образом нужно построить графики функций:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 & \text{при} \quad x \geqslant -3/2 \\ y = x^2 + 2x + 3 & \text{при} \quad x < -3/2 \end{cases}$$

График функции представлен на рис. 83.

6.2.4 $y = \sin^2(3x)$

В одних осях нарисуем графики функций $y = \sin 3x$ и $y = \sin^2 3x$. График функции $y = \sin 3x$ (пунктир на рис. 84) получается из графика $y = \sin x$ сжатием в 3 раза вдоль Ox. Учитывая, что при возведении в квадрат числа, меньшего единицы, результат меньше исходного, получаем график $y = \sin^2 3x$ (сплошная линия на рис. 84)

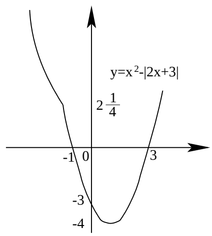


Рис. 83. *Построение графика функции* $y = x^2 - |2x + 3|$

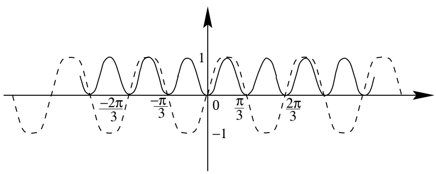


Рис. 84. *Построение графика функции* $y = \sin^2 3x$

6.3. $x + y^2 + 2y - 4 = 0$

Выделим полный квадрат:

$x + y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y^2 + 2y + 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$x + (y + 1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = -(y + 1)^2$

Сделав замену координат $X = x - 5$, $Y = y + 1$ в новых координатах, получаем уравнение параболы $X = -Y^2$ с вершиной $(0; 0)$, фокальной осью $y = 0$, $2p = -1 \Rightarrow p = -\dfrac{1}{2}$, фокусом $(-\dfrac{1}{4}; 0)$ и директрисой $X = \dfrac{1}{4}$ (т.е. ветви против оси OX). Таким образом, в старых координатах парабола имеет вершину $(5; -1)$, фокальную ось $y = -1$, фокус $F(4\dfrac{3}{4}; -1)$, директрису $x = 5\dfrac{1}{4}$ (см. рис. 85).

6.4. $y = x$ (AB), $y = -x + 4$ (AC), $y = 5x - 4$ (BC).

Найдем координаты вершины A, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

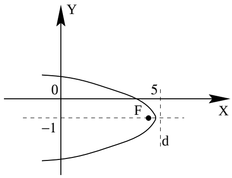


Рис. 85. *Парабола* $x + y^2 + 2y - 4 = 0$

В уравнении прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ угловой коэффициент $k = 5$, т.к. искомая прямая параллельна (BC) и $(x_0; y_0)$ – координаты вершины A. Подставляя найденные значения, получаем:

$$y - 2 = 5(x - 2) \Leftrightarrow y = 5x - 8.$$

Самостоятельная работа

6.5. Найти область определения функции

$$y = \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right).$$

6.6. Постройте графики функций с помощью элементарных преобразований

6.6.1 $y = -x^2 + 5x - 4$.

6.6.2 $y = -x^2 + |5x - 4|$.

6.6.3 $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x}$.

6.6.4 $y = \dfrac{\sin x}{\sin |x|}$.

6.7. Приведите к каноническому виду уравнение $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 291 = 0$, определите вид кривой и её параметры.

6.8. Даны уравнения сторон $\Delta ABC : x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC). Найдите уравнение высоты AN.

Лекция 7. Теория пределов. Основные теоремы

Бесконечно малые функции, бесконечно большие функции, связь бесконечно больших и бесконечно малых функций,основные теоремы о пределах, 1-ый замечательный предел.

7.1. Бесконечно малые функции

Определение 7.1. *Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если её предел при $x \to a$ равен нулю, при этом a может быть равно $+\infty$:*

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0. \qquad (7.1)$$

Бесконечно малые функции принято обозначать греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$.

Рассмотрение примеров в этой лекции проводится на основании определения предела функции, данного в предыдущей лекции при $b = 0$.

Пример 7.1. *Показать, что функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$.*

Р е ш е н и е: Чтобы функция была бесконечно малой при $x \to +\infty$, необходимо выполнение условия $\left|\dfrac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$ при $x > N$. Это возможно при $\dfrac{1}{x^2} < \varepsilon$ или при $x > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = N$.

Замечание 7.1. *Можно показать, что функция $\dfrac{1}{x^a}$ (где a – любое положительное число) есть бесконечно малая при $x \to +\infty$.*

Пример 7.2. *Показать, что функция $y = x^5$ является бесконечно малой при $x \to 0$.*

Р е ш е н и е: Чтобы функция была бесконечно малой при $x \to 0$, необходимо, чтобы при малых x выполнялось условие $|x^5| < \varepsilon$. Это возможно при всех значениях $|x| < \sqrt[5]{\varepsilon}$ или $-\sqrt[5]{\varepsilon} < x < \sqrt[5]{\varepsilon}$.

Замечание 7.2. *Можно показать, что функция $y = x^m$, где $m > 0$, бесконечно малая функция при $x \to 0$.*

Пример 7.3. *Функция* $y = 2 - \dfrac{1}{x}$ *не является бесконечно малой при* $x \to +\infty$, *так как* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2 \neq 0$, *но она является бесконечно малой при* $x \to \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь несколько теорем о бесконечно малых функциях. Для определённости проведем доказательства теорем при $x \to +\infty$.

Теорема 7.1. *Если функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *являются бесконечно малыми функциями при* $x \to +\infty$,*то и их сумма* $\alpha(x) + \beta(x)$ *также является бесконечно малой функцией (при* $x \to +\infty$*).*

Из условий теоремы следует, что

$$\begin{array}{l} |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \text{ при } x > N_1 \\ |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \text{ при } x > N_2 \end{array}$$, поскольку $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to +\infty$. Для доказательства теоремы, т.е. того, что $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, достаточно показать, что $|\gamma(x)| < \varepsilon$ при $x > N$, где N наибольшее из N_1 и N_2.

Действительно, при $x > N$

$$|\gamma(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема может быть легко обобщена на любое конечное число бесконечно малых функций. Кратко её читают так: сумма нескольких бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Пример 7.4. *Функция* $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$ *является бесконечно малой функцией при* $x \to +\infty$, *так как каждое слагаемое* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{1}{x}$ *и* $\dfrac{1}{x^2}$ *есть бесконечно малая функция при* $x \to +\infty$.

Пример 7.5. *Функция* $y = x + x^3 + x^5$ *есть бесконечно малая функция при* $x \to 0$, *так как функции* $y = x$, $y = x^3$ *и* $y = x^5$ *бесконечно малые при* $x \to 0$.

Теорема 7.2. *Произведение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$ на функцию, ограниченную при $x \to +\infty$, является функцией бесконечно малой.*

Дано: $|\varphi(x)| \leqslant C$ при $x > N$ – ограниченная функция;
$|\alpha(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{C}$ при $x > N$ - бесконечно малая функция.

Доказать, что $\gamma(x) = \varphi(x) \cdot \alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, т.е. $|\gamma(x)| < \varepsilon$ при $x > N$.

Доказательство:

$$|\gamma(x)| = |\varphi(x) \cdot \alpha(x)| = |\varphi(x)| \cdot |\alpha(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Пример 7.6. *Функция $y = \dfrac{\cos x}{x^4}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$, так как она является произведением ограниченной функции $\cos x$ на бесконечно малую (при $x \to +\infty$) функцию $y = \dfrac{1}{x^4}$.*

Пример 7.7. *Функция $y = x(1 + \sin x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$, так как она является произведением ограниченной функции $1 + \sin x$ на функцию x, бесконечно малую при $x \to 0$.*

Следствие 1. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из только что доказанной теоремы вытекает, что произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 7.3. *Частное от деления функции $\alpha(x)$, бесконечно малой при $x \to a$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x \to a$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*

Доказательство: Функция $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ может быть представлена в виде произведения бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $\dfrac{1}{\varphi(x)}$. Но тогда из теоремы 7.2 вытекает, что частное $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \alpha(x) \cdot \dfrac{1}{\varphi(x)}$ является бесконечно малой функцией.

7.2. Бесконечно большие функции

Определение 7.2. *Функция $y = N(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого положительного числа L можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех значений $x \in (a-\delta; a+\delta)$ выполняется неравенство $|N(x)| > L$.*

Так, например, функция $y = x^2$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$. Какое бы положительное число L мы ни взяли, эта функция может быть сделана больше, чем L (для всех значений $x > N = \sqrt{L}$).

Символически бесконечно большая, при $x \to a$ положительная функция записывается в виде:

$$\lim_{x\to a} N(x) = +\infty.$$

Если бесконечно большая функция отрицательна, то говорят, что она стремится к $-\infty$ и пишут:

$$\lim_{x\to a} N(x) = -\infty.$$

Бесконечно большие функции принято обозначать латинскими большими буквами $N(x)$, $M(x)$.

7.3. Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует тесная связь, которая устанавливается в следующих теоремах.

Теорема 7.4. *Если функция $N(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, то функция $\dfrac{1}{N(x)}$— бесконечно малая при $x \to a$.*

Доказательство: Пусть $x \to +\infty$ Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что для достаточно больших x выполняется неравенство $|\dfrac{1}{N(x)}| < \varepsilon$, а это и означает, что $\dfrac{1}{N(x)}$ — бесконечно малая функция. Так как по условию $N(x)$ – бесконечно большая функция, то существует такое число C, что $|N(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ при $x > C$. Но тогда $|\dfrac{1}{N(x)}| < \varepsilon$ для тех же x. Тем самым теорема доказана.

Пример 7.8. *Функция* $y = x^2$ *бесконечно большая при* $x \to +\infty$. *Следовательно, функция* $\dfrac{1}{x^2}$ *является бесконечно малой при* $x \to +\infty$.

Теорема 7.5. *Если функция* $\alpha(x)$ *есть бесконечно малая при* $x \to a$, *то* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *– бесконечно большая функция при* $x \to a$.

Теорема приводится без доказательства.

7.4. Основные теоремы о пределах

Ниже приводятся основные теоремы о пределах, которые позволяют облегчить определение пределов. При этом формулировки и доказательства теорем для случаев
$x \to +\infty, x \to -\infty, x \to x_0, x \to x_0 - 0, x \to x_0 + 0$ совершенно аналогичны. Поэтому здесь они предлагаются для общего случая $x \to a$.

Теорема 7.6. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет предел (при* $x \to a$*), равный* b*, то её можно представить в виде суммы числа* b *и бесконечно малой функции* $\alpha(x)$ *при* $x \to a$:

$$f(x) = b + \alpha(x). \tag{7.2}$$

Дано: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ – бесконечно малая, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ – функция имеет предел.

Доказать, что при этом $f(x) = b + \alpha(x)$.

Доказательство: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$, при $|x - a| < \delta$, а это значит, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - b) = 0$, т.е. $f(x) - b = \alpha(x)$ – бесконечно малая функция, при $x \to a$ следовательно, $f(x) = b + \alpha(x)$.

Теорема 7.7. *(обратная, без доказательства). Если функцию* $y = f(x)$ *можно представить как сумму числа* b *и некоторой бесконечно малой функции (при* $x \to a$*), то число* b *является пределом функции* $f(x)$ *(при* $x \to a$*).*

Теорема 7.8. *Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.*

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=c$, то функции $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ и $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ тоже имеют пределы при $x\to a$.

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)\pm\psi(x)]=\lim_{x\to a}\varphi(x)\pm\lim_{x\to a}\psi(x). \tag{7.3}$$

Дано: $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=c$.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)+\psi(x)]=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)+\lim\limits_{x\to a}\psi(x)$.

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b,\\ \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=c;\end{array}\right\}\ \text{на основании теоремы 7.6}\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)=b+\alpha(x),\\ \psi(x)=c+\beta(x).\end{array}\right.$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$.
Тогда

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=[b+\alpha(x)]+[c+\beta(x)]=(b+c)+[\alpha(x)+\beta(x)],$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[\varphi(x)+\psi(x)]=\lim_{x\to a}\{(b+c)+[\alpha(x)+\beta(x)]\}=b+c.$$

Последнее равенство вытекает из теоремы 7.7.

Следовательно:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[\varphi(x)+\psi(x)]=\lim_{x\to a}\varphi(x)+\lim_{x\to a}\psi(x).$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)-\psi(x)]=\lim_{x\to a}\varphi(x)-\lim_{x\to a}\psi(x).$$

Теорема 7.9. *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.*

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=c$, то функция $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ также имеет предел при $x\to a$, причём

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x). \tag{7.4}$$

Дано: $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=c$.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\psi(x)$.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b,\\ \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=c;\end{array}\right\}\ \text{на основании теоремы 7.6}\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)=b+\alpha(x),\\ \psi(x)=c+\beta(x),\end{array}\right.$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$. Имеем:
$f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x) = [b+\alpha(x)]\cdot[c+\beta(x)] = (b\cdot c) + [c\cdot\alpha(x) + b\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)]$.

Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim_{x\to a}\{(b\cdot c)+[c\cdot\alpha(x)+b\cdot\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)]\} =$$

$$= b\cdot c + \lim_{x\to a}[c\cdot\alpha(x) + b\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)] = b\cdot c = \lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x).$$

Здесь $\lim\limits_{x\to a}[c\cdot\alpha(x) + b\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)] = 0$, т.к. все слагаемые бесконечно малые функции.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to a}[k\cdot\varphi(x)] = k\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x). \tag{7.5}$$

Следствие 2. Из теоремы 7.9 вытекает, что предел степени равен степени предела:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n. \tag{7.6}$$

Теоремы 7.8 и 7.9 распространяются на любое конечное число функций.

Теорема 7.10. *(без доказательства). Предел дроби равен отношению предела числителя и знаменателя, если последний не равен нулю.*

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = c$ и $c \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)/\psi(x)] = \lim_{x\to a}\varphi(x)/\lim_{x\to a}\psi(x). \tag{7.7}$$

Пример 7.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1)$.

Р е ш е н и е: Воспользуемся теоремами о пределах функции.

- По теореме о пределе суммы

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1) = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}2x - \lim_{x\to 2}1.$$

- Так как предел степени, равен степени предела, то

$$\lim_{x\to 2}x^2 = [\lim_{x\to 2}x]^2 = 2^2 = 4.$$

- Постоянный сомножитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to 2}2x = 2\lim_{x\to 2}x = 2\cdot 2 = 4.$$

- Предел постоянной равен самой постоянной
$$\lim_{x\to 2} 1 = 1.$$

Окончательно получим:
$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1 = 4+4-1 = 7.$$

Пример 7.10. *Найти* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+3x^2+4}{x^2-2x+3}$.

Р е ш е н и е: На основании навыков, приобретённых при решении предыдущего примера, находим:
предел числителя $\lim\limits_{x\to 1}(x^4+3x^2+4) = \lim\limits_{x\to 1} x^4 + \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 4 = 1+3+4 = 8$,
предел знаменателя $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 3 = 1-2+3 = 2$.
Применяя теорему о пределе дроби, получим
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^2+4}{x^2-2x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^4+3x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3)} = \frac{8}{2} = 4.$$

Теорема 7.11. *(о промежуточной функции). Пусть даны три функции, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ для достаточно близких к a значений x. Если функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же предел при $x \to a$, то и функция $f(x)$, заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций $\varphi(x)$ и $g(x)$.*

В качестве доказательства приведем простую геометрическую интерпретацию условий теоремы при $x \to +\infty$ (рис. 86):

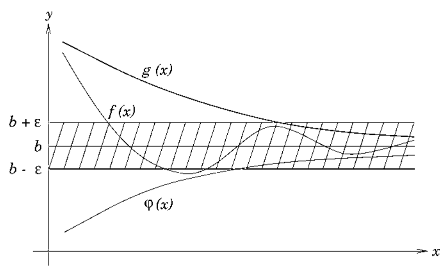


Рис. 86. *Геометрическая интерпретация условий теоремы о промежуточной функции*

ТЕОРЕМА 7.12. *Если функция $y = f(x) \geqslant 0$ для всех x, достаточно близких к a, имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant 0$ (без доказательства).*

7.5. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим окружность единичного радиуса. Предположим, что $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Дуга $\breve{AC}$ численно равна центральному углу x, выраженному в радианах, а отрезок AB численно равен $\sin x$. Так как $0 < AB < \breve{AC}$, то $0 < \sin x < x$. По теореме о пределе промежуточной функции 7.11 при $x \to 0$ $\sin x$ должен стремиться к нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Можно также показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) = 1 - 2\lim_{x\to 0}(\sin^2\frac{x}{2}) = 1 - 2\cdot 0 = 1.$$

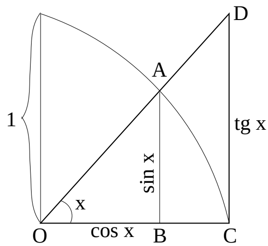


Рис. 87. *Иллюстрация к определению* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Как следует из представленного рисунка 87:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект}OAC} < S_{\triangle ODC}.$$

Так как

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OB\cdot BA}{2} = \frac{\cos x\sin x}{2},$$

$$S_{\text{сект }OAC} = \frac{1}{2}R^2x = \frac{1}{2}1^2x = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle ODC} = \frac{OC \cdot CD}{2} = \frac{1 \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

то подставив выражения для площадей в неравенство, получим:

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Разделим все члены неравенств на $\frac{1}{2}\sin x$ и проведем сокращения:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Эти неравенства справедливы, как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Как показано выше, при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Применив к частному $\frac{1}{\cos x}$ теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку обе крайние функции последнего неравенства при $x \to 0$ имеют одинаковый предел, равный единице, по теореме о пределе промежуточной функции (основные теоремы о пределах) функция $\frac{\sin x}{x}$ имеет тот же предел при $x \to 0$, т. е.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{7.8}$$

Данный предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ принято называть первым замечательным пределом.

Пример 7.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е: Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример 7.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\arcsin 3x}$.

Р е ш е н и е: При подстановке $x=0$ имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$. Обозначим $\arcsin 3x = y$, тогда $\sin y = 3x$ и $x = \dfrac{\sin y}{3}$. При $x\to 0$ и $y\to 0$. Следовательно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\arcsin 3x} = \lim_{y\to 0}\frac{5\cdot\dfrac{\sin y}{3}}{y} = \frac{5}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

Отметим, что введенный нами ранее $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ *принято называть вторым замечательным пределом.*

Практическое занятие 7. Теория пределов

Теория пределов составляет фундамент математического анализа. Именно поэтому обучающемуся необходимо хорошо владеть приемами нахождения пределов функции. Естественно при этом использовать рассмотренный выше в лекциях теоретический материал. В теории пределов существенное значение имеют теоремы о пределах, применение которых в практических приложениях способствует нахождению пределов различных функций.

Для закрепления пройденного теоретического материала рассмотрим подробно процесс решения следующих примеров.

Пример 7.1. *Для приведённых ниже последовательностей записать формулу общего члена последовательности.*

Рекомендация. После анализа первых членов последовательности необходимо установить закономерность получения каждого члена последовательности в зависимости от номера члена последовательности n, где n=1, 2, 3, 4,. . . .

- 1, 2, 3, 4,. . . . Здесь члены последовательности совпадают с номером члена последовательности. Ответ: $y_n = n$.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$. Числитель последовательности соответствует номеру члена последовательности, а знаменатель на единицу больше. Ответ: $y_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$. Перепишем члены последовательности в виде показательной функции с основанием 2: $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2^{\frac{7}{8}}, 2^{\frac{15}{16}}$. Нетрудно заметить, что знаменатель показателя степени изменяется как геометрическая прогрессия со знаменателем q=2, т.е. 2^n, а числитель на единицу меньше знаменателя, т.е $2^n - 1$.
  Ответ: $y_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$.

Пример 7.2. *Последовательность y_n задана формулой общего члена последовательности $y_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. Найти y_{10}, y_{n-1}, y_{n+1}.*

Р е ш е н и е: Для вычисления соответствующего члена последовательности необходимо в формулу общего члена последовательности подставить соответствующий номер.

$y_{10} = \dfrac{2*10+1}{10+3} = \dfrac{21}{13}$, $\qquad y_{n-1} = \dfrac{2\,(n-1)+1}{(n-1)+3} = \dfrac{2n-1}{n+2}$,

$y_{n+1} = \dfrac{2\,(n+1)+1}{(n+1)+3} = \dfrac{2n+3}{n+4}$.

Пример 7.3. *Найти предел последовательности*

$$0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; \ldots.$$

Р е ш е н и е: Общий член заданной последовательности можно записать в виде:

$$y_n = 0,2 + [0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots] = 0,2 + S.$$

Выражение в квадратных скобках образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 0,1$ и первым членом последовательности $b_1 = 0,03$. Сумма первых n её членов (n-я частичная сумма) $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел S_n и вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. Предел последовательности в таком случае будет равен

$$\lim_{n\to+\infty}\{y_n\} = \lim_{n\to+\infty}[0,2 + S_n] = \left(0,2 + \frac{b_1}{1-q}\right) =$$

$$= \left(0,2 + \frac{0,03}{1-0,1}\right) = \frac{7}{30}.$$

Пример 7.4. *Найти предел последовательности*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Р е ш е н и е: Числители дробей образуют арифметическую прогрессию: $0+1+2+3+\ldots+n-1$. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{0+(n-1)}{2}\cdot n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n-1}{n^2}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 7.5. *Найти предел последовательности*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Р е ш е н и е: Слагаемые $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\ldots\frac{1}{2^n}$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, n-я частичная сумма которой равна $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Следовательно:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Пример 7.6. *Найти предел последовательности*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}.$$

Р е ш е н и е: Разделим числитель и знаменатель на наибольшее выражение при $n \to +\infty \ \longrightarrow\ 3^{n+1}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+1}{\dfrac{2^n}{3^{n+1}}+\dfrac{3^n}{3^{n+1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{0+1}{\dfrac{1}{3}\cdot 0+\dfrac{1}{3}}=3$$

(т. к. показательная функция с основанием $\dfrac{2}{3}$ при $n \to +\infty$ стремится к нулю.)

Пример 7.7. *Найти односторонние пределы:*

1. $\lim\limits_{x\to 3-0} 5^{\frac{1}{x-3}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3+0} 5^{\frac{1}{x-3}}$.

Р е ш е н и е: 1. Если $x \to 3-0$, то $x-3 \to -0$ и $\dfrac{1}{x-3} \to -\infty$ как частное от деления ограниченной величины на бесконечно малую отрицательную, следовательно

$$\lim_{x\to 3-0} 5^{\frac{1}{x-3}} = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

2. Если $x \to 3+0$, то $x-3 \to +0$ и $\dfrac{1}{x-3} \to +\infty$, следовательно,

$$\lim_{x\to 3+0} 5^{\frac{1}{x-3}} = 5^{+\infty} = +\infty.$$

Для приобретения практических навыков нахождения пределов рассмотрим несколько примеров. При этом при раскрытии неопределённостей будем использовать замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e.$$

Пример 7.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Р е ш е н и е: Вид заданного примера очень похож на первый замечательный предел, однако не равен ему. Для приведения данного предела к замечательному можно использовать два следующих приема:

1. Умножить числитель и знаменатель выражения на 5:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5}{x\cdot 5}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

2. Обозначить $5x=y$. Тогда $x=\dfrac{y}{5}$. При $x\to 0 \quad$ и $\quad y\to 0:$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\dfrac{y}{5}}=5\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=5.$$

Пример 7.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\dfrac{3\pi x}{2}}{x}$.

Р е ш е н и е: Опять решаем пример, который на первый взгляд очень похож на первый замечательный предел. Однако следует обратить внимание на предельное значение аргумента. Здесь $x\to 2$, а не к бесконечности, как в случае с первым замечательным пределом. При подстановке $x=2$ под знак предела получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin\dfrac{3\pi x}{2}}{x}=\frac{\sin\dfrac{3\pi\cdot 2}{2}}{2}=\frac{\sin 3\pi}{2}=\frac{0}{2}=0.$$

Пример 7.10. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

Р е ш е н и е: Вспомнив замечания, сделанные в предыдущем примере, мы приходим к выводу, что и этот пример не связан с замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. При $x\to+\infty$ знаменатель выражения есть бесконечно большая величина $(\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty)$, а числитель – ограниченная $(|\sin x|\leqslant 1)$, и отношение ограниченной величины к бесконечно большой есть бесконечно малая величина. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Пример 7.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Решение: При $x \to 0$ имеем дело с неопределённостью типа $\dfrac{0}{0}$. Совершим элементарные преобразования

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x}{\dfrac{\sin 5x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos 5x}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}}.$$

Известно, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos 5x = 1$, а в примере 7.8 показано, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 5$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{1}{5}.$$

При решении примеров, связанных с нахождением пределов от тригонометрических функций, в некоторых случаях рекомендуется воспользоваться тригонометрическими тождествами, чтобы затем либо вычислить предел непосредственной подстановкой предельного значения аргумента, либо привести полученный предел к первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Пример 7.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{x^2}$.

Решение: При $x \to 0$ имеет место неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos 5x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 - \lim\limits_{x\to 0} \cos 5x = 1 - 1 = 0$. Воспользуемся тригонометрическим тождеством $1 - \cos 5x = 2\sin^2 \dfrac{5x}{2}$ и перепишем пример в виде:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{5x}{2}}{x^2}.$$

Выполним необходимые преобразования для того, чтобы привести полученный предел к виду первого замечательного предела. Обозначим

$\dfrac{5x}{2} = y$, откуда $x = \dfrac{2y}{5}$. Очевидно, что при $x \to 0$ и $y \to 0:$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{5x}{2}}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2 y}{\left(\dfrac{2y}{5}\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2 y}{\dfrac{4}{25}y^2} = \frac{25}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} =$$

$$= \frac{25}{2} \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = \frac{25}{2} \cdot 1 = \frac{25}{2}.$$

Пример 7.13. *Найти* $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$.

Р е ш е н и е: При подстановке $x = \pi$ под знак предела получим

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x} = \frac{1-\sin\dfrac{\pi}{2}}{\pi-\pi} = \frac{1-1}{\pi-\pi} = \frac{0}{0},$$

т.е. неопределённость. Для раскрытия неопределённости обозначим $x - \pi = y$, а значит $x = y + \pi$. При $x \to \pi$, $x - \pi \to 0$ и, следовательно, $y \to 0$.

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{y+\pi}{2} = \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{y}{2},$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos\dfrac{y}{2}}{-y}.$$

Неопределённость $\dfrac{0}{0}$ сохранилась, но теперь мы сможем воспользоваться формулой $1 - \cos\dfrac{y}{2} = 2\sin^2\dfrac{y}{4}$.

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos\dfrac{y}{2}}{-y} = \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2\dfrac{y}{4}}{-y}.$$

Обозначим $\dfrac{y}{4} = z$, откуда $y = 4z$. При $y \to 0$, $z \to 0:$

$$\lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2\dfrac{y}{4}}{-y} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2 z}{-4z} = -\frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{\sin^2 z}{z} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z\to 0} \sin z = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}=0.$

Пример 7.14. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(mx)-\cos(nx))/x^2$.

Р е ш е н и е: При подстановке x=0 под знак предела получаем неопределённость $\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$. Применим тригонометрическое тождество
$\cos(mx)-\cos(nx)=-2\sin\left(\dfrac{m+n}{2}x\right)\cdot\sin\left(\dfrac{m-n}{2}x\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{m+n}{2}x\right)\cdot\sin\left(\dfrac{m-n}{2}x\right)}{x^2}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{m+n}{2}x\right)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{m-n}{2}x\right)}{x}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{m+n}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{m+n}{2}x\right)}{\dfrac{m+n}{2}\cdot x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{m-n}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{m-n}{2}x\right)}{\dfrac{m-n}{2}\cdot x}=$$

$$=-2\cdot\frac{m+n}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{m+n}{2}x\right)}{\dfrac{m+n}{2}\cdot x}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{m-n}{2}x\right)}{\dfrac{m-n}{2}\cdot x}=$$

$$=-\frac{2}{4}(m^2-n^2)\cdot 1\cdot 1=\frac{n^2-m^2}{2}.$$

Пример 7.15. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

Р е ш е н и е: По внешнему виду данный пример напоминает второй замечательный предел. Введем переменную $t=\dfrac{3}{x}$, отсюда $x=\dfrac{3}{t}$. При $x\to+\infty$ $t=\dfrac{3}{x}\to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^3=e^3.$$

Пример 7.16. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Решение: Воспользуемся свойством предела функции и совершим следующие элементарные преобразования, разделив числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\cdot(1-\frac{1}{x})}{x\cdot(1+\frac{1}{x})}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

Пример 7.17. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

Решение: Обозначим $2x-1=y$, откуда $x=\dfrac{y+1}{2}$, $2x+3=y+4$. При $x\to+\infty$ и $y\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{\frac{y+1}{2}}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{(\frac{y}{2}+\frac{1}{2})}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{\frac{y}{2}}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 1^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(e^4)^{\frac{1}{2}}\cdot 1=e^2.$$

Пример 7.18. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2))$.

Решение: При $x\to+\infty$ имеем дело с неопределённостью вида $+\infty-\infty$. Воспользуемся свойством логарифмической функции $\ln(2x+1)-\ln(x+2)=\ln\dfrac{2x+1}{x+2}$. Числитель и знаменатель выражения под знаком логарифма разделим на x. Тогда

$$\ln\frac{2x+1}{x+2}=\ln\frac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$$

Подставим это выражение в исходный придел:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right) = \ln 2,$$

так как при $x \to +\infty$ $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{2}{x}$ равны нулю.

Самостоятельная работа

Для приведённых ниже последовательностей записать формулу общего члена последовательности.

Пример 7.19. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$.

Пример 7.20. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$.

Пример 7.21. $1, 4, 9, 16, 25, \cdots$.

Пример 7.22. $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \cdots$.

Пример 7.23. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$.

Пример 7.24. *Последовательность y_n задана формулой общего члена последовательности $\{y_n\} = \dfrac{n}{3^n}$ Найти y_3, y_5, y_{n+1}.*

Найти пределы последовательностей

Пример 7.25.

$$1,6; 1,66; 1,666; 1,6666; \ldots$$

Пример 7.26.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1+3+5+7+...+(2n-1)}{n^2}\right].$$

Пример 7.27.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right].$$

Пример 7.28.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{9^n+8^n}{9^{n+1}+8^{n+1}}.$$

Пример 7.29.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{2}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}},\ldots.$$

Пример 7.30.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}.$$

Найти односторонние пределы:

Пример 7.31. $\lim\limits_{n\to4-0} 2^{\frac{1}{n-4}}$.

Пример 7.32. $\lim\limits_{n\to4+0} 2^{\frac{1}{n-4}}$.

Найти пределы функций.

Пример 7.33. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

Пример 7.34. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Пример 7.35. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin x}{x}$.

Пример 7.36. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

Пример 7.37. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$.

Пример 7.38. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Пример 7.39. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

Пример 7.40. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Пример 7.41. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Пример 7.42. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^x$.

Пример 7.43. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

Пример 7.44. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

Пример 7.45. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.

Лекция 8. Приёмы раскрытия неопределённостей

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность бесконечно малых функций. Приемы раскрытия неопределённостей.

8.1. Сравнение бесконечно малых функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0$ и $\neq +\infty$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем функция $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка малости, чем функция $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = +\infty$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует и не равен $+\infty$.*

ПРИМЕР 8.1. *Сравнить бесконечно малые функции*

$$y = x^2 \text{ и } y = 3x \text{ при } x \to 0.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Следовательно, функция $y = x^2$ бесконечно малая при $x \to 0$ более высокого порядка малости, чем функция $y = 3x$.

ПРИМЕР 8.2. *Сравнить бесконечно малые функции*

$$y = x^2 + x - 6 \text{ и } y = 4 - x^2 \text{ при } x \to 2.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{4 - x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)(x+2)} = -\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} = -\frac{5}{4} \neq 0.$$

Следовательно, указанные функции являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 2$.

Пример 8.3. *Сравнить бесконечно малые функции*

$$y = \frac{\cos x}{x} \text{ и } y = \frac{1}{x} \text{ при } x \to +\infty.$$

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\cos x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \cos x.$$

Так как $\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$, указанные функции являются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to +\infty$.

8.2. Эквивалентность бесконечно малых функций

Определение 8.5. *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые при $x \to a$, называются эквивалентными (равносильными), если предел их отношения $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.*

Тогда для значений x, близких к $x = a$, имеет место приближённое равенство $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \approx 1$, или $\alpha(x) \approx \beta(x)$, точность которого возрастает с приближением x к a.Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$—эквивалентные бесконечно малые при $x \to a$, то пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теорема 8.1. *Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если $\alpha \sim \alpha_1$, а $\beta \sim \beta_1$ при $x \to a$, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Дано: $\alpha \sim \alpha_1$, а $\beta \sim \beta_1$ при $x \to a$.
Доказательство:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta_1(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1 \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 8.4. *Найти* $\lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Р е ш е н и е: Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$, то $\sin 5x\sim 5x$, $\sin 3x\sim 3x$ при $x\to 0$, и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

Теорема 8.2. *Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны, если их разность $[\alpha(x)-\beta(x)]$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.*

Дано: $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ — функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$ и $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$.

Доказать, что $\alpha(x)\sim\beta(x)$ т. е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}=0$.

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-\psi(x))}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right)=$$

$$=1-\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1-1=0.$$

Следовательно, $\gamma(x)$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$. Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}=0$.

Теорема 8.3. *Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

Дано: $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ — функции $\gamma(x),\alpha(x),\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$. Пусть для определённости $\gamma(x)$ – бесконечно малая функция низшего порядка малости по сравнения с остальными слагаемыми, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}=0$.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)+\alpha(x)+\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, т.е. сумма бесконечно малых функций при $x\to a$ эквивалентна в данном случае $\gamma(x)$.

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)+\alpha(x)+\beta(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to a}1+\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}+\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1+0+0=1.$$

Пример 8.5. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+6x^2}{\sin 2x}$.

Р е ш е н и е: Так как при $x\to 0$ $5x+6x^2\sim 5x$ (по теореме 8.3) и $\sin 2x\sim 2x$ (по теореме 8.1), то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+6x^2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$.

8.3. Приемы раскрытия неопределённостей

При рассмотрении арифметических операций над пределами предполагается, что обе переменные величины имеют предел $x\to x_0$, а в случае предела частного оговаривается, что предел знаменателя не равен нулю.

Существуют случаи, когда эти условия не выполняются. Например, переменные, стоящие в числителе и знаменателе, при $x\to x_0$ стремятся одновременно к нулю или бесконечности. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость соответствующего типа: $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если сумма бесконечно больших величин при $x\to x_0$ одного знака есть величина бесконечно большая, то о пределе разности таких величин заранее ничего сказать нельзя – неопределённость типа $+\infty-\infty$.

При умножении бесконечно малой величины при $x\to x_0$ на бесконечно большую при $x\to x_0$ возникает неопределённость типа $0\cdot\infty$.

При рассмотрении 2-го замечательного предела мы также видели, что $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}}$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые величины при $x\to x_0$, может быть различным, все зависит от стремления $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ к нулю при $x\to x_0$. Это неопределённость типа $1^{+\infty}$.

Раскрыть неопределённость – это значит определить поведение выражения, приводящего к данной неопределённости, и найти его предел.

Рассмотрим несколько приемов раскрытия неопределённостей различного типа.

Пример 8.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$.

Р е ш е н и е: В данном примере числитель и знаменатель – бесконечно большие величины, т.е. имеет место неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Чтобы раскрыть эту неопределённость, разделим числитель и знаменатель на x. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+5/x}{2+7/x}=\frac{3}{2},$$

так как при $x\to+\infty$ каждая из дробей $\dfrac{5}{x}$ и $\dfrac{7}{x}$ стремится к нулю.

Аналогично понятию эквивалентности бесконечно малых функций можно ввести понятие эквивалентности бесконечно большой функции.

Определение 8.6. *Функции $N(x)$ и $M(x)$ бесконечно большие при $x\to a$ называются эквивалентными, если предел их отношения $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{N(x)}{M(x)}=1$.*

Очевидно, что многочлен $P_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0$ эквивалентен при $x\to+\infty$ члену с наивысшим показателем степени b_nx^n, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{b_nx^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0}{b_nx^n}=1$$

Следовательно, для отношения многочленов при $x\to+\infty$ будет иметь место правило

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}= \tag{8.1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\frac{a_m}{b_n}\lim_{x\to+\infty}x^{m-n}$$

- *если степень числителя меньше степени знаменателя ($m<n$), то предел равен нулю;*
- *если степень числителя больше степени знаменателя ($m>n$), то предел равен $+\infty$ или $-\infty$;*
- *если степени числителя и знаменателя равны ($m=n$), то предел равен конечному числу $\dfrac{a_m}{b_m}$.*

Пример 8.7. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3+3x-5}{4x^3-2x^2+3}$.

Р е ш е н и е: Согласно правилу (8.1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3+3x-5}{4x^3-2x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3}{4x^3}=2.$$

Пример 8.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5-2x^2+3}{2x^4+3x-5}$.

Р е ш е н и е: Согласно правилу (8.1)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^5-2x^2+3}{2x^4+3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^5}{2x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{2}=-\infty.$$

Правило, подобное (8.1), справедливо и для иррациональных выражений.

Пример 8.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2+5x-4}+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{2x^4-3x+2}+2\sqrt[3]{x}}$.

Р е ш е н и е: Так как при $x\to+\infty$ $3\sqrt[3]{x^2+5x-4}\sim3\sqrt[3]{x^2}=3x^{2/3}$, $\sqrt{x}=x^{1/2}$ $\sqrt[6]{2x^4-3x+2}\sim\sqrt[6]{2x^4}=\sqrt[6]{2}x^{2/3}$, $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$. Наивысшая степень x в числителе имеет слагаемое $3\sqrt[3]{x^2+5x-4}\sim3x^{2/3}$, знаменателе $\sqrt[6]{2x^4-3x+2}\sim\sqrt[6]{2}x^{2/3}$, следовательно

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2+5x-4}+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{2x^4-3x+2}+2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{2/3}}{\sqrt[6]{2}x^{2/3}}=\frac{3}{\sqrt[6]{2}}.$$

При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, также часто используют следующие приемы:

- введение новой переменной для получения рационального выражения, если это возможно;
- перевод иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот, при этом используются формулы тождественных преобразований алгебраических выражений:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y\quad(x\geqslant0,y\geqslant0),$$

$$(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y})\cdot(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{x\cdot y}+\sqrt[3]{y^2})=(\sqrt[3]{x})^3\pm(\sqrt[3]{y})^3=$$
$$=x\pm y\quad(x\geqslant0,y\geqslant0).$$

Пример 8.10. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$.

Р е ш е н и е: Здесь неопределенность типа $+\infty - \infty$. Умножим и разделим выражение под пределом на сопряжённое ему выражение $\sqrt{x^2-1}+x$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$$

Пример 8.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

Р е ш е н и е: Опять мы имеем дело с неопределённостью типа $+\infty - \infty$. Устранить эту неопределенность можно, если умножить и разделить исходное выражение на неполный квадрат суммы двух выражений. После этого можно применить формулу разности кубов двух выражений.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-(\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)x}+\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

Если мы применим к примерам 8.10 и 8.11 правило эквивалентности бесконечно больших функций, то получим тот же результат. Однако стоит несколько изменить условия примеров и результат окажется другим.

Пример 8.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x)$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-1}-x)(\sqrt{x^2+3x-1}+x)}{(\sqrt{x^2+3x-1}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-1-x^2}{(\sqrt{x^2+3x-1}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{(\sqrt{x^2+3x-1}+x)} =$$

$$= |\text{Знаменатель} \quad \sqrt{x^2+3x-1}+x \sim 2x| = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Поэтому применять принцип эквивалентности в случае разности бесконечно больших функций $N(x) - M(x)$ можно, если коэффициенты при степенях наивысшего порядка x в $N(x)$ и $M(x)$ не равны, поскольку в противном случае главную роль могут играть слагаемые низшего порядка.

Чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to x_0$ числитель и знаменатель имеют пределы, равные нулю (неопределенность $\frac{0}{0}$), надо числитель и знаменатель дроби разделить на $(x - x_0)$ и перейти к вычислению предела. Если же и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to x_0$, то надо произвести повторное деление на $(x - x_0)$ и т.д., до тех пор, пока не будет получен окончательный результат. В некоторых случаях эту неопределенность можно легко раскрыть, разложив предварительно числитель и знаменатель на сомножители и сократив на $(x - x_0)$.

Пример 8.13. *Найти* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Решение: При подстановке предельного значения аргумента $x = 3$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Разложим выражение в числителе и знаменателе и произведем сокращение на $(x - 3)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = 2.$$

При решении ряда примеров целесообразно использовать понятие эквивалентности бесконечно малых функций.

Пример 8.14. *Найдите* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2+2\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{arctg} 3x+5x^2}$

Решение: Так как при $x \to 0$ $\sin 2x \sim 2x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\operatorname{arctg} 3x \sim 3x$. Имеем, что низший порядок малости по x числителя имеет слагаемое $3\sin 2x$, знаменателя – $\operatorname{arctg} 3x$.Следовательно, согласно теореме 8.3, числитель $5x^2+3\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x \sim 3\sin 2x \sim 6x$, знаменатель $\operatorname{arctg} 3x+$ $+5x^2 \sim \operatorname{arctg} 3x \sim 3x$. И на основании теоремы 8.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{arctg} 3x+5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x}=2.$$

При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=C \tag{8.2}$$

следует иметь в виду, что:

- если существуют конечные пределы $A=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ и $B=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)$, то $C=A^B$;
- если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\pm+\infty$, то вопрос о нахождении предела решается непосредственно подстановкой предельного значения аргумента;
- если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A=1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=+\infty$, то полагают $\varphi(x)=$ $1+$
$+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ и, следовательно,
$C=\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\}^{\alpha(x)\psi(x)}=$
$=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}$, так как в данном случае при $x\to a$ $\lim\limits_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$.

Пример 8.15. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{2x}\right)^{1+x}$.

Р е ш е н и е: Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}=2$ и $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{2x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

Пример 8.16. *Найти* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}\right)^{x+3}$.

Решение: Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{4-\dfrac{3}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{4x^2-3}\right)^{x+3}=(\frac{1}{4})^{+\infty}=\frac{1}{4^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Пример 8.17. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

Решение: Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+8}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, т.е. имеет место неопределенность $1^{+\infty}$. Произведя указанные выше преобразования ($\varphi(x)=1+\alpha(x)$), получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{x+8}{x-2}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{10}{x-2}\right)\right]^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{10}{x-2}\right]^{\dfrac{x-2}{10}}\right\}^{\dfrac{10}{x-2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x}{x-2}}=e^{10}.$$

В данном случае, не прибегая к общему приему, можно найти предел проще:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{\dfrac{x}{8}}\right]^8}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\left\{\dfrac{-2}{x}\right\}\right)^{-\dfrac{x}{2}}\right]^{-2}}=e^{10}.$$

В дальнейшем полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$, или в более общем виде

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x^m}\right)^{bx^n} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x^m}\right)^{\frac{x^m}{a}}\right)^{\frac{a}{x^m}bx^n} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} abx^{n-m}} = \tag{8.3}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & n>m; ab>0 \\ 0, & n>m, ab<0 \\ e^{ab}, & n=m; \\ 1, & n<m. \end{cases}$$

Практическое занятие 8. Теория пределов (продолжение)

ПРИМЕР 8.1. *Сравнить бесконечно малые величины* $\alpha(t) = t\cdot\sin^2 t$ *и* $\beta(t) = 2t\cdot\sin t$ *при* $t\to 0$.

Р е ш е н и е: Найдем отношение бесконечно малых функций

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\sin^2 t}{2t\cdot\sin t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\sin t = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0,$$

т.е. α есть бесконечно малая более высокого порядка чем β.

ПРИМЕР 8.2. *Найти* $\lim\limits_{x\to 4}(5x+2)$.

Р е ш е н и е: В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в выражение предельного значения аргумента. Так как при $x\to 4 \longrightarrow 5x+2 = 22$, то в результате

$$\lim_{x\to 4}(5x+2) = 22.$$

При отыскании предела отношения двух целых многочленов $\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$ при $x\to+\infty$, т.е. когда имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, оба члена отношения рекомендуется предварительно разделить на x^n, где n – наивысшая степень этих многочленов, или воспользоваться правилом (8.1).

ПРИМЕР 8.3. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-4}{4x+2}$.

Р е ш е н и е: При $x \to +\infty$ числитель и знаменатель исследуемой дроби неограниченно возрастают.В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x одновременно числитель и знаменатель дроби, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5x-4}{x}}{\dfrac{4x+2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{4}{x}}{4+\dfrac{2}{x}}=\frac{5}{4},$$

так как при $x \to +\infty$ каждая из дробей $\dfrac{4}{x}$ и $\dfrac{2}{x}$ стремится к нулю.

По правилу (8.1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-4}{4x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x}{4x}=\dfrac{5}{4}$.

Пример 8.4. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3}$.

Р е ш е н и е: При $x \to +\infty$ мы имеем дело с неопределённостью типа $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим на x^2 одновременно числитель и знаменатель дроби, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+1}{2x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2}}{\dfrac{2x^2+3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{3}{2},$$

так как при $x \to +\infty$ каждая из дробей $\dfrac{2}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{3}{x^2} \to 0$.

По правилу (8.1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2}=\dfrac{3}{2}$.

Пример 8.5. *Найти* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x}{6x+7}$.

Р е ш е н и е: Поскольку при $x \to -\infty$ опять имеем дело с неопределённостью $\dfrac{\infty}{\infty}$, при исследовании предела отношения двух многочленов воспользуемся предложенной выше рекомендацией. Старшая степень рассматриваемых многочленов равна 2, поэтому разделим числитель и знаменатель дроби на x^2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{6x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}{\dfrac{6x+7}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{6}{x}+\dfrac{7}{x^2}}=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

По правилу (8.1)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{6x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=-\infty$$

Пример 8.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{\sqrt{4x^4+5}}$.

Р е ш е н и е: В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. В соответствии с рекомендацией разделим числитель и знаменатель на x^n, где n – старшая степень многочленов. Учитывая, что в знаменателе x^4 стоит под квадратным корнем, делим все на x^2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{\sqrt{4x^4+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5x^2-3x+4}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{4x^4+5}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^4}}}=$$

$$=\frac{5-0+0}{\sqrt{4+0}}=\frac{5}{2}.$$

Для решения этого примера можно воспользоваться правилом эквивалентности бесконечно больших величин $\sqrt{4x^4+5}\sim\sqrt{4x^4}=2x^2$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{\sqrt{4x^4+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{2x^2}=\frac{5}{2}.$$

Предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ целые многочлены и хотя бы один из них в точке $a\neq 0$ находится непосредственной подстановкой в функцию предельного значения аргумента $x=a$. Если же $P(a)=Q(a)=0$ и имеет место неопределенность $\dfrac{0}{0}$, то дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ рекомендуется сократить один или несколько раз на разность $(x-a)$.

Пример 8.7. *Найти* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

Р е ш е н и е: При подстановке $x=-1$ в числитель имеем $x^3+1=$ $=-1^3+1=-1+1=0$. При подстановке $x=-1$ в знаменатель – $x^2+1=-1^2+1=1+1=2$. Следовательно,

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Пример 8.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Р е ш е н и е: При подстановке $x = 2$ имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на сомножители и произведем необходимые сокращения. В результате получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4.$$

Выражения, содержащие иррациональность, приводятся к рациональному виду во многих случаях путём введения новой переменной.

Пример 8.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Р е ш е н и е: При подстановке $x = 0$ имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Обозначим $1+x=y^6$ для того, чтобы при извлечении квадратного и кубического корней получить целые степени. Учитывая, что при $x\to 0$, $y\to 1$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y^6}-1}{\sqrt[3]{y^6}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}.$$

Прием нахождения последнего предела аналогичен тому, который мы использовали при решении примера 8.8. Для раскрытия неопределённости $\dfrac{0}{0}$ (при $y = 1$) разложим на множители числитель и знаменатель, произведем необходимые сокращения и в результате получим

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=$$
$$=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Другим приемом нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель. При этом используются формулы тождественных преобразований алгебраических выражений:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y \qquad (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$$

$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})(\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) = (\sqrt[3]{x})^3 \pm (\sqrt[3]{y})^3 = x \pm y \ (x \geqslant 0, y \geqslant 0).$

ПРИМЕР 8.10. *Найти* $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$.

Р е ш е н и е: При $x \to +\infty$ мы имеем неопределенность вида $+\infty - \infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под пределом, на выражение, ему сопряжённое (на сумму таких же слагаемых). В данном случае на $(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)$. После элементарных преобразований получим:

$$\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6 - 5x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}.$$

Очевидно, что при $x \to +\infty$ последний предел приводится к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель одновременно на x^n, где n – старшая степень многочленов. В данном случае на x.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6 - 5x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{6 - 5x}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{6}{x} - 5}{\sqrt{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}} + 1} =$$

$$= \frac{0 - 5}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = \frac{-5}{\sqrt{1} + 1} = \frac{-5}{1 + 1} = -\frac{5}{2}.$$

ПРИМЕР 8.11. *Найти* $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - \sqrt[3]{x^3 + 8x^2})$.

Р е ш е н и е: В данном примере при $x \to +\infty$ имеем неопределенность вида $+\infty - \infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на неполный квадрат суммы слагаемых, чтобы в итоге получить в числителе формулу разности кубов двух чисел:

$$\lim_{x \to +\infty}(x - \sqrt[3]{x^3 + 8x^2}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - \sqrt[3]{x^3+8x^2})(x^2 + x\sqrt[3]{x^3+8x^2} + \sqrt[3]{(x^3+8x^2)^2})}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+8x^2} + \sqrt[3]{(x^3+8x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - (\sqrt[3]{x^3+8x^2})^3}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+8x^2} + \sqrt[3]{(x^3+8x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - (x^3+8x^2)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+8x^2} + \sqrt[3]{(x^3+8x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-8x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+8x^2} + \sqrt[3]{(x^3+8x^2)^2}} =$$

$$= -8 \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2(1 + \sqrt[3]{1+\frac{8}{x}} + \sqrt[3]{(1+\frac{8}{x})^2})} =$$

$$= -8 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1+\frac{8}{x}} + \sqrt[3]{(1+\frac{8}{x})^2}} = -8\cdot\frac{1}{1+1+1} = -\frac{8}{3}.$$

Пример 8.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

Р е ш е н и е: При $x = 4$ имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность следующим образом: числитель умножим и разделим на выражение, сопряжённое числителю $\to (3 + \sqrt{5+x})$, а знаменатель – на выражение, сопряжённое знаменателю $\to (1 + \sqrt{5-x})$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})\cdot\dfrac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}}{(1-\sqrt{5-x})\cdot\dfrac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(9-(\sqrt{5+x})^2)(1+\sqrt{5-x})}{(1-(\sqrt{5-x})^2)(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(9-(5+x))(1+\sqrt{5-x})}{(1-(5-x))(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(9-5-x))(1+\sqrt{5-x})}{(1-5+x))(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x))(1+\sqrt{5-x})}{(-4+x))(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$=-1\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}=-1\cdot\frac{1+1}{3+3}=-1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

При нахождении пределов от разности двух дробей, когда имеет место неопределенность вида $+\infty-\infty$, рекомендуется предварительно привести дроби к общему знаменателю.

Пример 8.13. *Найти* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Р е ш е н и е: При $x=3$ имеем дело с неопределённостью вида $+\infty-\infty$. Воспользуемся рекомендацией и приведем дробь к общему знаменателю. После элементарных преобразований получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x+3-6}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Рассмотрим ещё раз некоторые примеры предыдущего практического занятия и используем для их решения понятие эквивалентности бесконечно малых величин и теорему 8.1.

Пример 7.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Р е ш е н и е: Так как $\sin 5x \sim 5x$ при $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x} = 5$$

Пример 7.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Р е ш е н и е: Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ при $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

Пример 7.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Р е ш е н и е:

$$1-\cos 5x = 2\sin^2\frac{5x}{2} \sim 2\left(\frac{5x}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{25x^2}{4} = \frac{25x^2}{2}$$

при $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{25}{2}x^2}{x^2} = \frac{25}{2}.$$

Самостоятельная работа

Сравнить бесконечно малые величины:

Пример 8.14. $\alpha = t^2 \operatorname{tg} t$ *и* $\beta = t^2\sin^2 t$ *при* $t \to 0$.

Пример 8.15. $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ *и* $\beta = 3t^2 + 2t^3$ *при* $t \to 0$.

Найти пределы функций:

Пример 8.16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

Пример 8.17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$.

Пример 8.18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^3-2x^2}{3x^3-5}$.

Пример 8.19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$.

Пример 8.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Пример 8.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.

Пример 8.22. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$.

Пример 8.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Пример 8.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

Пример 8.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Пример 8.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

Пример 8.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Пример 8.28. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

Пример 8.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Пример 8.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Пример 8.31. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

Пример 8.32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Решите примеры из предыдущего практического занятия 7.33, 7.34, 7.36, 7.37, 7.38 с использованием понятия эквивалентности бесконечно малых величин.

Лекция 9. Непрерывность функции

Непрерывные функции, действия над непрерывными функциями, точки разрыва и их классификация, свойства функций, непрерывных на сегменте.

9.1. Непрерывные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:*

- *функция определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности, содержащей эту точку;*
- *функция имеет предел при $x \to x_0$;*
- *предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9.1}$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется точкой непрерывности функции.

ПРИМЕР 9.1. *Исследовать на непрерывность функцию $y = e^x$ в точке $x = 1$.*

Р е ш е н и е: Чтобы доказать, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке $x = 1$, необходимо проверить выполнение трёх следующих условий (определение непрерывности):

- функция $y = e^x$ определена в точке $x = 1 \Rightarrow f(1) = e$;
- существует $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e$;
- этот предел равен значению функции в точке $x = 1:$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = e.$$

Таким образом, доказано, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке $x = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. *Формулу (9.1) можно записать в виде*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x), \tag{9.2}$$

так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

Введем понятие непрерывности функции в точке x_0 справа и слева. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0 слева. Аналогично определяется непрерывность функции справа.

Так как $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то условие (9.1) равносильно следующему:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x-x_0\to 0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Определение 9.2. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \tag{9.3}$$

Пример 9.2. *Показать, что функция $y = x^3$ непрерывна для любого значения аргумента x.*

Р е ш е н и е: Найдем приращение функции Δy.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функции, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) = 0.$$

Следовательно, функция $y = x^3$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

9.2. Действия над непрерывными функциями

Теорема 9.1. *(Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций.) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, знаменатель в рассматриваемой точке не равен нулю, то частное непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Докажем непрерывность произведения.

Дано: непрерывность функций в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \psi(x_0).$$

Доказать, что $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ есть функция непрерывная в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Доказательство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\psi(x) =$$

$$= \varphi(x_0)\cdot\psi(x_0) = f(x_0).$$

Можно строго доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Например, степенная $y = x^n$, показательная $y = a^x$, тригонометрические $y = \sin x$ и $y = \cos x$ функции непрерывны на всей числовой оси $(x \in R)$, логарифмическая функция $y = \log_a x$ непрерывна при $x > 0$, а тригонометрическая $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$ и терпит разрыв II рода в точках $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; ...)$.

Теорема 9.2. *(Непрерывность сложной функции.) Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Без доказательства.

Отсюда следует, что *элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены. И, следовательно, при исследовании на непрерывность элементарных функций, необходимо исследовать поведение функции лишь в окрестности точек*, в которых они неопределены.

В заключение этого раздела рассмотрим два предела, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пример 9.3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Р е ш е н и е: Заметим, что при $x \to 0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Выполним преобразование

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\log_a\Big(1+x\Big)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как данная логарифмическая функция непрерывна в окрестности точки $x = 0$, то можно перейти к пределу под знаком функции

$(\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_o} x))$.

$$\lim_{x\to 0} \log_a \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right],$$

но $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \tag{9.4}$$

В частности, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1. \tag{9.5}$$

Таким образом, $y = \ln(1+x)$ и $y = x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$. (9.5) принято называть третьим замечательным пределом.

Пример 9.4. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$. Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $a^x - 1 = t$. Тогда $x = \log_a(t+1)$. При $x \to 0$ также и $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\dfrac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\log_a(t+1)}{t}}.$$

Так как на основании результата, полученного в предыдущем примере, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \tag{9.6}$$

В частности, если $a = e$, имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1,$$

т.е. $y = e^x - 1$ и $y = x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$.

9.3. Точки разрыва функции и их классификация

Примеры исследования функции на непрерывность и построение графиков.

Определение 9.3. *Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если она принадлежит области определения функции или её границе и не является точкой непрерывности.*

Так, например, функция $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (рис. 88) терпит разрыв при $x = 1$. Эта функция не определена в точке $x = 1$, и не существует предела функции в этой точке.

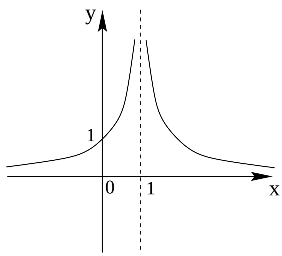


Рис. 88. *График функции* $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Определение 9.4. *Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется точкой устранимого разрыва, если существуют оба односторонних предела в точке x_0 и они равны, т. е.* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Пример 9.5. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Р е ш е н и е: Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, так как при $x \to 0$ существуют пределы справа и слева и они равны:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 1$, то получим уже непрерывную функцию, определённую так:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0; \; f(0) = 1.$$

Доопределив функцию в точке $x = 0$, мы устранили разрыв.

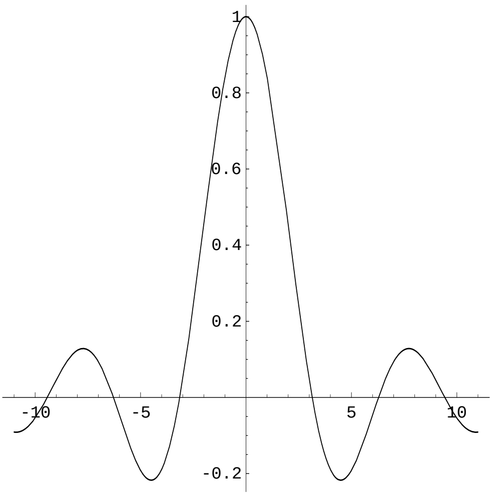


Рис. 89. *График функции* $\dfrac{\sin x}{x}$

Определение 9.5. *Если в точке x_0 односторонние пределы слева и справа существуют, но не равны, точка x_0 называется точкой разрыва I рода.*

Пример 9.6. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$

Р е ш е н и е: В точке $x = 0$ функция терпит разрыв I-го рода, так как односторонние пределы существуют в этой точке, но не равны:

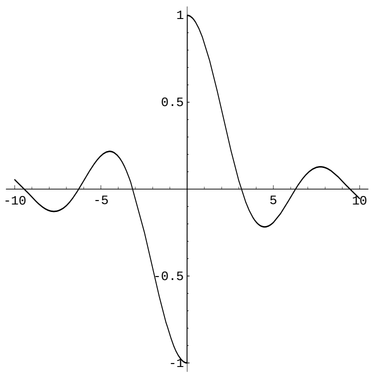


Рис. 90. *График функции* $\dfrac{\sin x}{|x|}$

предел слева $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$,

предел справа $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Определение 9.6. *Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода.*

В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов. Функция $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, представленная на рис. 88, не имеет ни левого, ни правого конечного предела в точке $x=1$. Следовательно, для данной функции $x=1$ является точкой разрыва II рода.

Пример 9.7. *Исследовать на непрерывность функцию* $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е: Функция $y=\sin\dfrac{1}{x}$ определена для всех значений x, кроме $x=0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x=0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x\to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin\dfrac{1}{x}$, колеблясь между -1 и 1, не приближается ни к какому числовому значению. График её приведен на рис. 91.

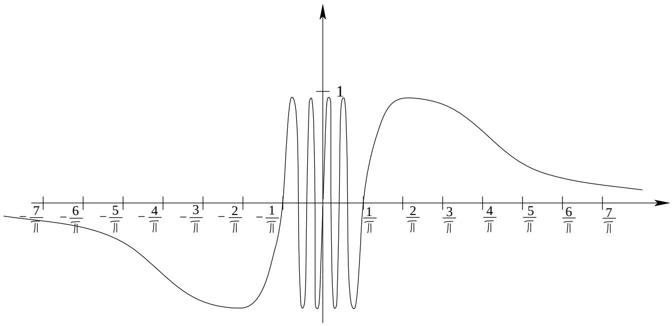


Рис. 91. *График функции* $y = \sin\frac{1}{x}$, $y = 0$ *в точках* $x = \pm\dfrac{1}{k\pi}$, $k \in N$

9.4. Свойства функций, непрерывных на сегменте

Определение 9.7. *Функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента (в точках* a *и* b*) непрерывна соответственно справа и слева.*

Теорема 9.3. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то она достигает на этом сегменте своего наибольшего и(или) наименьшего значения.*

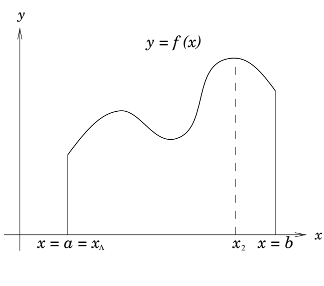


Рис. 92. *Геометрическая иллюстрация условий теоремы 9.3*

Простым доказательством этой теоремы является геометрическая иллюстрация функции $y = f(x)$ на рисунке 92. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция достигает наименьшего своего значения в точке $x = x_1 = a$, а наибольшего значения в точке x_2.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Действительно, если по теореме 9.3 функция достигает на сегменте наибольшего M и наименьшего m значений, то имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех значений функции на рассматриваемом сегменте. Т. е. $|f(x)| \leqslant M$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.

Теорема 9.4. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на её концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой функция равна нулю.*

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции $y = f(x)$, соответствующие концам сегмента $[a, b]$, лежат по разные стороны от оси OX, то этот график хотя бы в одной точке сегмента пересекает ось OX. На данном рисунке 93 это три точки x_1, x_2, x_3.

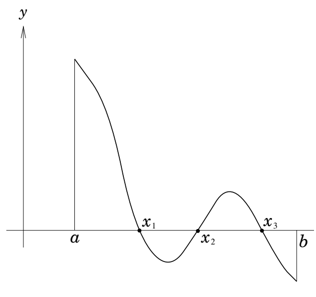


Рис. 93. *Геометрическая иллюстрация условий теоремы 9.4*

Теорема 9.5. *(О промежуточных значениях функции.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то* *для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри этого сегмента такая точка c, что $f(c) = C$.*

Из графика на рисунке 94 видно, что непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

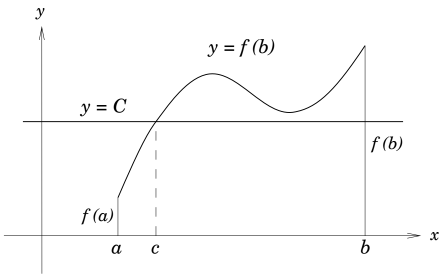


Рис. 94. *Геометрическая иллюстрация условий теоремы 9.5*

Теорема 9.6. *(О непрерывности обратной функции.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и возрастает (убывает) на этом сегменте, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на соответствующем сегменте оси OY существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.*

Эту теорему мы принимаем без доказательства.

Практическое занятие 9. Непрерывность функции

Пример 9.1. *Исследовать на непрерывность функцию*

$$y = \frac{1 + x^3}{1 + x}.$$

Р е ш е н и е: В точке $x = -1$ функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. В других точках дробь можно сократить на $(1 + x)$, так как в них $1 + x \neq 0$. Легко видеть, что односторонние пределы слева и справа в точке $x = -1$ равны между собой и их можно вычислить:

$$\lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} \frac{1+x^3}{1+x} =$$

$$= \lim_{x\to -1+0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \lim_{x\to -1+0}(1-x+x^2) = 1+1+1 = 3.$$

Таким образом, при $x = -1$ данная функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если положить, что при $x=-1 \Rightarrow y = \dfrac{1+x^3}{1+x} = 3$.

Пример 9.2. *Исследовать на непрерывность функцию*

$$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-4} \qquad (\textit{рис. } 95).$$

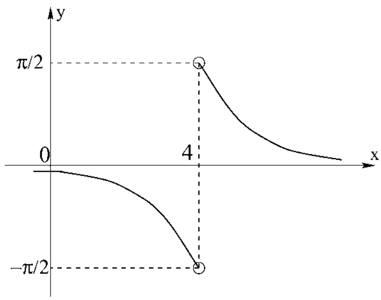


Рис. 95. *График функции* $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$

Решение: Вычислим односторонние пределы функции в точке её разрыва $x = 4$.

Предел слева – $\lim\limits_{x\to 4-0}(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Предел справа – $\lim\limits_{x\to 4+0}(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$.

Пределы слева и справа существуют, но не равны, следовательно, точка $x = 4$ для данной функции – точка разрыва I рода.

Пример 9.3. *Показать, что функция $y = 4x^2$ непрерывна в точке* $x = 2$.

Р е ш е н и е: Для этого необходимо показать, что в точке $x = 2$ выполняется все три условия непрерывности функции:

1) функция $y = 4x^2$ определена в точке $x = 2 \Rightarrow f(2) = 16$;
2) существует $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 4x^2 = 16$;
3) этот предел равен значению функции в точке $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 16.$$

Пример 9.4. *Показать, что функция $y = \sin x$ непрерывна для любого значения аргумента x.*

Р е ш е н и е: Найдем приращение функции Δy, используя формулы тригонометрических тождеств

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1$, а $\left|\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$, то при любом x имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 1\cdot\cos x\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, функция $y = \sin x$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

Пример 9.5. *Исследовать на непрерывность функцию*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \textit{если } 0 \leqslant x \leqslant 3,\\ 3 - x, & \textit{если } 3 < x \leqslant 4.\end{cases}$$

Р е ш е н и е: Эта функция (рис. 96) определена во всех точках сегмента [0,4] и её значение при $x = 3 \Rightarrow y = 2$. Функция терпит разрыв, так как она не имеет предела при $x \to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = 0.$$

Следовательно, точка $x = 3$ – точка разрыва первого рода. При этом в граничных точках исследуемого сегмента $[0, 4]$ функция $f(x)$ непрерывна справа $(x = 0)$ и непрерывна слева $(x = 4)$.

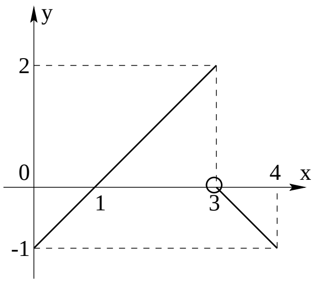


Рис. 96. *График функции примера 9.5*

Пример 9.6. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$.

Р е ш е н и е: В точке $x = 5$ функция не определена, т.к., выполнив подстановку, получаем неопределенность вида 0/0. Легко доказать, что

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Следовательно, точка $x = 5$ – точка устранимого разрыва.

Пример 9.7. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Р е ш е н и е: В точке $x = 0$ функция (рис. 97) терпит разрыв, так как она не определена в этой точке. Пределы функции слева и справа от точки $x = 0$ равны $+\infty$. Следовательно, точка $x = 0$ для данной функции является точкой разрыва второго рода.

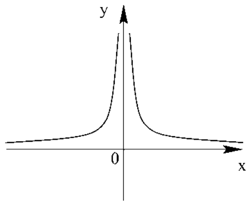


Рис. 97. *График функции* $y = \dfrac{1}{x^2}$

Самостоятельная работа

Пример 9.8. *Показать, что функция* $y=\ln x$ *непрерывна в точке* $x=e$.

Пример 9.9. *Показать, что функция* $y = \cos x$ *непрерывна для любого значения аргумента* x.

Пример 9.10. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \dfrac{x}{|x|}$.

Пример 9.11. *Исследовать на непрерывность функцию*
$y = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}$.

Пример 9.12. *Исследовать на непрерывность функцию*
$y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$.

Пример 9.13. *Исследовать на непрерывность функцию*
$y = \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Пример 9.14. *Исследовать на непрерывность функцию*

$y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Пример 9.15. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x$.

Лекция 10. Числовые ряды. Определения и свойства

Основные определения, простейшие свойства числовых рядов, необходимый признак сходимости ряда.

10.1. Основные определения

Определение 10.1. *Числовым рядом называется сумма членов бесконечной числовой последовательности:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{10.1}$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда. Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Приведем несколько примеров рядов:

1) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$ $\quad u_n = \frac{1}{n};$
2) $2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + \dots,$ $\quad u_n = 2 \cdot 3^{n-1};$
3) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots,$ $\quad u_n = (-1)^{n-1};$
4) $\cos\frac{\pi}{1} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} + \dots + \cos\frac{\pi}{n} + \dots,$ $\quad u_n = \cos\frac{\pi}{n}.$

Определение 10.2. *Сумма S_n первых n членов ряда называется n-й частичной суммой ряда:*

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{10.2}$$

Иногда, исследуя частичную сумму ряда, можно сделать вывод о характере поведения самого ряда.

Пример 10.1. *Исследовать частичную сумму ряда:*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Составим последовательность частичных сумм S_n этого ряда. Для этого прежде всего заметим, что общий член ряда можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}.$$

Подобным же образом найдем, что

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм этого ряда равен единице:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$$

Пример 10.2. *Исследовать частичную сумму ряда:*

$$2 + 6 + 18 + \dots + 2\cdot 3^{n-1} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Найдем последовательность его частичных сумм:

$$S_1 = 2, S_2 = 2 + 6 = 8,$$

$$S_3 = 2 + 6 + 18 = 26, \dots,$$

$$S_n = 2 + 6 + 18 + \dots + 2\cdot 3^{n-1}.$$

Эти частичные суммы можно переписать следующим образом:

$$S_1 = 2 = 3 - 1, S_2 = 8 = 3^2 - 1, S_3 = 26 = 3^3 - 1, \dots, S_n = 3^n - 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(3^n - 1) = +\infty.$$

Пример 10.3. *Исследовать частичную сумму ряда:*

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Последовательность частичных сумм имеет вид

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots.$$

В этом примере последовательность частичных сумм не стремится ни к какому пределу.

Таким образом, для некоторых рядов последовательность частичных сумм стремится к определённому пределу, для других же рядов такой предел не существует.

Определение 10.3. *Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм S_n при неограниченном возрастании номера n, т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S. \tag{10.3}$$

Определение 10.4. *Предел S последовательности частичных сумм сходящегося ряда называется суммой ряда.*

Если S является суммой сходящегося ряда $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\ldots$, то пишут:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{10.4}$$

Если последовательность частичных сумм ряда не имеет предела, то ряд называется расходящимся. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Одним из простейших, но очень часто встречающихся рядов является геометрическая прогрессия (лекция 6):

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} + \ldots; \tag{10.5}$$

b_1 называется первым членом прогрессии, а множитель q – знаменателем прогрессии.

Сумма n первых членов (n-я частичная сумма) прогрессии, как известно, может быть вычислена при $q \neq 1$ по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}.$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1}{1-q} - \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия является сходящимся рядом, сумма которого $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = +\infty.$$

Следовательно, в этом случае ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (10.5) принимает вид

$$b_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_1 + \ldots .$$

Для него $S_n = nb_1$ и при $b_1 \neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, т.е. ряд расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (10.5) принимает вид

$$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \ldots .$$

В этом случае $S_n = 0$ при n чётном и $S_n = b_1$ при n нечётном. Следовательно, при $b_1 \neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Итак, геометрическая прогрессия является сходящимся рядом при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geqslant 1$.

10.2. Простейшие свойства числовых рядов

Рассмотрим несколько свойств числовых рядов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 10.1. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots \tag{10.6}$$

сходится и имеет сумму S, то ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \cdots + au_n + \ldots, \tag{10.7}$$

где a – заданное число, также сходится и его сумма равна aS.

Доказательство. Пусть S_n есть n-я частичная сумма ряда (10.6), а σ_n есть n-я частичная сумма ряда (10.7). Тогда

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + au_3 + \cdots + au_n = a(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) = aS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} aS_n = a \lim_{n\to+\infty} S_n = aS.$$

Таким образом, ряд (10.7) сходится и имеет сумму aS.

Теорема 10.2. *Если ряды*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \tag{10.8}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \tag{10.9}$$

сходятся и имеют соответственно сумму S и $\bar{S}$, то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots + (u_n + v_n) + \dots, \tag{10.10}$$

получающийся почленным сложением данных рядов, также сходится и имеет сумму $S + \bar{S}$.

Доказательство. Обозначим n-е частичные суммы рядов (10.8), (10.9) и (10.10) соответственно через S_n, $\bar{S}_n$ и σ_n. Имеем:

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots + (u_n + v_n) = S_n + \bar{S}_n.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n + \bar{S}_n) = \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} \bar{S}_n = S + \bar{S}.$$

Итак, ряд (10.10) сходится. Ряд (10.10) называется суммой рядов (10.8) и (10.9).

Замечание 10.1. *Аналогично можно доказать, что сходится ряд*

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \dots + (u_n - v_n) + \dots \tag{10.11}$$

и его сумма равна $S - \bar{S}$. Ряд (10.11) называется разностью рядов (10.8) и (10.9).

Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots \tag{10.12}$$

и

$$u_{k+1} + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots. \tag{10.13}$$

Теорема 10.3. *Если сходится данный ряд (10.12), то сходится и ряд (10.13), полученный из ряда (10.12) отбрасыванием конечного числа k его первых членов. Обратно, если сходится ряд (10.13), то сходится и данный ряд (10.12).*

Доказательство. Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (10.12), через S_k – сумму k отброшенных членов ($k < n$) и через σ_{n-k} – сумму $n - k$ первых членов ряда (10.13):

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n,$$

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k, \sigma_{n-k} = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n.$$

Следовательно,

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}, \tag{10.14}$$

причём S_k – некоторое число, не зависящее от n.

1. Пусть ряд (10.12) сходится и имеет сумму S, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Тогда из равенства (10.14) следует:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_k) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_k = S - S_k.$$

Итак, частичные суммы σ_{n-k} ряда (10.13) при $n \to +\infty$ имеют предел, т.е. ряд (10.13) сходится.

2. Пусть ряд (10.13) сходится и имеет сумму σ, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_{n-k} = \sigma$. Из (10.14) следует:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = S_k + \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma,$$

т.е. ряд (10.12) сходится.

Теорему 10.3 можно сформулировать также следующим образом.

На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

10.3. Необходимый признак сходимости ряда

Приведем необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 10.4. *Если ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n.*

Доказательство. Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

имеющий сумму S. Рассмотрим его частичные суммы

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

и

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}.$$

Отсюда $u_n = S_n - S_{n-1}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$, так как при $n \to +\infty$ и $n-1 \to +\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0. \tag{10.15}$$

Теорема 10.5. *(достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n, то ряд расходится.*

Действительно, если бы ряд сходился, то по предыдущей теореме его общий член обязан был бы стремиться к нулю, что противоречит условию.

Пример 10.4. *Исследовать на сходимость ряд.*

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

Р е ш е н и е: Ряд расходится, так как его общий член $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ не стремится к нулю при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1.$$

Условие $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ является необходимым для сходимости ряда, но не достаточным. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Примером может служить ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots. \tag{10.16}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако легко показать, что ряд расходится. Для этого рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{1}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots$, то очевидно, что

$$S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$S_n > n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, т.е. $S_n > \sqrt{n}$. Отсюда непосредственно следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, и, следовательно, ряд расходится.

Практическое занятие 10. Числовые ряды. Основные понятия

Числовые ряды являются одним из важнейших разделов математического анализа. Приступая к практическому изучению рядов, прежде всего следует усвоить понятия сходящегося и расходящегося числового ряда, а затем перейти к изучению признаков (условий) сходимости рядов. Следует понимать и правильно применять необходимые и достаточные условия сходимости. Равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, где u_n – общий член ряда, является лишь необходимым условием для сходимости ряда. Если это условие не выполняется, то исследуемый ряд расходится, а если это условие выполняется, то окончательно ответить на вопрос о сходимости числового ряда можно только после исследования его с помощью одного из достаточных признаков сходимости.

Пример 10.1. *Дан общий член ряда* $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$. *Записать первые четыре члена ряда.*

Р е ш е н и е: В числителе записан общий член геометрической прогрессии, знаменатель которой q=2. В знаменателе мы имеем дело с факториалом n! произвольного целого числа n⩾0, который определяется формулами: 0!=1, 1!=1, 2!=1·2, 3!=1·2·3, n!=1·2·3·...·n. Следовательно, ряд можно записать в виде:

$$\frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{n!} + \cdots .$$

Пример 10.2. *Найти общий член ряда*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: Как и в случае с общим членом последовательности, здесь необходимо установить закономерность изменения каждого члена ряда от его номера n. В данном случае изменяются только знаменатели, которые образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7,... Известно, что n-й член арифметической прогрессии можно найти по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$. Здесь $a_1 = 1, d = 2$, поэтому $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. Следовательно, общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

Пример 10.3. *Найти общий член ряда*

$$1 + \frac{1\cdot 4}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 16}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: В числителе сомножители образуют последовательность с общим членом n^2. В знаменателе каждый член ряда представляет собой произведение нескольких первых членов арифметической прогрессии ($a_1 = 1, d = 3$). В соответствии с формулой общего члена арифметической прогрессии (см. предыдущий пример) $a_n = 3n - 2$. Следовательно, общий член ряда $u_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 16\cdot\dots\cdot n^2}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\dots\cdot(3n-2)}$.

Пример 10.4. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{1\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 23} + \frac{1}{23\cdot 34} + \cdots + \frac{1}{(11n-10)\cdot(11n+1)} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: Разложим общий член ряда на сумму двух дробей по методу неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{(11n-10)\cdot(11n+1)} = \frac{A^{\backslash 11n+1}}{11n-10} + \frac{B^{\backslash 11n-10}}{11n+1} =$$

$$= \frac{A(11n+1) + B(11n-10)}{(11n-10)\cdot(11n+1)}.$$

Две дроби равны, если равны их числители и знаменатели, следовательно:

$$1 = A(11n+1) + B(11n-10).$$

$$\begin{array}{l} \text{Полагая n=0, имеем} \\ \text{Полагая n=1, имеем} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A - 10B = 1. \\ 12A + B = 1. \end{array} \right.$$

Решив полученную систему уравнений относительно неизвестных A и B, найдем $A = \dfrac{1}{11}$, $B = -\dfrac{1}{11}$. Общий член ряда можно переписать в виде:

$$u_n = \frac{1}{(11n-10)\cdot(11n+1)} = \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11n-10} - \frac{1}{11n+1}\right).$$

Запишем несколько первых членов ряда:

$$u_1 = \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{12}\right), u_2 = \frac{1}{11}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{23}\right), u_3 = \frac{1}{11}\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{34}\right), \ldots .$$

Следовательно:

$$S_n = \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{23}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{34}\right) + \cdots$$

$$+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11n-10} - \frac{1}{11n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{23} + \frac{1}{23} - \frac{1}{34} + \cdots + \frac{1}{11n-10} - \frac{1}{11n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{11n+1}\right).$$

Итак, $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{11n+1}\right) = \frac{1}{11}$.

Ответ: $S = \frac{1}{11}$.

Пример 10.5. *Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится.*

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{2}$, и поэтому сходится. Найдем сумму ряда:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Пример 10.6. *Исследовать сходимость ряда.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+1}{4n-1}.$$

Р е ш е н и е: Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n+1}{4n-1} = \frac{5}{4} \neq 0.$$

Ответ: Данный ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости.

Самостоятельная работа

Пример 10.7. *Найти общий член ряда*

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots .$$

Пример 10.8. *Найти общий член ряда*

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \cdots .$$

Пример 10.9. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots .$$

Пример 10.10. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots .$$

Пример 10.11. *Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Пример 10.12. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3n-1}.$$

Лекция 11. Знакопостоянные ряды

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Как мы уже знаем, суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Однако нахождение этого предела во многих случаях связано с большими трудностями. В таких случаях сумму ряда находят приближённо, заменяя её частичной суммой S_n с достаточно большим номером n. Но для этого надо быть уверенным, что данный ряд сходится. Сходимость или расходимость ряда во многих случаях удаётся установить с помощью так называемых достаточных признаков. В этом пункте мы рассмотрим достаточные признаки сходимости и расходимости для рядов с положительными членами. Такие ряды называются знакоположительными.

Замечание 11.1. *Все полученные ниже выводы будут справедливы и для рядов с отрицательными членами, т.е. для знакоотрицательных рядов.*

Прежде всего заметим следующее. Так как в знакоположительном ряде все члены положительны,то его частичные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1+u_2$, $S_3 = u_1+u_2+u_3$, $\ldots$, $S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ возрастают с увеличением номера суммы n. Таким образом, частичные суммы ряда образуют возрастающую числовую последовательность

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \ldots.$$

Здесь возможны два случая.

1. Последовательность частичных сумм неограниченна. В этом случае $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ и, следовательно, ряд расходится.

2. Последовательность частичных сумм ограничена, т.е. $S_n < C$ при любом n. В этом случае последовательность частичных сумм имеет предел и, следовательно, ряд сходится.

Таким образом, при доказательстве того, что тот или иной знакоположительный ряд сходится, достаточно установить только ограниченность последовательности его частичных сумм.

Теорема 11.1. *(Первый признак сравнения.) Даны два знакоположительных ряда:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots, \qquad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots . \tag{V}$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда:

$$u_1 \leqslant v_1, u_2 \leqslant v_2, u_3 \leqslant v_3, \dots, u_n \leqslant v_n, \dots, \tag{11.1}$$

и второй ряд сходится. В таком случае первый ряд также сходится, и его сумма не превосходит суммы второго ряда (заключение теоремы остается в силе, если некоторые члены ряда (U) равны нулю).

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно n–е частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \quad \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (11.1) следует, что $S_n \leqslant \sigma_n$. Так как ряд (V) сходится, то существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$. При этом, поскольку члены ряда положительны, очевидно, что $\sigma_n < \sigma$, а следовательно, и $S_n < \sigma$. Таким образом, частичные суммы ряда (U) ограничены и, следовательно, ряд (U) сходится, причем его сумма не превосходит суммы ряда (V), как это следует из неравенства $S_n < \sigma$.

Теорема 11.2. *(Второй признак сравнения.) Даны два знакоположительных ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \tag{U}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots . \tag{V}$$

Пусть члены первого ряда не меньше соответствующих членов второго ряда

$$u_1 \geqslant v_1, u_2 \geqslant v_2, u_3 \geqslant v_3, \dots, u_n \geqslant v_n, \dots, \tag{11.2}$$

и второй ряд расходится. В таком случае первый ряд также расходится.

Доказательство. Обозначим снова через S_n и σ_n соответственно частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (11.2) следует, что $S_n \geqslant \sigma_n$. Так как ряд (V) расходится и его частичные суммы возрастают, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$. В таком случае и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ и, следовательно, ряд (U) расходится.

При исследовании рядов необходимо иметь для сравнения ряды, относительно которых достоверно известно, сходятся они или расходятся.

Геометрическая прогрессия представляет собой ряд, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geqslant 1$.

Во втором семестре в разделе интегральных исчислений будет показано, что ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \tag{11.3}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. При $p = 1$ получается ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \tag{11.4}$$

который называется гармоническим. Ряд (11.3) называется обобщенным гармоническим рядом.

Геометрическая прогрессия, гармонический и обобщенный гармонический ряды очень часто используются при исследовании рядов с помощью признаков сравнения в качестве эталонных рядов.

Пример 11.1. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \dots. \tag{11.5}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots. \tag{11.6}$$

Ряд (11.6) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/2 < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (11.5) не превосходят соответствующих членов ряда (11.6), то по первому признаку сравнения ряд (11.5) также сходится.

Пример 11.2. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} + \dots. \tag{11.7}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots, \tag{11.8}$$

который расходится. Так как каждый член ряда (11.7) больше соответствующего члена ряда (11.8):

$$\ln n < n, \sqrt{\ln n} < \sqrt{n}, \frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

то в силу второго признака сравнения ряд (11.7) также расходится.

Во многих примерах оказывается целесообразным использовать ещё один признак сравнения.

Теорема 11.3. *(Признак «подобия» рядов) Если существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = k$, *то оба исследуемых ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся, т.е. ведут себя при* $n \to +\infty$ *подобным образом. Такие ряды назовем «подобными».*

Пример 11.3. *Исследовать на сходимость ряд:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots . \tag{11.9}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим вспомогательный ряд с n-ым членом $v_n = \dfrac{1}{n}$, о котором известно, что он расходится.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2n-1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

На основании признака «подобия» оба ряда ведут себя одинаково и, следовательно, в данном случае расходятся, т.е. ряд (11.9) расходится.

Применение признаков сравнения при исследовании рядов часто бывает затруднительно из-за необходимости составлять вспомогательный ряд. Поэтому часто применяются другие достаточные признаки, которые позволяют по виду самого ряда судить о его сходимости или расходимости.

Теорема 11.4. *(Признак Даламбера [2]). Если для знакоположительного ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{11.10}$$

[2] Ж. Даламбер(1717—1783) – французский математик.

существует предел отношения последующего члена к предыдущему при неограниченном возрастании номера члена n, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho, \tag{11.11}$$

то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится.

Доказательство. а) Пусть $\rho<1$. Покажем, что ряд сходится. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то на основании определения предела последовательности для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех членов ряда, номер которых $n\geqslant N$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho<+\varepsilon,\ \text{или}\ \rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon.$$

Полагая $\rho+\varepsilon=q$, получим $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<q$. Так как ρ по предположению меньше единицы, а ε произвольно мало, то ε можно выбрать настолько малым, чтобы $q=\rho+\varepsilon<1$. Таким образом, для $n\geqslant N$ имеем:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N}<q,\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}<q,\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}}<q,\ldots,$$

т.е.

$$u_{N+1}<u_Nq, u_{N+2}<u_{N+1}q<u_Nq^2, u_{N+3}<u_{N+2}q<u_Nq^3,\ldots.$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots, \tag{11.12}$$

$$u_N+u_Nq+u_Nq^2+u_Nq^3+\ldots. \tag{11.13}$$

Ряд (11.13) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$. Так как члены ряда (11.12) не превосходят соответствующих членов ряда (11.13), то на основании первого признака сравнения ряд (11.12) также сходится.

Но ряд (11.12) получается из данного ряда (11.10) отбрасыванием конечного числа членов $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{N-1}$. Следовательно, по теореме 3 ряд (11.10) также сходится.

б) Пусть теперь $\rho>1$. Покажем, что ряд расходится. Действительно, в этом случае $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$. Отсюда следует, что начиная с достаточно больших значений $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$. Таким образом, члены ряда возрастают с увеличением номера члена n. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, т.е. выполнен достаточный признак расходимости ряда и, следовательно, ряд расходится.

Замечание 11.2. *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, *то ряд также расходится, так как и в этом случае* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *для достаточно больших* n *и, следовательно,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Замечание 11.3. *Подчеркнём ещё раз, что, если расходимость ряда установлена с помощью признака Даламбера, то общий член ряда не стремится к нулю.*

Замечание 11.4. *При* $\rho = 1$ *признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не даёт. Как показывают примеры, в этом случае может иметь место как сходимость, так и расходимость.*

Рассмотрим примеры исследования рядов на сходимость с помощью признака Даламбера.

Пример 11.4. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Находим

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} : \frac{2n-1}{3^n}\right] = \lim_{n-to+\infty} \frac{3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n-1)} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{2+1/n}{2-1/n} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $\rho = 1/3 < 1$ и, следовательно, данный ряд сходится.

Пример 11.5. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Находим

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} : \frac{2^n}{n^4}\right] = \lim_{n-to+\infty} \frac{2^{n+1}n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} =$$

$$= 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+1/n)^4} = 2.$$

Так как $\rho = 2 > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 11.6. *Исследовать на сходимость ряд с общим членом ряда* $u_n = \dfrac{a^n}{n^k}(a > 1, k > 1)$.

Р е ш е н и е: Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} : \frac{a^n}{n^k}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}\cdot n^k}{a^n\cdot(n+1)^k} = a.$$

Так как по условию $a > 1$, можно сделать вывод о том, что ряд $u_n = \dfrac{a^n}{n^k}$ расходится, т.е. показательная функция возрастает быстрее степенной с ростом аргумента.

Рассмотрим теперь два примера рядов, для которых $\rho = 1$, и покажем, что один из этих рядов сходится, а другой расходится.

Пример 11.7. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Р е ш е н и е: Находим по признаку Даламбера

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

На основании признака Даламбера сделать заключение о сходимости или расходимости ряда мы не можем. Однако, как было указано ранее, обобщенный гармонический ряд при $\rho = \dfrac{1}{2} < 1$ расходится (11.3).

В некоторых случаях вопрос о сходимости или расходимости ряда можно исследовать с помощью так называемого «радикального» признака сходимости.

Теорема 11.5. *(Радикальный признак Коши [3].) Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots$$

[3] О.Коши(1789–1857) — французский математик.

существует $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$, *то этот ряд сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$. *В случае, когда* $q = 1$, *вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Пример 11.8. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Р е ш е н и е: Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд сходится.

Следует отметить, что для исследования сходимости знакоположительных рядов существует ещё один достаточный признак сходимости – интегральный признак Коши. Однако к его использованию мы сможем приступить только после изучения интегралов.

Практическое занятие 11. Знакопостоянные ряды

Пример 11.1. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n} + \cdots.$$

Р е ш е н и е: В качестве достаточного признака сходимости используем признак сравнения. Для сравнения используем гармонический ряд с $v_n = \dfrac{1}{n}$. Каждый член ряда u_n больше соответствующего члена ряда v_n $(\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n})$. При $n \to +\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, следовательно, расходится и заданный ряд.

Пример 11.2. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\cdot 2^n - 3}.$$

Р е ш е н и е: Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходиться как геометрическая прогрессия с $q = \frac{1}{2}$. Используя признак «подобия» рядов:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{4\cdot 2^n - 3}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4 - \dfrac{3}{2^n}} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ – есть геометрическая сходящаяся последовательность с $q = \frac{1}{2}$, то и ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\cdot 2^n - 3}$ также сходится.

Пример 11.3. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 - 3n}.$$

Р е ш е н и е: Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, который, согласно (11.3), сходится. Используя признак «подобия», будем иметь

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2n^2 - 3n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 - 3n}$.

Пример 11.4. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е: Для сравнения выбираем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Опять используем признак «подобия».

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{m\to\ 0} \frac{\sin m}{m} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 11.5. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}.$$

Р е ш е н и е: Для исследования сходимости используем признак Даламбера. Запишем $n+1$ член ряда

$$u_{n+1} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)(3(n+1)-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)(4(n+1)-3)} =$$

$$\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)\cdot(4n+1)} = u_n\frac{3n+2}{4n+1}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$. Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 11.6. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}.$$

Р е ш е н и е: Исследуем ряд по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!/e^{n+1}}{n!/e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot e^n}{n!\cdot e^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} = +\infty > 1.$$

Следовательно, на основании признака Даламбера данный ряд расходится.

Пример 11.7. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n.$$

Р е ш е н и е: Здесь удобно применить признак Коши.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд сходится.

Самостоятельная работа

Исследовать сходимость ряда.

Пример 11.8. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Пример 11.9. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$.

Пример 11.10. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$.

Пример 11.11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

Пример 11.12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n}{n!}$.

Пример 11.13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{n/2}}$.

Пример 11.14. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

Лекция 12. Знакопеременные ряды

Знакопеременные ряды, признак Лейбница, достаточный признак сходимости знакопеременных рядов, абсолютная и условная сходимость, остаток ряда и его оценка.

12.1. Знакопеременные ряды

До сих пор мы изучали только ряды, все члены которых были одного знака. Теперь мы перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Такие ряды называются знакопеременными.

В качестве примера знакопеременного ряда приведем ряд

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\dots+(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n^2}+\dots\ .$$

Изучение знакопеременных рядов мы начнём с частного случая – так называемых знакочередующихся рядов, т. е. рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным – положительный.

Обозначая через $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ абсолютные величины членов ряда и считая, что первый член положителен, запишем знакочередующийся ряд следующим образом:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots \ . \tag{12.1}$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости Лейбница[4].

12.2. Признак Лейбница

Теорема 12.1. *Если в знакочередующемся ряде (12.1) абсолютные величины членов убывают:*

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \ldots$$

и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *то ряд сходится, причём его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму чётного числа членов ряда

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает при увеличении m.

Запишем теперь S_{2m}, группируя члены иным образом:

$$u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}].$$

Сумма в квадратной скобке также является положительной. Поэтому $S_{2m} < u_1$ для любого значения m. Таким образом, последовательность чётных частичных сумм S_{2m} возрастает с увеличением m, оставаясь при этом ограниченной. Следовательно, S_{2m} имеет положительный

[4] Г. Лейбниц(1646–1716) – немецкий философ, математик, физик, языковед.

предел $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S$. При этом, так как $S_{2m} < u_1$, то ясно, что $0 < S \leqslant u_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечётного числа членов:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

При $m \to +\infty$ имеем:

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to+\infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to+\infty} S_{2m} + \lim_{m\to+\infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty} u_{2m+1} = 0$.

Таким образом, частичные суммы как чётного, так и нечётного числа членов ряда имеют общий предел S. Это означает, что вообще $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится. При этом, как видно из доказательства, сумма ряда S не превосходит первого члена ряда.

Пример 12.1. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2} - \dots .$$

Р е ш е н и е: Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1)\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \dots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \dots;$$

$$2) \lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится.

12.3. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая знакопеременного ряда. Предположим, что в ряде

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{12.2}$$

числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для таких рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема 12.2. *(достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Если для знакопеременного ряда (12.2)*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \tag{12.3}$$

составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (12.2) и (12.3):

$$\frac{u_1 + |u_1|}{2} + \frac{u_2 + |u_2|}{2} + \dots + \frac{u_n + |u_n|}{2} + \dots .$$

Имеем:

$$\text{при } u_n > 0: \quad |u_n| = u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n|;$$

$$\text{при } u_n < 0: \ |u_n| = -u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{u_n + (-u_n)}{2} = 0.$$

Таким образом, члены этого вспомогательного ряда либо равны членам сходящегося ряда (12.3), либо меньше их. Поэтому он сходится на основании первого признака сравнения.

Умножив все члены сходящегося вспомогательного ряда на $\frac{1}{2}$, получим сходящийся ряд

$$\frac{|u_1|}{2} + \frac{|u_2|}{2} + \dots + \frac{|u_n|}{2} + \dots .$$

Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью этих рядов:

$$\left(\frac{u_1 + |u_1|}{2} - \frac{|u_1|}{2}\right) + \left(\frac{u_2 + |u_2|}{2} - \frac{|u_2|}{2}\right) + \dots + \left(\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right) + \dots .$$

Этот ряд также сходится.

Но ряд (12.2) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2 \cdot \left[\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right] = 2 \cdot \frac{u_n}{2} = u_n.$$

Следовательно, на основании свойств числовых рядов исходный ряд (12.2) также сходится.

Пример 12.2. *Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:*

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots . \tag{12.4}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\,.$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$. Следовательно, на основании доказанного признака сходится и данный знакопеременный ряд.

12.4. Абсолютная и условная сходимость

Признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым. Это значит, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Действительно, рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots, \tag{12.5}$$

который, очевидно, сходится по признаку Лейбница. Между тем, ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда (12.5), является гармоническим и, следовательно, расходится.

Хотя оба рассмотренных выше ряда (12.4) и (12.5) сходятся, однако характер их сходимости различен.

Ряд (12.4) сходится одновременно с рядом, составленным из абсолютных величин его членов, тогда как ряд, составленный из абсолютных величин членов сходящегося ряда (12.5), расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Определение 12.1. *Знакопеременный ряд* $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\ldots$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\ldots$, *составленный из абсолютных величин его членов.*

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Определение 12.2. *Знакопеременный ряд* $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\ldots$ *называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд* $|u_1|+|u_2|+$

$+ |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$, *составленный из абсолютных величин его членов, расходится.*

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можем сказать, что ряд (12.4) является абсолютно сходящимся, а ряд (12.5) — условно сходящимся.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

Это свойство, которое мы приводим без доказательства, формулируется следующим образом.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов. Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.

Наоборот, в неабсолютно сходящемся ряде нельзя переставлять члены, так как в случае их перестановки может изменяться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд.

Говоря о перестановке членов, мы подразумеваем, что меняем местами бесконечное множество членов, так как, переставляя два, три, четыре или любое конечное число членов, мы, очевидно, не изменим суммы ряда.

Рассмотрим в качестве примера условно сходящийся ряд (12.5)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots,$$

сумму которого обозначим через S.

Переставим члены этого ряда, поместив после каждого положительного члена два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots\ . \tag{12.6}$$

Обозначим частичные суммы ряда (12.5) через S_n, а ряда (12.6) – через σ_n. Тогда

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}, \dots;$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \sigma_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24},$$

$$\sigma_9 = \frac{7}{24} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{37}{120}, \ldots.$$

Следовательно, $\sigma_3 = 0,5S_2, \sigma_6 = 0,5S_4, \sigma_9 = 0,5S_6, \ldots$ и вообще, как можно показать, $\sigma_{3m} = 0,5S_{2m}$. Так как $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S$, то $\lim\limits_{m\to+\infty} \sigma_{3m} = 0,5 \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = 0,5S$. Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (12.6) с номерами, кратными трем, имеет своим пределом $0,5S$.

Далее, находим

$$\lim_{m\to+\infty} \sigma_{3m+1} = \lim_{m\to+\infty} \left(\sigma_{3m} + \frac{1}{2m+1}\right) = 0,5S$$

и

$$\lim_{m\to+\infty} \sigma_{3m+2} = \lim_{m\to+\infty} \left(\sigma_{3m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{4m+2}\right) = 0,5S.$$

Итак, мы показали, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$ существует при любом законе стремления n к бесконечности. Это и означает, что ряд (12.6) сходится. При этом его сумма составляет половину суммы ряда (12.5), из которого он получен перестановкой членов.

12.5. Остаток ряда и его оценка

Рассмотрим сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots. \tag{12.7}$$

Как известно, его сумма S является пределом последовательности частичных сумм $S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ при $n \to +\infty$, т.е. $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Поэтому для достаточно больших n имеем приближённое равенство

$$S \approx S_n, \tag{12.8}$$

точность которого возрастает с увеличением n. Для оценки точности приближённого равенства (12.8) введем понятие остатка сходящегося ряда.

Определение 12.3. *Разность между суммой ряда S и его n-й частичной суммой S_n называется n-м остатком сходящегося ряда (12.7).*

Остаток ряда обозначается через r_n:

$$r_n = S - S_n. \qquad (12.9)$$

Как видно из равенства (12.9), остаток ряда представляет собой сумму сходящегося ряда, полученного из данного ряда отбрасыванием n его первых членов:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \ldots.$$

Из определения остатка ряда ясно, что

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$

Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0.$$

Абсолютная погрешность при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n, очевидно, равна модулю остатка ряда:

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n|. \qquad (12.10)$$

Таким образом, если требуется найти сумму ряда с точностью до $\varepsilon > 0$, то надо взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| < \varepsilon$. Однако в большинстве случаев находить остаток r_n точно мы не умеем. Поэтому выясним, как найти номер остатка n, чтобы его модуль не превосходил заданного числа ε.

Теорема 12.3. *(об оценке остатка знакоположительного ряда). Если все члены сходящегося знакоположительного ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots \qquad (12.11)$$

не превосходят соответствующих членов другого сходящегося знакоположительного ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \ldots, \qquad (12.12)$$

то n-й остаток ряда (12.11) не превосходит n-го остатка ряда (12.12).

Доказательство. Обозначим n-е остатки рядов (12.11) и (12.12) через r_n и r'_n:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

$$r'_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots.$$

Каждый из этих остатков является суммой сходящегося знакоположительного ряда.

Так как по условию $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}, u_{n+2} \leqslant v_{n+2}, \ldots$, то на основании первого признака сравнения сумма первого ряда не превосходит суммы второго ряда, т. е. $r_n \leqslant r'_n$.

Если даны два сходящихся ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots, \tag{12.13}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \ldots, \tag{12.14}$$

причём члены ряда (12.14) больше соответствующих членов ряда (12.13), то ряд (12.14) называется *мажорирующим* рядом по отношению к ряду (12.13).

Из предыдущей теоремы следует, что остаток *мажорирующего ряда всегда больше или равен остатку основного ряда.*

Обычно в качестве мажорирующего ряда берут ряд, остаток которого r'_n можно легко вычислить (например, геометрическую прогрессию).

Тогда, по только что доказанной теореме, мы легко оценим остаток r_n данного ряда.

Пример 12.3. *Оценить третий остаток ряда*

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)5^n} + \ldots$$

Р е ш е н и е: Каждый член этого ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \ldots.$$

со знаменателем $q = 1/5$. Следовательно, третий остаток r_3 данного ряда меньше третьего остатка r'_3 этой прогрессии:

$$r_3 < r'_3 = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \cdots = \frac{1/5^4}{1 - 1/5} = \frac{1}{500}.$$

Таким образом, сумма данного ряда отличается от суммы его трёх первых членов меньше, чем на $\dfrac{1}{500}$.

Теорема 12.4. *(об оценке остатка знакопеременного ряда). Пусть дан абсолютно сходящийся знакопеременный ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots. \tag{12.15}$$

Тогда абсолютная величина его n-го остатка не превосходит n-го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда.

Доказательство. Пусть знакопеременный ряд (12.15) сходится абсолютно. Это значит, что сходится и ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \tag{12.16}$$

Рассмотрим n-е остатки рядов (12.15) и (12.16):

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots; r'_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| \dots .$$

При любом p имеем:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \to +\infty$, получим

$$\lim_{p\to+\infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant \lim_{p\to+\infty} |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

или $|r_n| \leqslant r'_n|$, что и требовалось доказать.

Пример 12.4. *Оценить третий остаток r_3 ряда*

$$\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots .$$

Решение: Данный ряд – знакопеременный, так как, например,

$$\sin 1 > 0, \sin 2 > 0, \sin 3 > 0, \sin 4 < 0, \sin 5 < 0, \sin 6 < 0, \sin 7 > 0, \dots .$$

Рассмотрим ряд

$$\left|\frac{\sin 1}{2}\right| + \left|\frac{\sin 2}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3}{2^3}\right| + \dots + \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| + \dots .$$

Так как $\left|\dfrac{\sin n}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, то его члены не превосходят соответствующих членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots .$$

Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Обозначим остатки данного ряда, составленного из абсолютных величин, и геометрической прогрессии соответственно через r_3, r'_3, r''_3, где $|r_3| < r_3' < r_3''$. Таким образом, находим оценку третьего остатка данного ряда:

$$|r_3| < r_3'' = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1/2^4}{1 - 1/2} = \frac{1}{8}.$$

Следствие из теоремы 12.1 (об оценке остатка знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница). Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов ряда.

Пример 12.5. *Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда*

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \cdots.$$

Решение: Данный ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Так как сумма ряда должна быть вычислена с точностью до 0,01, то достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,01$, или

$$\frac{1}{(2n+1)!} \leqslant 0,01.$$

Это неравенство выполняется, начиная с n=2. Таким образом, $S \approx S_2 = \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{3!} \approx 1 - 0,17 = 0,83.$

Практическое занятие 12. Знакопеременные ряды

Пример 12.1. *Исследовать сходимость знакопеременного ряда*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \cdots.$$

Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots.$$

Полученный ряд – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с основанием $q = \dfrac{1}{2} < 1$ и, следовательно, ряд сходится. По признаку сходимости знакопеременных рядов, если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд, причём сходится абсолютно.

Пример 12.2. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+6}.$$

Р е ш е н и е: Знакочередующиеся ряды исследуются на сходимость по признаку Лейбница, который для сходимости ряда требует выполнения двух условий:

- 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ для данного ряда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5n+6} = 0$,
- 2) $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ для данного ряда $\dfrac{1}{11} > \dfrac{1}{16} > \dfrac{1}{21} > \cdots$.

Следовательно, условия признака Лейбница выполняются и ряд сходится. С учётом, того, что ряд, составленный из модулей членов исходного знакочередующегося ряда $u_n = \dfrac{1}{5n+6}$, расходится, знакочередующийся ряд $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{5n+6}$ сходится условно.

Пример 12.3. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{10n+9}.$$

Р е ш е н и е: Для данного ряда не выполняется первое условие признака Лейбница $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Действительно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{10n+9} = $ $= \dfrac{1}{10} \neq 0$. Следовательно, ряд расходится.

Пример 12.4. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\cdot 5\cdot 7 ... (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 ... (3n-1)}.$$

Р е ш е н и е: Исследуем по признаку Даламбера ряд, составленный из модулей членов данного знакочередующегося ряда.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{3\cdot 5\cdot 7 ... (2n+1)\cdot(2n+3)}{2\cdot 5\cdot 8 ... (3n-1)\cdot(3n+2)}}{\dfrac{3\cdot 5\cdot 7 ... (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 ... (3n-1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

По признаку Даламбера ряд из модулей сходится. Значит, сходится абсолютно данный знакочередующийся ряд.

Пример 12.5. *Исследовать сходимость знакопеременного ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}.$$

Р е ш е н и е: При любых значениях n функция $\sin n\alpha$ – функция ограниченная $|\sin n\alpha| \leqslant 1$, поэтому члены данного ряда будут меньше соответствующих членов ряда $v_n = \dfrac{1}{(\ln 10)^n}$, который сходится по признаку Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln 10)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} < 1.$$

Следовательно, по признаку сходимости знакопеременных рядов сходится исследуемый ряд, причем сходится абсолютно.

Пример 12.6. *Сколько членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *необходимо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?*

Р е ш е н и е: По признаку Лейбница данный знакочередующийся ряд сходится, поэтому по теореме об оценке остатка сходящегося знакочередующегося ряда: $\triangle_S = |S - S_n| = |r_n| \leqslant |u_{n+1}| \leqslant 0,001$ или

$$|u_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leqslant 0,001 = \frac{1}{1000} \Rightarrow n+1 \geqslant 1000 \Rightarrow n \geqslant 999.$$

Ответ: n=999.

Самостоятельная работа

Исследовать сходимость знакопеременных рядов

Пример 12.7. $1 - \dfrac{1}{2^4} - \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} - \dfrac{1}{5^4} - \dfrac{1}{6^4} + \cdots.$

Пример 12.8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$

Пример 12.9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{(n^3+1)}.$

Пример 12.10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n+1}{2n+1}\right)^n.$

Пример 12.11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)}{7\cdot9\cdot11...(2n+5)}.$

Пример 12.12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{10^n}\right).$

Пример 12.13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n2^{-n}.$

Пример 12.14. *Сколько членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(2n+1)\cdot5^n}$ *нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?*

Пример 12.15. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos5n}{5^n+1}.$

ГЛАВА IV

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 13. Производная функции. Определение

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Производные некоторых основных элементарных функций.

13.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о касательной. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой окрестности этой точки. Требуется провести в точке $M_0(x_0, y_0)$ касательную к графику функции в предположении, что касательная существует. Понятие касательной интуитивно понятно, однако до сих пор с её определением мы не встречались. Поступим следующим образом. Возьмём на графике функции (рис. 98) ещё одну точку $M(x, y)$ и проведем через точки M_0 и M секущую. Устремим затем точку M к точке M_0, то есть положим, что $x - x_0 = \Delta x \to 0$. Так как точка M_0 неподвижна, то секущая будет поворачиваться вокруг точки M_0 и в пределе займет положение MT.

Определение 13.1. *Касательной к графику функции y=f(x) в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предельное положение секущей M_0M при условии, что точка $M(x, y)$ стремится к $M_0(x_0, y_0)$.*

Очевидно, что угловой коэффициент секущей M_0M $k = \dfrac{MP}{M_0P} = \operatorname{tg}\varphi$ в пределе станет равным угловому коэффициенту касательной.

$$k_T = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{13.1}$$

Зная этот угловой коэффициент и точку $M_0(x_0, y_0)$, можно провести касательную. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ мы получим в лекции 15.

Задача о скорости. Пусть по прямой линии в одном направлении движется материальная точка по закону $s = s(t)$. Ко времени t точка

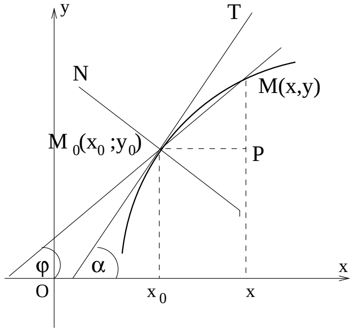


Рис. 98. *К задаче о касательной*

пройдет путь $s(t)$, а ко времени $t+\Delta t$ – путь $s(t+\Delta t)$. Следовательно, за время Δt точка пройдет путь $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$.

Средняя скорость прямолинейного движения $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt определяется отношением

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{13.2}$$

пройденного пути ко времени.

Если считать начальный момент времени t фиксированным, а промежуток Δt – переменным, то средняя скорость будет переменной величиной, зависящей от Δt.

Определение 13.2. *Скоростью v в данный момент времени t называется предел средней скорости v_{cp} при $\Delta t \to 0$, т.е.*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{13.3}$$

Рассмотренные задачи, несмотря на их разное физическое содержание, привели нас к нахождению предела одного и того же вида – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю. К нахождению таких пределов приводят многие задачи в разных областях науки и техники. Поэтому рассмотрим этот алгоритм, отвлекаясь от физической сущности задачи.

13.2. Определение производной

Пусть дана непрерывная в интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$.

Зафиксируем какое-то значение аргумента $x\in(a;b)$. Ему соответствует значение функции $y=f(x)$. Теперь изменим аргумент x на величину Δx (дадим ему приращение Δx.) Тогда величина y получит приращение Δy. Согласно определению непрерывной функции $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Таким образом, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ является неопределённостью типа $\dfrac{0}{0}$.

Пусть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ существует.

Определение 13.3. *Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x\to 0$.*

Производная функции $y=f(x)$ в данной точке x обозначается символом $f'(x)$.

Итак,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{13.4}$$

Наряду с обозначением $f'(x)$ используются и другие обозначения:

$$y',\quad y'(x),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Соответственно, в фиксированной точке x_0 производная обозначается:

$$y'|_{x=x_0}=y'(x_0)=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}=\frac{df(x_0)}{dx}. \tag{13.5}$$

Иногда оказывается целесообразным указывать переменную, по которой берется производная в виде индекса. Например, для функции $y=y(x)$ производная $y'(x)$ обозначается y'_x, а для функции $x=x(y)$ производная $x'(y)$ обозначается x'_y.

Возвращаясь к рассмотренным ранее задачам, можем отметить геометрический и физический смысл производной:

1. Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в данной точке x_0 (13.1).

2. Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть значение производной в этой точке от пути s по времени t (13.3)).

Пример 13.1. *Найти производную $y = x^2$.*

Р е ш е н и е: Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Разделив приращение на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, найдем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x.$$

В общем случае производная является функцией, в конкретной же точке она равна числу. Так, производная функции $y = x^2$ в точке $x = 0,5$ равна единице.

В определении 13.3 подразумевалось, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ существует и не зависит от способа стремления Δx к нулю и, в частности, в фиксированной точке x_0 производная

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Однако можно подходить к точке x_0 слева или справа. Такие способы стремления к x_0 обозначаются соответственно $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$ (лекция 6).

Определение 13.4. *Правосторонней производной (производной справа) функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется величина*

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Левосторонней производной (производной слева) функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется величина

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В соответствии с определением 13.3 производная $f'(x)$ существует в точке x_0, если левосторонняя и правосторонняя производные существуют в этой точке и равны, т.е.:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует или оба они существуют, но не равны, производная $f'(x)$ в точке x_0 терпит разрыв первого или второго рода.

Если пределы равны $+\infty$ или $-\infty$,принято говорить, что функция в точке x_0 имеет бесконечную производную, т.е. соответствующая производная равна $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 13.5. *Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.*

Определение 13.6. *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в интервале $(a; b)$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Если существуют односторонние производные $f'(a + 0)$ и $f'(b - 0)$, то функцию называют дифференцируемой на отрезке $[a; b]$.*

Установим теперь связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Теорема 13.1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*

Доказательство: Пусть в точке x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0,$$

откуда следует непрерывность функции.

Обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках недифференцируемы. Таким образом, непрерывность функции является необходимым, но не достаточным условием её дифференцируемости.

1. Непрерывная на $(-\infty; +\infty)$ функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, так как хотя в этой точке левосторонняя и правосторонняя производные существуют, но они не равны:

$$f'(-0) = -1, \quad f'(+0) = 1.$$

2. Непрерывная на $(-\infty; +\infty)$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной в точке $x = 0$, так как в этой точке производная $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (будет показано в дальнейшем) обращается в бесконечность при любом стремлении Δx к нулю. Поэтому не существует производной ни справа, ни слева.

13.3. Производные некоторых основных элементарных функций

Производная постоянной $y = C$**.** Так как функция $y = C$ сохраняет постоянное значение на всей числовой оси, то в любой точке приращение функции равно нулю. Поэтому

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \tag{13.6}$$

Производная степенной функции $y = x^n$**.** Имеет место формула, вывод которой будет дан в лекции 15.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \tag{13.7}$$

Рекомендуется кроме общей формулы (13.7) запомнить два часто встречающихся частных случая:

$$n = \frac{1}{2}: \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = 1/2 \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{13.8}$$

$$n = -1: \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}. \tag{13.9}$$

Производная показательной функции $y = a^x$**.** Найдем приращение функции

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Тогда на основании рассмотренного в лекции 9 предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

получим

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a. \tag{13.10}$$

В частности, при $a = e$ получим

$$(e^x)' = e^x. \tag{13.11}$$

Производная логарифмической функции $y = \log_a x$

Найдем приращение функции

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Следовательно,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Сделаем следующее тождественное преобразование:

$$\frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\Delta x}}.$$

Устремив $\Delta x \to 0$, на основании рассмотренного в лекции 9 предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a},$$

найдем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{13.12}$$

В частности, при $a = e$ получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{13.13}$$

Производная функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Найдем приращение функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Записав этот предел в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

получим

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (13.14)$$

так как первый сомножитель на основании теоремы о первом замечательном пределе равен единице.

Аналогично можно доказать, что

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (13.15)$$

Практическое занятие 13. Контрольная работа по материалам лекций 7–12

Рассмотрим один из возможных вариантов контрольной работы.

Найти пределы функций и последовательностей

Пример 13.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin 2x}{1-\cos^2 x}$.

Пример 13.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

Пример 13.3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

Пример 13.4 $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{1}{4^{n-1}}\right)$.

Исследовать сходимость рядов

Пример 13.5 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Пример 13.6 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+3)!}$.

Пример 13.7 Дать определение непрерывности функции.

Решение примеров варианта контрольной работы

Пример 13.1. *Найти предел функции*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin 2x}{1-\cos^2 x}$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin 2x}{1-cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\sin x\cos x}{\sin^2 x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x\to 0} \cos x = 4\cdot 1\cdot 1 = 4.$$

Пример 13.2. *Найти предел функции*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9})^2-3^2}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 13.3. *Найти предел функции*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Пример 13.4. *Найти предел последовательности*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

Решение: Слагаемые $1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16}$ образуют бесконечно убывающую прогрессию, знаменатель которой $q=\frac{1}{4}$. Сумма при $n\to+\infty$ такой прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$, следовательно:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Пример 13.5. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1 \neq 0,$$

следовательно ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости рядов.

Пример 13.6. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+3)!}$.

Решение: Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница:

$$\lim_{n\to+\infty} |U_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+3)!} = 0 \text{ и } |U_n| > |U_{n+1}|.$$

Так как знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+3)!}$ также сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+4)!}{1/(n+3)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+4} = 0 < 1,$$

то исследуемый знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 13.7. *Дать определение непрерывности функции*

Решение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки;

2) функция имеет предел при $x \to x_0$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Самостоятельная работа

Найти пределы функций и последовательностей

Пример 13.8. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{8} \cdot \operatorname{tg}^2 \dfrac{5x}{4}$.

Пример 13.9. $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^2-a^2}{a^4-z^4}$.

Пример 13.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x+a}$.

Пример 13.11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$.

Исследовать сходимость рядов

Пример 13.12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{5n-1}}$.

Пример 13.13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+9}}$.

Пример 13.14. *Классификация точек разрыва функции.*

Лекция 14. Правила вычисления производных

Основные правила дифференцирования – производные суммы, произведения, частного. Производная сложной и обратной функции. Таблица производных. Производная элементарной функции.

Основные правила дифференцирования. Находить производные проще не исходя из определения 13.3, а на основании некоторых правил, к рассмотрению которых мы переходим.

14.1. Производная суммы

Теорема 14.1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке, то в этой точке производная их суммы существует и равна сумме производных слагаемых.*

$$(u+v)'=u'+v'. \tag{14.1}$$

Доказательство. Дадим аргументу x функции $y(x)=u(x)+v(x)$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y=(u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))=\Delta u+\Delta v.$$

Следовательно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Теорема доказана. Её легко обобщить для любого конечного числа слагаемых.

14.2. Производная произведения

Теорема 14.2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке, то в этой точке производная их произведения существует и находится по формуле*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u. \tag{14.2}$$

Доказательство. Дадим аргументу x функции $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v.$$

Открыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$\Delta y = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Следовательно,

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}.$$

Разделив числитель на знаменатель, представим последний предел в виде суммы трёх слагаемых:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v \right) = u' \cdot v,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right) = v' \cdot u,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = u' \cdot 0 = 0.$$

В третьем слагаемом

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0,$$

так как из дифференцируемости функции v следует её непрерывность.

Сложив три слагаемые, получим искомую формулу (14.2). Теорема доказана.

Следствие: 14.1. *Постоянный множитель можно выносить за символ производной.*

Действительно, по формуле (14.2) и учитывая (13.6), имеем

$$(c \cdot u(x))' = c' u(x) + c \cdot u'(x) = c \cdot u'(x). \tag{14.3}$$

На основании этого следствия:

$$(u - v)' = u' - v', \text{ так как } (-v)' = -v'.$$

Теорема о производной произведения обобщается на большее (но конечное) число сомножителей, например:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

14.3. Производная частного

Теорема 14.3. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке x, причём $v(x) \neq 0$, то в этой точке производная их частного существует и находится по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \tag{14.4}$$

Доказательство. Дадим аргументу x функции $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Очевидно,

$$u(x + \Delta x) = u + \Delta u; \quad v(x + \Delta x) = v + \Delta v;$$

Поэтому

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Разделив обе части этого равенства на Δx, и учитывая, что при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ (из дифференцируемости функции v следует её непрерывность), получим искомую формулу (14.4). Теорема доказана.

Учитывая, что постоянный множитель можно выносить за символ производной, отметим два частных случая:

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$$

Производная функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Воспользовавшись формулами производных синуса (13.14), косинуса (13.15) и частного (14.4), получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{14.5}$$

Аналогично можно доказать, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{14.6}$$

Иногда, как отмечалось в лекции 3, удобно обозначение функции $y = y(x)$, что мы и используем при доказательстве следующих двух теорем.

14.4. Производная обратной функции

Определение обратной функции и условия её существования даны в лекции 3. Пусть функция $x = x(y)$ монотонна в некотором интервале $(a; b)$ и имеет в некоторой точке y этого интервала производную $x'(y)$, не равную нулю. Покажем, что в соответствующей точке x обратная функция $y = y(x)$ имеет производную $y'(x)$, причём

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{14.7}$$

Так как функция $x = x(y)$ монотонна и дифференцируема (а следовательно, и непрерывна), то функция $y = y(x)$ существует, монотонна и непрерывна. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция $y = y(x)$ получит приращение $\Delta y \neq 0$. Вследствие же непрерывности $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Тогда

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'(y)}.$$

Производные функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$

Функция $x = \sin y$ ($y \in [-\pi/2; \pi/2]$) обратна функции $y = \arcsin x$. Она монотонна в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Её производная

$$x' = \cos y \neq 0 \text{ на этом интервале.}$$

Следовательно, по (14.7):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Но так как $\sin y = x$, то

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{14.8}$$

Аналогично находится производная функции $\operatorname{arctg} x$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = 1 : \frac{1}{\cos^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{14.9}$$

Производные функций $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$

Известны формулы, связывающие в общей области определения обратные тригонометрические функции

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя эти равенства с учётом того, что $(\pi/2)' = 0$, найдем

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{14.10}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{14.11}$$

14.5. Производная сложной функции

Пусть $y = y(u)$ и $u = u(x)$. Тогда y есть сложная функция переменной x, а переменная u – промежуточный аргумент: $y = y(u) = y(u(x))$.

Как найти её производную? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 14.4. *Если функция $u = u(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = y(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u, то сложная функция $y = y(u(x))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по формуле*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{14.12}$$

Доказательство. Дадим x приращение Δx. Тогда u и y получат соответственно приращения Δu и Δy. Предположим, что при $\Delta x \to 0$ приращение Δu не принимает значений, равных нулю.

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как функция $u = u(x)$ дифференцируема, а следовательно, и непрерывна, то при $\Delta x \to 0$ также и $\Delta u \to 0$.

Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

откуда следует искомая формула (14.12). Теорема доказана.

Можно доказать справедливость формулы (14.12) и в случае, когда приращение Δu при $\Delta x \to 0$ принимает значения, равные нулю.

Пример 14.1. *Продифференцируйте функцию $y = \sin^3 x$.*

Р е ш е н и е:

$$y = u^3,\ u = \sin x,\quad y' = (u^3)'_u \cdot (\sin x)'_x = 3u^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Пример 14.2. *Продифференцируйте функцию $y = \sin x^3$.*

Р е ш е н и е:

$$y = \sin u,\ u = x^3,\quad y' = (\sin u)'_u \cdot (x^3)'_x = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Последние две функции – результат суперпозиции (объединения) двух функций. В общем случае сложная функция может быть составлена не из двух функций (звеньев), а из большего их числа. Так, например, функция $y = \sin^5 \sqrt{x}$ состоит из трёх функций. Для нахождения y по данному значению x необходимо совершить три действия:

- найти квадратный корень из x;
- найти значение $\sin \sqrt{x}$;
- найденное значение $\sin \sqrt{x}$ возвести в пятую степень.

В аналогичных случаях необходимо ту величину, над которой производится последнее действие, принять за промежуточный аргумент u. В данном примере – это возведение в пятую степень. Поэтому $u = \sin \sqrt{x}$ и $y = u^5$. Ее производная по формуле (14.12):

$$y'_x = (u^5)'_u \cdot (\sin \sqrt{x})'_x = 5\sin^4 \sqrt{x} \cdot (\sin \sqrt{x})'_x\ .$$

Но функция $\sin\sqrt{x}$ также является сложной и последнее действие в ней – нахождение синуса аргумента x. Применяя опять формулу (14.12) для функции $y = \sin u, \quad u = \sqrt{x}$, найдем

$$(\sin\sqrt{x})'_x = \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .$$

Окончательно получим

$$(\sin^5\sqrt{x})'_x = 5\sin^4\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .$$

При достаточном навыке буква u для промежуточного аргумента опускается. Вот как находятся производные функций, рассмотренных выше

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x(\sin x)' = 3\sin^2 x\cos x \ ,$$

$$(\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = 3x^2\cos x^3.$$

Вот решения ещё нескольких примеров (без тождественных преобразований):

$$(\arcsin 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot 5,$$

$$(\sqrt{\operatorname{arcctg} 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}} \cdot \frac{-1}{1+(3x)^2} \cdot 3,$$

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)' = -\sin\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2},$$

$$\left(2^{\operatorname{tg}\ln x}\right)' = 2^{\operatorname{tg}\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\ln x}\frac{1}{x},$$

$$(\operatorname{ctg}^3\sqrt{2x-x^2})' =$$

$$3\operatorname{ctg}^2\sqrt{2x-x^2} \cdot \frac{-1}{\sin^2\sqrt{2x-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x).$$

При наличии ещё больших навыков в дифференцировании промежуточные выкладки опускаются.

14.6. Таблица производных

Сведем теперь все выведенные формулы дифференцирования основных элементарных функций в таблицу. В ней для общности положим аргумент равным дифференцируемой функции $u = u(x)$.

1. $(C)' = 0$,
2. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$,
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$,
4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$,
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$,
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,
7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$,
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$,
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$,
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

14.7. Производная элементарной функции

Напомним, что элементарной называется функция $y = f(x)$, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций взятия функции от функции (сложная функция), последовательно применённых конечное число раз.

На основании знания таблицы производных основных элементарных функций и правил дифференцирования можно взять производную от любой элементарной функции, какой бы сложной она не была. И эта производная также будет элементарной функцией.

Пример 14.3. *Найти производную функции*

$$y = 2^{\sin^2 x^3} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\ln^2(x+3)}.$$

Р е ш е н и е:

$$y' = 2^{\sin^2 x^3} \ln 2 \cdot 2 \sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2^{\sin^2 x^3} \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} +$$

$$+ \frac{\ln^2(x+3) \dfrac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{x}} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2\dfrac{\ln(x+3)}{x+3} \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\ln^4(x+3)} =$$

$$= 2^{\sin^2 x^3} \left(3x^2 \ln 2 \cdot \sin 2x^3 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\ln^3(x+3)} \left(\frac{\ln(x+3)}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \sqrt[3]{x}} - \frac{2 \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{x+3} \right).$$

Практическое занятие 14. Производная функции

Вспомните определение производной 13.3.
Исходя из него, найдем производные двух функций:

Пример 14.1. $y = x^3$.

Р е ш е н и е:

- $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$,
- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$,
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$,
- $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$.

Пример 14.2. $y = \sqrt{x}$.

Р е ш е н и е:

- $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$,
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$,
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} =$
  $= \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$,

- $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Находить так производные – долго и сложно. Поэтому при практическом дифференцировании будем пользоваться формулами, полученными в лекциях. Решим так несколько примеров на основе формулы (13.7) дифференцирования степени.

Пример 14.3. $y = x^5$.

Решение: $y' = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Пример 14.4. $y = \sqrt[7]{x^3}$.

Решение: $y' = (\sqrt[7]{x^3})' = (x^{3/7})' = 3/7x^{3/7-1} = \dfrac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$.

Пример 14.5. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Решение: $y' = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

Пример 14.6. $y = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x^2}$.

Решение: $y' = \left(\dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x^2}\right)' = (x^{-1} - 2x^{-3/2})' = -x^{-2} + 3x^{-5/2} =$
$= -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$.

Пример 14.7. $y = ax^{-5}$.

Решение: $y' = (ax^{-5})' = a(x^{-5})' = -5ax^{-6} = \dfrac{5a}{x^6}$.

Пример 14.8. $y = \sqrt[n]{x}$.

Решение: $y' = (\sqrt[n]{x})' = (x^{1/n})' = 1/nx^{1/n-1} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Пример 14.9. $y = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$.

Решение: $y' = (\sqrt{\sqrt[3]{x}})' = (x^{1/6})' = 1/6x^{-5/6} = \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$.

Пример 14.10. $y = x^3\sqrt[5]{x}$.

Р е ш е н и е: $y' = (x^3\sqrt[5]{x})' = (x^{16/5})' = 16/5x^{11/5} = \dfrac{16x^2\sqrt[5]{x}}{5}$.

А теперь продифференцируем функции, содержащие тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Пример 14.11. $y = \sin x + \cos x$.

Р е ш е н и е: $y' = (\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x$.

Пример 14.12. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е:

$$y' = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \frac{(\operatorname{tg} x)'x - x'\operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x\cos^2 x}.$$

Пример 14.13. $y = \operatorname{ctg} x \cdot \arccos x$.

Р е ш е н и е:

$$y' = (\operatorname{ctg} x \cdot \arccos x)' = (\operatorname{ctg} x)' \arccos x + (\arccos x)' \operatorname{ctg} x =$$
$$= -\frac{\arccos x}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Найдем производные функций, содержащих показательные и логарифмические функции:

Пример 14.14. $y = \log_2 x \cdot 2^x$.

Р е ш е н и е: $y' = (\log_2 x)'2^x + (2^x)' \log_2 x = \dfrac{2^x}{x\ln 2} + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_2 x$.

Пример 14.15. $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$.

Р е ш е н и е: $y' = (\dfrac{(e^x)' \ln x - (\ln x)' e^x}{\ln^2 x} = \dfrac{e^x(x\ln x - 1)}{x\ln^2 x}$.

Теперь вспомним правило дифференцирования сложной функции (14.12).

В первых двух примерах подробнее, чем обычно, запишем процесс дифференцирования сложной функции.

Пример 14.16. $y = \cos^3 x$.

Р е ш е н и е: $y' = \underbrace{3\cos^2 x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от степени}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\text{производная от косинуса}} =$

$= -3\sin x\cos^2 x$.

Пример 14.17. $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Решение: $y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от корня}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от тангенса}}} = \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

Пример 14.18. $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}-(\arcsin x)^3$.

Решение: $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}\frac{1}{1+x^2} - 3(\arcsin x)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 14.19. $y=\lg\sin x$.

Решение: $y' = \frac{1}{\ln 10\cdot\sin x}\cdot\cos x$.

Пример 14.20. $y=\operatorname{arcctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$.

Решение: $y' = -\frac{1}{1+\ln^2 x}\frac{1}{x}+\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 14.21. $y=(e^{5x}-\operatorname{ctg} 4x)^5$.

Решение: $y' = 5(e^{5x}-\operatorname{ctg} 4x)^4\cdot\left(5e^{5x}+\frac{4}{\sin^2 4x}\right)$.

Пример 14.22. $y=\cos e^{3x}$.

Решение: $y' = -\sin e^{3x}\cdot e^{3x}\cdot 3 = -3e^{3x}\sin e^{3x}$.

Пример 14.23. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{-x}$.

Решение: $y' = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot(-1) = -\frac{1}{2(1-x)\sqrt{-x}}$.

Пример 14.24. $y=\ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

Решение:
$y' = (\ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3})' = (5\ln(x-2)-3\ln(x+1))' = \frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+1}$.

Пример 14.25. $y=2^{\arcsin 3x}+(1-\arccos 3x)^2$.

Решение: $y' = (2^{\arcsin 3x}+(1-\arccos 3x)^2)' =$
$= 2^{\arcsin 3x}\ln 2\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3 + 2(1-\arccos 3x)\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3$.

Самостоятельная работа

Найдите производные, исходя из определения 13.3:

Пример 14.26. $y = \dfrac{1}{x}$.

Пример 14.27. $y = \cos x$.

Найдите производные функций с помощью формул табличного дифференцирования:

Пример 14.28. $y = \sqrt[3]{x}$.

Пример 14.29. $y = x(1 - x^2)$.

Пример 14.30. $y = \sin x + 3\cos x$.

Пример 14.31. $y = x \operatorname{arctg} x$.

Пример 14.32. $y = \dfrac{\sin x}{\log_3 x}$.

Пример 14.33. $y = \dfrac{x}{2 + e^x}$.

Пример 14.34. $y = \arcsin x + \arccos x$.

Пример 14.35. $y = \operatorname{arcctg} x + x \ln x - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Пример 14.36. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

Пример 14.37. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$.

Пример 14.38. $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$.

Пример 14.39. $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Пример 14.40. $y = x \operatorname{ctg} x$.

Пример 14.41. $y = \dfrac{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$.

Пример 14.42. $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$.

Пример 14.43. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Пример 14.44. $y = \ln(e^x - 5\sin x - 4\arcsin x)$.

Пример 14.45. $y = -\dfrac{1}{20}\cos(5x^2) - \dfrac{1}{4}\cos x^2.$

Пример 14.46. $y = \operatorname{arctg}\ln x.$

Пример 14.47. $y = \ln\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln^2 x + \arcsin\ln x.$

Лекция 15. Приложения производной функции

Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически. Производная неявной функции. Геометрические приложения производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции. Угол между двумя кривыми. Приложение понятия производной к задачам физики.

В этой лекции мы прежде всего рассмотрим некоторые дополнения к дифференцированию функций, а затем приложения понятия производной к геометрическим и физическим задачам.

15.1. Логарифмическая производная

Пусть дана некоторая дифференцируемая функция $y = f(x)$. Прологарифмируем обе части этого выражения:

$$\ln y = \ln f(x).$$

А теперь продифференцируем его по x, помня, что $y = f(x)$:

$$(\ln y)'_x = (\ln f(x))'_x \Longrightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = (\ln f(x))'_x, \text{ откуда}$$

$$y' = y(\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'. \tag{15.1}$$

Определение 15.1. *Операция, состоящая в последовательном применении к равенству $y = f(x)$ сначала логарифмирования, а затем дифференцирования, называется логарифмическим дифференцированием, а производная, определяемая по формуле (15.1) – логарифмической производной.*

С помощью логарифмического дифференцирования мы легко можем вывести формулу (13.7), которая ранее была дана без вывода:

$$y = x^n \Longrightarrow \ln y = n\ln x \Longrightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{n}{x} \Longrightarrow y' = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Производная показательно-степенной функции.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется показательно-степенной. Её производная может быть найдена также с помощью логарифмического дифференцирования:

$$y = u(x)^{v(x)} \Longrightarrow \ln y = v \ln u \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{y}y' = v' \ln u + \frac{v}{u}u' \Longrightarrow y' = (u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right).$$

Пример 15.1. *Найти производную функции* $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Р е ш е н и е:

$$y' = (\sin x^{\cos x})' = \sin x^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right).$$

Логарифмическое дифференцирование также удобно использовать, когда функция задаётся в виде произведения и частного нескольких степенных выражений.

Пример 15.2. *Найти производную функции* $y = \dfrac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{\operatorname{tg} x} \sqrt[4]{\arcsin x^3}}$.

Р е ш е н и е:

$$\ln y = \ln \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{\operatorname{tg} x} \sqrt[4]{\arcsin x^3}} = \ln \sin x^{\cos x} +$$
$$+ \ln \sqrt[3]{2 \ln x} - \ln 2^{\operatorname{tg} x} - \ln \sqrt[4]{\arcsin x^3} =$$
$$= \cos x \ln \sin x + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \ln x - \operatorname{tg} x \ln 2 - \frac{1}{4} \ln \arcsin x^3 \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{y}y' = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x + \frac{1}{3x \ln x} - \frac{\ln 2}{\cos^2 x} - \frac{3x^2}{4 \arcsin x^3 \sqrt{1 - x^6}} \Longrightarrow$$
$$y' = \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{\operatorname{tg} x} \sqrt[4]{\arcsin x^3}} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x + \frac{1}{3x \ln x} - \frac{\ln 2}{\cos^2 x} - \frac{3x^2}{4 \arcsin x^3 \sqrt{1 - x^6}}\right).$$

Вычислить производную заданной функции, непосредственно как частного, оказалось бы значительно сложнее.

15.2. Производная функции, заданной параметрически

Параметрическое задание функции и примеры такого задания приводились нами в лекции 3. Напомним, что функция задаётся параметрически, если она определяется через параметр t по закону:

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t). \end{cases}$$

Будем считать $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемыми функциями параметра t и, следовательно, непрерывными. Отсюда следует, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta t \to 0$.

Найдем

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \Big/ \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, производная функции, заданной параметрически, определяется формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{15.2}$$

Пример 15.3. *Найти производную функции*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

график которой называется циклоидой (рис. 27).

Р е ш е н и е: По формуле (15.2):

$$y'_x = \frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

15.3. Производная неявной функции

Определение неявной функции было дано в лекции 3.

Напомним, что функция называется неявной, неявно-заданной, если она определяется выражением $F(x, y) = 0$. В каждом конкретном случае, продифференцировав такое выражение по x, считая y функцией x, получим линейное уравнение для производной $y' = y'_x$, из которого её и определим.

Пример 15.4. *Найти производную y' функции, заданной неявно*

$$x \sin y - y^2 \ln x = 0.$$

Р е ш е н и е:

$$(x \sin y - y^2 \ln x)'_x = \sin y + x \cos y \cdot y' - 2yy' \ln x - \frac{y^2}{x} = 0.$$

Из полученного уравнения находим:

$$y' = \frac{y^2 - x \sin y}{x(x \cos y - 2y \ln x)}.$$

15.4. Геометрические приложения производной

Геометрические представления производной основаны на её геометрическом смысле, установленном нами в лекции 13.

Получим на основании этого уравнение касательной T к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 98).

Уравнение любой прямой L, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$, с заданным коэффициентом k получено в лекции 3: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, как мы установили в лекции 13, угловой коэффициент $k_T = y'(x_0) = f'(x_0)$. Тогда $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ и уравнение искомой касательной T будет:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{15.3}$$

Как известно, если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$. Тогда если угловой коэффициент нормали N в точке $M_0(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ обозначить k_N, то он будет равен $k_N = -\dfrac{1}{k_T} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$, следовательно, уравнение нормали N в точке $M_0(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ примет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{15.4}$$

Определим теперь угол θ между двумя кривыми λ_1 и λ_2 в точке их пересечения (рис. 99). Очевидно, что этот угол равен углу между касательными T_1 и T_2 к кривым λ_1 и λ_2, проведённым в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$.

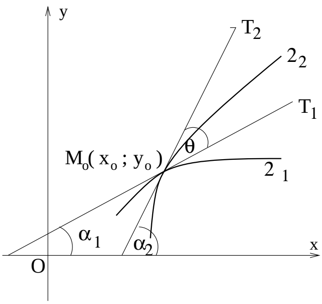


Рис. 99. *Угол между двумя кривыми*

Очевидно, что $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$. Откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{M_0}.$$

Следовательно,

$$\theta = \operatorname{arctg}\left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{x=x_0}. \qquad (15.5)$$

Пример 15.5. *Найти уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2; 4)$.*

Р е ш е н и е: $x_0 = 2$, $y_0 = f(x_0) = 4$. По (15.3) и (15.4) имеем уравнение искомой касательной T:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow y = 4x - 4$$

и нормали N:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Longrightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}.$$

Пример 15.6. *Найти угол θ, под которым пересекаются параболы $\lambda_1 : y = (x-2)^2$ и $\lambda_2 : y = -4 + 6x - x^2$.*

Решение: Найдем точки пересечения кривых λ_1 и λ_2. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = (x-2)^2, \\ y = -4 + 6x - x^2 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, параболы пересекаются в двух точках: $M_1(1;1)$ и $M_2(4;4)$ (рис. 100)

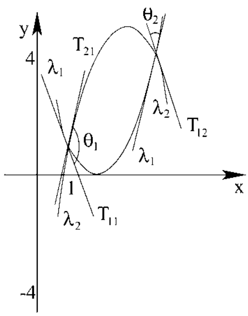


Рис. 100. *К примеру 15.6*

По формуле (15.5) находим углы.

В точке$M_1(1;1)$: $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{-2x_1 + 6 - 2(x_1-2)}{1 + (-2x_1+6)2(x_1-2)} = -\operatorname{arctg}\dfrac{6}{7} = 139°24'$.

В точке$M_2(4;4)$: $\theta_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{-2x_2 + 6 - 2(x_2-2)}{1 + (-2x_2+6)2(x_2-2)} = \operatorname{arctg}\dfrac{6}{7} = 40°36'$.

15.5. Приложение понятия производной к физическим задачам

Приложения понятия производной к физическим задачам основаны на физическом смысле производной как скорости изменения какой-нибудь физической величины. В лекции 13 мы рассмотрели простейший случай – производную от пути по времени как скорость прямолинейного движения точки.

Пример 15.7. *Точка движется прямолинейно со скоростью, определяемой законом $s = \sqrt{t}$. Показать, что движение замедленное.*

Р е ш е н и е: Если $s = \sqrt{t}$, то скорость $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ с ростом времени уменьшается; это означает, что движение замедленно.

Пример 15.8. *Зависимость количества вещества, полученного в химической реакции, от времени определяется формулой* $Q = a(1 + be^{-kt})$. *Определить скорость реакции.*

Р е ш е н и е: Скорость реакции $\dfrac{dQ}{dt} = -abke^{-kt}$. Можно эту скорость выразить через Q. Действительно, из формулы $Q = a(1 + {}+be^{-kt})$ имеем $abe^{-kt} = Q - a$. Следовательно, $\dfrac{dQ}{dt} = k(a - Q)$.

Практическое занятие 15. Производная функции (продолжение)

Решим два примера на логарифмическое дифференцирование. Как говорилось в лекции 15, этот прием целесообразно применять при нахождении производных показательно-степенных функций, а также функций, содержащих достаточно большое число сомножителей.

Пример 15.1. $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$.

Р е ш е н и е: $\ln y = \ln(\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln \sin x$.
Дифференцируем обе части последнего равенства:
$\dfrac{1}{y} \cdot y' = \dfrac{\ln \sin x}{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.
Отсюда, умножив обе части последнего равенства на $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$, найдем:

$$y' = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{\ln \sin x}{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x \right).$$

Пример 15.2. $y = \dfrac{x^2 (x-1)^3 \sqrt{2x+3}}{(3x-4)^2 \sqrt[4]{3x+2}}$.

Р е ш е н и е:

$$\ln y = 2\ln x + 3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+3) - 2\ln(3x-4) - \frac{1}{4}\ln(3x+2) \Rightarrow$$
$$(\ln y)'_x = \frac{1}{y} y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{2(2x+3)} - \frac{2 \cdot 3}{3x-4} - \frac{3}{4(3x+2)} \Rightarrow$$
$$y' = \frac{x^2 (x-1)^3 \sqrt{2x+3}}{(3x-4)^2 \sqrt[4]{3x+2}} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2x+3} - \frac{6}{3x-4} - \frac{3}{4(3x+2)} \right).$$

А теперь вспомним, как дифференцируются функции, заданные неявно (пункт 15.3).

Пример 15.3. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$.

Решение: Дифференцируем обе части, считая y функцией x:

$$2y \cdot y' \cos x - y^2 \sin x = 3a^2 \cos 3x \Rightarrow y' = \frac{3a^2 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x}.$$

Пример 15.4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Решение: Дифференцируем обе части, считая y функцией x:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3a(y + xy') = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

Найдем производную функции, заданной параметрически.

Пример 15.5.

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Решение: Пользуемся формулой (15.2):

$$y'_x = \frac{(\sin^2 t)'_t}{(\cos^2 t)'_t} = -1.$$

А теперь решим несколько задач на геометрические и физические приложения производной.

Пример 15.6. *Составьте уравнения касательной и нормали к кривой* $f(x) = y = x^3 - 2x^2 + 3$ *в точке с абсциссой* $x_0 = 1$.

Решение: В точке $x_0 = 1$ находим значения функции и её производной:

$$f(x_0) = y_0 = f(1) = 2,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x, \quad y'(x_0) = y'_0 = f'(1) = -1.$$

Подставим теперь $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ и $y_0' = -1$ в уравнения касательной (15.3) и нормали (15.4):

уравнение касательной:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = 2 - (x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0,$
уравнение нормали:
$y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y = 2 + (x - 1) = 0 \ \Rightarrow x - y + 1 = 0.$

Пример 15.7. *Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} y = t^3, \\ x = t^2 \end{cases}$$

в точке со значением параметра $t_0 = 2$.

Решение: В точке, где $t_0 = 2$, находим значения x, y и производной:

$$x_0 = x(t_0) = 4,$$
$$y_0 = y(t_0) = 8,$$
$$y_x'(t) = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t \Rightarrow y_x'(t_0) = 3.$$

Следовательно, уравнения искомых кривых будут:

уравнение касательной:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = 8 + 3(x - 4) \Rightarrow 3x - y - 4 = 0,$
уравнение нормали:
$y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y = 8 - \dfrac{1}{3}(x - 4) = 0$
$\Rightarrow x + 3y - 28 = 0.$

Пример 15.8. *Найти угол пересечения кривых* $y = \sin x$ *и* $y = \cos x$ *на отрезке* $[0; \pi/2]$.

Решение: Находим точку пересечения кривых:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4.$$

По формуле 15.5:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left. \frac{(\sin x)' - (\cos x)'}{1 + (\sin x)' \cdot (\cos x)'} \right|_{x=\pi/4} = \operatorname{arctg} \left. \frac{\cos x + \sin x}{1 - \sin x \cdot \cos x} \right|_{x=\pi/4} =$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{1 - 0,5} = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}.$$

Пример 15.9. *Две точки движутся по одной прямой s по законам $s_1 = 100 + 5t$ и $s_2 = t^2/2$. С какой скоростью они будут удаляться друг от друга в момент встречи? Размерности времени и пути – секунды и метры.*

Р е ш е н и е: В момент встречи:

$$s_1 = s_2 \Rightarrow 100 + 5t = t^2/2 \Rightarrow t^2 - 10t - 200 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет один положительный корень $t = 20$. Находим скорости точек в момент встречи:

$$v_1(t) = \frac{ds_1}{dt} = 5 \text{ м/с}, v_2(t) = \frac{ds_2}{dt} = t \Rightarrow v_2(20) = 20 \text{ м/с}.$$

Следовательно, скорость расхождения $v_2 - v_1 = 15$ м/с.

Пример 15.10. *Количество электричества (в кулонах), протекающее через проводник, определяется законом $Q = 2t^2+3t+1$. Найдите силу тока в конце 3 секунды.*

Р е ш е н и е: Сила тока $J = \dfrac{dQ}{dt} = 4t + 3$. При $t = 3$ $J = 15$ Кл/с=15А.

Самостоятельная работа

Пример 15.11. *Найти производную функции: $y = x^{\sin x}$.*

Пример 15.12. *Найти производную функции: $y = \dfrac{x^3 \cdot \sin x}{\ln x \cdot \operatorname{arctg} x}$.*

Пример 15.13. *Найдите y'_x из уравнения $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.*

Пример 15.14. *Найдите y'_x из уравнения $x^2 + y^2 = 1$.*

Пример 15.15. *Найдите y'_x функции*

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Пример 15.16. *Составьте уравнения касательной T и нормали N к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1; -1)$.*

Пример 15.17. *В какой точке касательная к кривой $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 4x$ имеет угловой коэффициент, равный 2?*

Пример 15.18. *Найдите углы между кривыми $y = x^2$ и $x + y = 2$ в точках их пересечения.*

Пример 15.19. *Точка движется по прямой так, что её расстояние s от начального пункта через t с равно $s = \dfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$, Определите, в какое время $t = t_0$ точка ещё раз пройдет через начальный пункт и при каком $t = t_k$ её скорость равна нулю?*

Пример 15.20. *Тело массой 3г движется прямолинейно по закону $s = 1+t+t^2$, где s – пройденный путь в см, t – время в с. Определите кинетическую энергию $mv^2/2$ тела через 5 с после начала движения.*

Лекция 16. Дифференциал функции

Дифференциал функции. Геометрический смысл и свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Приложение дифференциала к приближённым вычислениям. Повторное дифференцирование

16.1. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$, т.е. имеет в каждой точке этого интервала производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда на основании теоремы о связи между функцией, её пределом и бесконечно малой функцией

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Поэтому приращение функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{16.1}$$

может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению аргумента Δx с коэффициентом пропорциональности, равным $f'(x)$ и зависящим, следовательно, от x, а второе является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Только для линейной функции $y = kx + b$ приращение функции $\Delta y = k \cdot \Delta x$ и второе слагаемое равно нулю, а первое пропорционально Δx с коэффициентом, не зависящим от x.

Справедливо и обратное: если для данного значения x приращение функции можно представить в виде

$$\Delta y = a\Delta x + \alpha, \tag{16.2}$$

где α – бесконечно-малая более высокого порядка, чем Δx, то функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x) = a$.

Действительно, из (16.2) следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x},$$

где в силу сказанного $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha}{\Delta x} = 0$ и, следовательно, $a = f'(x)$.

Определение 16.1. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается dy или $df(x)$:*

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{16.3}$$

Пример 16.1. *Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2$.*

Р е ш е н и е: Запишем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow dy = 2x\Delta x,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

Используя определение дифференциала функции, доказанные выше положения для приращения функции можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 16.1. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела в некоторой точке x дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная.*

Пример 16.2. *Найти дифференциалы функций:*
$y = x^3$. Р е ш е н и е: $dy = d(x^3) = (x^3)'\Delta x = 3x^2 \cdot \Delta x$.
$y = x$. Р е ш е н и е: $dy = dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x$.

Так как из последнего примера следует, что

$$\Delta x = dx, \tag{16.4}$$

то формулу для дифференциала функции записывают так:

$$dy = y' \cdot dx = f'(x)dx. \tag{16.5}$$

В фиксированной точке x_0 дифференциал функции $y = f(x)$ равен:

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{16.6}$$

Определение 16.2. *Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен произведению производной на дифференциал независимой переменной.*

Пример 16.3. *Найти дифференциал функции $y = \sqrt{\sin x}$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$.*

Р е ш е н и е:

$$dy = d\sqrt{\sin x} = (\sqrt{\sin x})'dx = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \cdot dx.$$

При $x = \pi/4$ дифференциал $dy = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}dx$.

Из формулы (16.5) следует, что

$$y' = \frac{dy}{dx}, \tag{16.7}$$

т.е. что производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной. Правую часть формулы (16.7) мы ввели ранее как символическое обозначение производной.

16.2. Геометрический смысл дифференциала

Пусть x – абсцисса точки M на графике некоторой функции $y = f(x)$ (рис. 101). Дадим x приращение Δx. Точке с абсциссой $x + \Delta x$ соответствует точка N. Проведем через точку M касательную MP. Очевидно, что $\Delta x = dx = MK$, $\Delta y = NK$, $y' = \operatorname{tg} \angle PMK$. Тогда из треугольника MPK имеем:

$$MK \cdot \operatorname{tg} \angle PMK = y'dx = PK = dy.$$

Определение 16.3. *Дифференциал функции в данной точке равен приращению ординаты касательной к графику функции, проведённой в данной точке при переходе от точки с абсциссой x к точке с абсциссой $x + \Delta x$.*

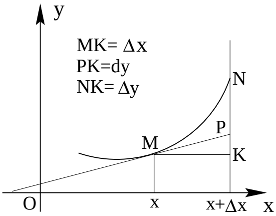


Рис. 101. *Геометрический смысл дифференциала*

16.3. Свойства дифференциала

Свойства дифференциала вытекают из его определения и свойств производной:

$$1. dC = 0;$$

$$2. d(u + v) = du + dv;$$

$$3. d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv;$$

$$4. d(cu) = cdu;$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

Предполагается, что u и v – дифференцируемые функции x.

Докажем, например, 3 свойство:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx = v \cdot du + u \cdot dv.$$

16.4. Инвариантность формы первого дифференциала

Теорема 16.2. *Формула для дифференциала $dy = y'dx$ сохраняет вид как в случае, когда x является независимой переменной, так и в случае, когда x зависит ещё от одной переменной, например, u.*

Доказательство. Если x – независимая переменная, то

$$dy = y'dx. \tag{16.8}$$

Пусть теперь имеется сложная функция

$$y = y(x),\ x = x(u). \tag{16.9}$$

Её дифференциал равен

$$dy = y'_u \cdot du = y'_x \cdot (x'_u \cdot du) = y'_x \cdot dx. \tag{16.10}$$

Равенство соотношений (16.8) и (16.10) и доказывает теорему.

Это свойство дифференциала называется инвариантностью (неизменностью).

16.5. Внесение функции под знак дифференциала

На основании свойства инвариантности формы первого дифференциала его вычисление для сложной функции $y = f(u(v(x)))$ сводится к следующей последовательности действий:

$$dy = f'(u)du = f'(u)u'(v)dv = f'(u)u'(v)v'(x)dx. \tag{16.11}$$

Пример 16.4. *Найти дифференциалы функций* e^{x^2}, $\arcsin^2 x^3$ *и* $\dfrac{\sin x}{x}$.

Р е ш е н и е: $de^{x^2} = e^{x^2}dx^2 = e^{x^2}2xdx = 2xe^{x^2}dx$,

$$d\arcsin^2 x^3 = 2\arcsin x^3 d\arcsin x^3 = 2\arcsin x^3\frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}dx^3 =$$

$$= \frac{2\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}}3x^2dx = \frac{6x^2\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}}dx.$$

$$d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)'dx = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx.$$

Так как производная любой элементарной функции есть элементарная функция, подобным же, как в примере 16.4, образом вычисляется и её дифференциал.

Если в примере 16.4 считать заданным выражение справа, то *действия, проведённые в обратном дифференцированию порядке, называются внесением функции под знак дифференциала.*

Пример 16.5. *Внесите под знак дифференциала функции:* $2xe^{x^2}$, $\dfrac{6x^2\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}}$, $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Р е ш е н и е: $2xe^{x^2}dx = e^{x^2}2x\,dx = e^{x^2}\,dex^2 = de^{x^2}$,

$$\frac{6x^2\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}}\,dx = \frac{2\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}}\,3x^2\,dx = 2\arcsin x^3\frac{dx^3}{\sqrt{1-x^6}} =$$
$$= 2\arcsin x^3 d\arcsin x^3 = d\arcsin^2 x^3 = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx =$$
$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)'\,dx = d\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Операция внесения под знак дифференциала очень важна будет для нас при изучении интегрального исчисления. В данной части курса только отметим, что эта операция намного сложнее дифференцирования, так как, хотя и существует теорема, что любая непрерывная функция может быть внесена под знак дифференциала, однако общего метода решения такой задачи не существует и соответствующая функция под знаком дифференциала может быть не элементарной.

Пример 16.6. *Можно ли внести под знак дифференциала функции:* e^{x^2} *и* $\dfrac{\sin x}{x}$*?*

Р е ш е н и е: Функция e^{x^2} – непрерывна при $x \in (-\infty;+\infty)$, а функция $\dfrac{\sin x}{x}$ непрерывна при $x \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ и, следовательно, в соответствующих интервалах непрерывности функции $F(x)$ и $\Phi(x)$, для которых $dF(x) = e^{x^2}dx$ или $d\Phi(x) = \dfrac{\sin x}{x}dx$ существуют, не являются, однако, элементарными. В таких случаях просто говорят, что функции e^{x^2} и $\dfrac{\sin x}{x}$ «не вносятся под знак дифференциала», не отмечая при этом, что «внесение» не может быть сделано в элементарных функциях.

16.6. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения приращения и дифференциала функции следует, что они отличаются друг от друга на величину, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Поэтому при малых Δx имеет место приближённая формула

$$\Delta y \approx dy. \tag{16.12}$$

А на основании формулы (16.5) можно записать:

$$f(x+\Delta x) \approx dy + f(x) \approx f(x) + y'dx. \tag{16.13}$$

Формула (16.13) может применяться к приближённым вычислениям значений функций в точках, близких к тем, в которых оно уже известно.

Пример 16.7. *Пользуясь формулой (16.13), найти* $\sin 29^\circ$.

Решение: Будем рассматривать $\sin 29^\circ$ как частное значение функции $y = f(x) = \sin x$. За начальное значение аргумента, при котором значение функции известно без таблиц и калькуляторов, примем $x = 30^\circ = \pi/6$. За значение $x + \Delta x$ примем 29°, выраженное в радианах. Следовательно,

$$x + \Delta x = \frac{29\pi}{180} \Rightarrow \Delta x = -\frac{\pi}{180} \approx -0,01745.$$

Формула (16.13) в нашем случае примет вид:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + (\sin x)'\Delta x, \text{ или} \sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x.$$

Подставляя сюда численные значения $x = \pi/6 = 0,52359$, $\Delta x = -0,01745$, получим

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot 0,01745 \approx 0,4849.$$

Пример 16.8. *Пользуясь формулой (16.13), найти* $\sqrt[3]{8,05}$.

Решение: Будем считать $\sqrt[3]{8,05}$ как частное значение функции $y = \sqrt[3]{x}$ при $x + \Delta x = 8,05$. Тогда $x = 8,\ \Delta x = 0,05$.

Формула (16.13) в этом примере примет вид:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})' \cdot \Delta x, \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \Delta x.$$

Подставив сюда численные значения x и Δx, зная, что $\sqrt[3]{8} = 2$, получим

$$\sqrt[3]{8,05} \approx 2 + \frac{0,05}{3 \cdot 4} \approx 2,0041.$$

16.7. Повторное дифференцирование

Производная некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в общем случае также может быть дифференцируемой функцией.

Определение 16.4. *Производная от производной называется второй производной (производной второго порядка) и обозначается y'' или $f''(x)$:*

$$f''(x) = (f'(x))'. \tag{16.14}$$

Пример 16.9. *Найти вторую производную функции $y = x^5$.*

Р е ш е н и е: $y' = (x^5)' = 5x^4$, $y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

Определение 16.5. *N-й производной (производной n-го порядка) называется производная от производной порядка $n-1$.*

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \tag{16.15}$$

Пример 16.10. *Найти n-ю производную функции $y = \sin x$.*

Р е ш е н и е:
$y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y^{(3)} = -\cos x, \ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.
Производные порядка выше первого называются производными высшего порядка. В названии «производная первого порядка» или «первая производная» слова «первого порядка» и «первая» обычно опускаются, что мы и делали ранее.

Определение 16.6. *Вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка) называется дифференциал от дифференциала функции.*

$$d^2y = d^2f(x) = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dxdx = y''dx^2.$$

При вычислении производной $(y'dx)'$ надо помнить, что dx от x не зависит. Произведение dx на dx принято обозначать dx^2.

Определение 16.7. *n-м дифференциалом (дифференциалом n-го порядка) называется дифференциал дифференциала порядка $n-1$.*

$$d^ny = d^nf(x) = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}dx^n. \tag{16.16}$$

Пример 16.11. *Найти три первых дифференциала функции $y = \sin 3x$.*

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} dy &= y' \cdot dx = 3\cos 3x \cdot dx, \\ d^2y &= y'' \cdot dx^2 = -9\sin 3x \cdot dx^2, \\ d^3y &= y^{(3)} \cdot dx^3 = -27\cos 3x \cdot dx^3. \end{aligned}$$

Дифференциалы порядка выше первого не обладают свойством инвариантности. По аналогии с равенством (16.7) можно ввести такие обозначения высших производных:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{16.17}$$

но если первая производная в (16.7) равна отношению дифференциалов, то для производных высших порядков в (16.17) такие обозначения носят условный характер.

Вторая производная имеет ясный физический смысл. Если материальная точка движется по прямой по закону $s = s(t)$, то её ускорение равно первой производной от скорости v, а так как скорость, в свою очередь, есть производная от пути s, то ускорение равно второй производной от пути по времени:

$$a = v' = s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{16.18}$$

Практическое занятие 16. Дифференциал функции

Вспомним сначала определение 16.1 дифференциала, формулу (16.5) для его нахождения и найдем дифференциалы следующих функций:

Пример 16.1. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Р е ш е н и е: $dy = d(\sqrt[3]{x^2}) = (\sqrt[3]{x^2})'dx = \dfrac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$.

Пример 16.2. $y = \dfrac{3^x}{x^3}$.

Р е ш е н и е: $dy = d\left(\dfrac{3^x}{x^3}\right) = \left(\dfrac{3^x}{x^3}\right)' dx = \dfrac{3^x(\ln 3)x^3 - 3x^2 3^x}{x^6} dx =$
$= \dfrac{3^x(x\ln 3 - 3)dx}{x^4}$.

Пример 16.3. $y = x^2 \cos 3x$.

Р е ш е н и е: $dy = d(x^2\cos 3x) = (x^2\cos 3x)'dx = (2x\cos 3x -$
$- 3x^2 \sin 3x)dx$.

Пример 16.4. *Внести под знак дифференциала функцию* $\dfrac{e^x \operatorname{arctg} e^x}{1 + e^{2x}}$.

Р е ш е н и е:

$$\frac{e^x \operatorname{arctg} e^x}{1+e^{2x}}dx = \frac{\operatorname{arctg} e^x}{1+e^{2x}}e^x dx = \operatorname{arctg} e^x \frac{de^x}{1+e^{2x}} =$$

$$= \operatorname{arctg} e^x d \operatorname{arctg} e^x = d\frac{\operatorname{arctg}^2 e^x}{2}.$$

Найдем несколько производных и дифференциалов высших порядков.

Пример 16.5. *Найти вторую производную функции* $y = xe^{3x}$.

Р е ш е н и е:

$$y' = e^{3x} + 3xe^{3x} = e^{3x}(1+3x), \quad y'' = 3e^{3x}(1+3x) + e^{3x}3 = 3(2+3x)e^{3x}.$$

Пример 16.6. *Найти первые четыре производные функции* $y = \sin 3x$.

Р е ш е н и е:

$$y' = 3\cos 3x, \quad y'' = -9\sin 3x, \quad y^{(3)} = -27\cos 3x, \quad y^{(4)} = 81\sin 3x.$$

Пример 16.7. *Найти все производные функции* $y = x^n (n \in N)$.

Р е ш е н и е:

$$y' = nx^{n-1}, \quad y'' = n\cdot(n-1)x^{n-2}\cdots y^{(n)} = n!, \quad y^{(k)} = 0 \text{ при } k > n.$$

Пример 16.8. *Найти три первых дифференциала функции* $y = x\ln x$.

Р е ш е н и е:

$$dy = y'dx = (\ln x + 1)dx, \quad d^2y = y''dx^2 = \frac{dx^2}{x}, \quad d^3y = y^{(3)}dx^3 = -\frac{dx^3}{x^2}.$$

Пример 16.9. *Найдите все дифференциалы функции* $y = 4^x$.

Р е ш е н и е:

$$dy = 4^x \ln 4 dx, \quad d^2y = 4^x(\ln 4)^2 dx^2, \ \cdots, \ d^n y = (\ln 4)^n 4^x dx^n.$$

Вспомним теперь приложение дифференциала к приближённым вычислениям (пункт 6.4.2), формулу (16.13) и решим на эту тему два примера.

Пример 16.10. *Пользуясь формулой (16.13), найти* $\operatorname{tg} 46°$.

Р е ш е н и е: Будем рассматривать $\operatorname{tg} 46^\circ$ как частное значение функции $y = f(x) = \operatorname{tg} x$. За начальное значение аргумента, при котором значение функции известно без таблиц и калькуляторов, примем $x = 45^\circ = \pi/4$. За значение $x + \Delta x$ примем 46°. Следовательно,

$$x + \Delta x = \frac{46\pi}{180} \Rightarrow \Delta x = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745.$$

Формула (16.13) в нашем случае примет вид:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + (\operatorname{tg} x)'\Delta x, \text{ или} \operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{\Delta x}{\cos^2 x}.$$

Подставляя сюда численные значения $x = \pi/4 = 0,78538$, $\Delta x =$ $= 0,01745$, получим

$$\operatorname{tg} 46^\circ \approx \operatorname{tg} 45^\circ + \frac{0,01745}{\cos^2 45^\circ} \approx 1 + 2 \cdot 0,01745 \approx 1,0349.$$

Значение $\operatorname{tg} 46^\circ$ с точностью до четырёх знаков 1,0355.

Пример 16.11. *Пользуясь формулой (16.13), найти* $\sqrt[3]{70}$.

Р е ш е н и е: Будем считать $\sqrt[3]{70}$ как частное значение функции $y = \sqrt[3]{x}$ при $x + \Delta x = 70$. Тогда $x = 64$, $\Delta x = 6$.

Формула (16.13) в этом примере примет вид:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})' \cdot \Delta x, \text{ или } \sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \Delta x.$$

Подставив сюда численные значения x и Δx, зная, что $\sqrt[3]{64} = 4$, получим

$$\sqrt[3]{70} \approx 4 + \frac{6}{3 \cdot 16} = 4,125.$$

Отметим, что $\sqrt[3]{70}$ с точностью до 10^{-3} равен 4,121.

Самостоятельная работа

Найдите дифференциалы функций:

Пример 16.12. $y = x^2\sqrt{x}$.

Пример 16.13. $y = x \operatorname{arctg} x$.

Пример 16.14. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Пример 16.15. *Внести функцию* $\operatorname{ctg} x \ln \sin x$ *под знак дифференциала.*

Пример 16.16. *Найдите вторую производную функции* $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.

Пример 16.17. *Найдите n-ую производную функции* $y = \dfrac{1}{1+x}$.

Пример 16.18. *Удовлетворяет ли функция* $y = \dfrac{x^2 e^x}{2}$ *соотношению* $y'' - 2y' + y = e^x$?

Пример 16.19. $y = x^2 e^{-x}$, *найти* $d^3 y$.

Пример 16.20. $y = \dfrac{x^4}{2-x}$, *найти* $d^4 y$.

Вычислите приближённо, заменяя приращение дифференциалом:

Пример 16.21. $\ln 1,02$.

Пример 16.22. $\sqrt[5]{35}$.

Пример 16.23. $\operatorname{arctg} 1,05$.

Лекция 17. Теоремы о функциях

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях – Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Лопиталя. Приемы раскрытия неопределённостей с помощью правила Лопиталя.

Теоремы, которые мы рассмотрим в этой лекции, являются фундаментом для применения дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков.

17.1. Теорема Ферма

Теорема 17.1. *(теорема Ферма[5]) Пусть функция* $y = f(x)$

- *определена в интервале* $(a; b)$*;*
- *принимает в некоторой точке* $\xi \in (a; b)$ *этого интервала наибольшее или наименьшее значение.*

В таком случае, если в точке ξ *существует производная, то она равна нулю.*

[5] П.Ферма(1601–1665) – французский математик.

Доказательство. По определению производной:

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}. \tag{17.1}$$

Положим для определённости, что $f(\xi) = M$ – наибольшее значение функции в интервале $(a; b)$.

Поэтому при любом знаке Δx:

$$f(\xi) \geqslant f(\xi + \Delta x)$$

и выражение в числителе (17.1) неположительно. Следовательно:

$$\text{если } \Delta x > 0, \text{ то} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leqslant 0 \Rightarrow f'(\xi) \leqslant 0; \tag{17.2}$$

$$\text{если } \Delta x < 0, \text{ то} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geqslant 0 \Rightarrow f'(\xi) \geqslant 0. \tag{17.3}$$

Так как производная в точке ξ существует, она не должна зависеть от знака Δx. Производная будет удовлетворять условиям (17.2) и (17.3) только в случае $f'(\xi) = 0$. Теорема доказана.

17.2. Теорема Ролля

Теорема 17.2. *(Ролль[6]) Пусть функция $y = f(x)$:*

- *непрерывна на отрезке $[a; b]$;*
- *дифференцируема в интервале $(a; b)$;*
- *принимает на концах отрезка значения, равные нулю, т.е. $f(a) = f(b) = 0$.*

В таком случае в интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одна точка ξ, в которой производная функции равна нулю, т.е. $f'(\xi) = 0$.

Доказательство

Так как функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нём своего наибольшего и наименьшего значений M и m соответственно.

Если $M = m$, то функция на отрезке постоянна и её производная равна нулю в любой точке отрезка.

Пусть теперь $M \neq m$. Тогда одно из этих чисел, например, M, не равно нулю. Тогда это значение принимается в какой-то внутренней точке ξ, так как на концах отрезка функция равна нулю. На основании теоремы Ферма $f'(\xi) = 0$. Теорема доказана.

[6]М.Ролль(1652–1719) – французский математик.

Касательная в точке ξ параллельна оси OX. Очевидно, теорема справедлива и при $f(a) = f(b) \neq 0$.

17.3. Теорема Лагранжа

Теорема 17.3. *(Лагранж[7]) Пусть функция* $y = f(x)$:

- *непрерывна на отрезке* $[a; b]$*;*
- *дифференцируема в интервале* $(a; b)$*.*

Тогда внутри этого отрезка найдется хотя бы одна точка ξ*, в которой выполняется равенство*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{17.4}$$

Доказательство: Запишем уравнение хорды AB (рис. 102):

$$\frac{y_x - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ откуда} : y_x = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Разность между $y = f(x)$ и y_x обозначим $F(x)$:

$$F(x) = y - y_x = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{17.5}$$

Легко проверить, что полученная функция $F(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ всем условиям теоремы Ролля.

Действительно $F(x)$:

- непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- дифференцируема в интервале $(a; b)$. Её производная
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{17.6}$$
существует в интервале $(a; b)$, так как в нём существует $f'(x)$;
- $F(a) = F(b) = 0$.

Поэтому на основании теоремы Ролля внутри отрезка $[a; b]$ найдется хотя бы одна точка ξ, в которой $F'(\xi) = 0$. На основании равенства (17.6) находим

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \tag{17.7}$$

откуда и следует равенство (17.4). Теорема доказана.

[7] Ж. Лагранж(1736–1813) – французский математик и механик.

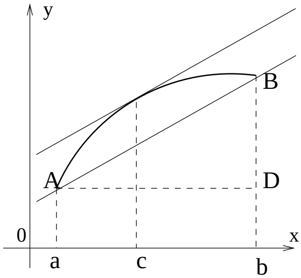


Рис. 102. *Геометрический смысл теоремы Лагранжа*

Из равенства (17.4) вытекает соотношение

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{17.8}$$

Левая его часть равна угловому коэффициенту касательной к графику $y = f(x)$ в точке c. Правая – угловому коэффициенту секущей AB.

Поэтому геометрический смысл теоремы Лагранжа следующий (рис. 102): в интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы дуги.

Замечание 17.1. *Из формулы (17.4) следует ещё одно название теоремы Лагранжа. Она называется также теоремой о конечных приращениях и может быть сформулирована так:*

Приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a; b]$ равно длине этого отрезка, умноженной на значение производной от этой функции в некоторой внутренней точке этого отрезка. А формула 17.4 соответственно называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

17.4. Теорема Коши

Теорема 17.4. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют на $[a; b]$ условиям теоремы Лагранжа, причём $\varphi'(x) \neq 0$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка ξ, в которой*

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \tag{17.9}$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы Лагранжа с помощью вспомогательной функции

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot (\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Мы его проводить не будем.

17.5. Теорема (правило) Лопиталя

Знакомство с понятием производной позволяет нам ввести новое правило раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 17.5. *(Лопиталь [8]) Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$–функции, дифференцируемые в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Пусть при $x \to x_0$ обе функции одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тогда предел их отношения при $x \to x_0$ равен пределу отношения их производных, если последний существует. Следовательно,*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{17.10}$$

Доказательство этой теоремы проводится на основании теоремы Коши. В нашей лекции мы его опустим.

17.6. Примеры на нахождение пределов

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$

Пример 17.1. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{1} = 3.$$

[8]Г. Лопиталь(1661-1704) – французский математик.

Пример 17.2. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}.$$

Хотя этот предел, как и предел в примере 17.1, можно найти с помощью теоремы о первом замечательном пределе, мы применим правило Лопиталя ещё раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{1}{2}.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

В следующем примере правило Лопиталя применяется трижды.

Пример 17.3. *Найти предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Ясно, что предел также равнялся бы нулю, если бы степень многочлена была не 3, а выше.

Следствие: 17.1. *Многочлен любой степени при $x\to+\infty$ растет медленнее показательной функции.*

Указанный факт уже был установлен ранее (лекция 11)

Пример 17.4. *Найти предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

При решении этого примера нельзя применять правило Лопиталя, поскольку предел отношения производных не существует, так как не существует

$$\lim_{x\to+\infty} \cos x.$$

Как же тогда найти этот предел? Разделив числитель и знаменатель на x, найдем, что он равен единице.

Неопределенность вида $+\infty - \infty$

Этот случай после тождественных преобразований сводится к рассмотренным выше неопределённостям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 17.5. *Найти*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right).$$

Р е ш е н и е: Так как оба слагаемые при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ неограниченно возрастают, то это – неопределенность вида $+\infty - \infty$.

Выполним следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x}.$$

При $x \to \dfrac{\pi}{2}$ числитель и знаменатель последней дроби стремятся к нулю. Следовательно, от неопределённости вида $+\infty - \infty$ мы пришли к неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Неопределенность вида $0 \cdot +\infty$

Этот случай также после тождественных преобразований сводится к рассмотренным выше неопределённостям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 17.6. *Найти предел*

$$\lim_{x\to+0} x\ln x.$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

При нахождении следующих неопределённостей необходимо искать предел логарифма исходного выражения и, найдя его, вернуться к заданному пределу.

Неопределенность вида $1^{+\infty}$

Пример 17.7. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}(1+ax^m)^{b/x^n}, \quad m>0,\ n>0.$$

Р е ш е н и е:

$$y=(1+ax^m)^{b/x^n} \Rightarrow \ln y = \frac{b\ln(1+ax^m)}{x^n}.$$

В последнем выражении числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю при $x\to 0$. Получилась неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{(b\ln(1+ax^m))'}{(x^n)'} = \lim_{x\to 0}\frac{abmx^{m-1}}{(1+ax^m)nx^{n-1}} = \frac{abm}{n}\lim_{x\to 0}x^{m-n} =$$

$$= \begin{cases} 0,\ m>n,\\ ab,\ m=n,\\ +\infty,\ m<n,\ ab>0,\\ -\infty,\ m<n,\ ab<0.\end{cases}$$ Откуда (ср. 8.3)

$$\lim_{x\to 0}(1+ax^m)^{b/x^n} = \begin{cases} e^0=1,\ m>n,\\ e^{ab},\ m=n,\\ e^{+\infty}=+\infty,\ m<n,\ ab>0,\\ e^{-\infty}=0,\ m<n,\ ab<0.\end{cases} \qquad (17.11)$$

В частности, при $a=b=1$ и $m=n$ мы получаем второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \qquad (17.12)$$

Неопределенность вида 0^0

Пример 17.8. *Найти предел*

$$\lim_{x\to+0} x^x.$$

Решение: Обозначим $y = x^x$. Логарифм этого выражения $\ln y = \ln x^x = x\ln x$. Из примера 17.6 следует, что величина $\ln y$ стремится к нулю, следовательно,

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} x^x = 1.$$

Неопределенность вида $+\infty^0$

Пример 17.9. *Найти предел*

$$\lim_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}.$$

Решение: Обозначим $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. Логарифм этого выражения $\ln y = \cos x \ln \operatorname{tg} x = \dfrac{\ln\sin x - \ln\cos x}{\frac{1}{\cos x}}$. И числитель $\ln\sin x - \ln\cos x$, и знаменатель $\dfrac{1}{\cos x}$ стремятся к бесконечности при $x \to \pi/2 - 0$.

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/2-0} \frac{(\ln\sin x - \ln\cos x)'}{\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'} = \lim_{x\to\pi/2-0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin x} = 0.$$

Так как $\ln y$ стремится к нулю, то

$$\lim_{x\to\pi/2-0} y = \lim_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1.$$

Замечание 17.2. *Если $\varphi(x) \to 0$, а $\psi(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$, то*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x)^{\psi(x)} = 0$$

и, следовательно, $0^{+\infty}$ не является неопределённостью.

Действительно, в этом случае

$$\ln y = \psi(x)\ln\varphi(x) \to -\infty, \text{ а } y \to 0.$$

Практическое занятие 17. Теоремы о функциях

Пример 17.1. *Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции* $y = f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ *на отрезке* $[-1; 2]$.

Р е ш е н и е:

- Функция является многочленом и непрерывна на любом множестве, в том числе и на $[-1; 2]$.
- Многочлен дифференцируем на любом множестве.
- Находим значение функции на концах отрезка: $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$.

Все условия теоремы Ролля выполнены – теорема справедлива для данной функции.

Пример 17.2. *Покажите, что уравнение* $x^3 - 3x + c = 0$ *не может иметь два различных корня на отрезке* $[0; 1]$.

Р е ш е н и е: Функция $y = x^3 - 3x + c$ является многочленом и на отрезке $[0; 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Предположим, имеются два корня $a, b \in (0; 1) \Rightarrow f(a) - f(b) = 0$. Тогда в интервале $(a; b)$ должна быть хотя бы одна точка, в которой производная равна нулю. Но $f(a) = f(0) = c$, $f(b) = f(1) = c - 2$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = -2 \neq 0$. Следовательно, из теоремы Лагранжа следует, что исходное уравнение не может иметь двух различных корней на отрезке $[0; 1]$.

Далее решим примеры на теорему (правило) Лопиталя (см. п. 6.4.2). При вычислении пределов мы также будем использовать различные преобразования и полученные ранее замечательные пределы.

Пример 17.3. *Вычислить*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \ \left(\text{неопределенность типа } \tfrac{\infty}{\infty}\right).$$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Получили неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$, однако применять правило Лопиталя нет надобности, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, окончательно находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=0.$$

Пример 17.4. *Вычислить*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\ (\textit{неопределенность типа } +\infty-\infty)\,.$$

Р е ш е н и е: Приведя дроби к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)\left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right).$$

Прежде чем применять правило Лопиталя, заменим знаменатель последней дроби эквивалентной ему бесконечно-малой x^4, так как $x^2\sin^2 x\sim x^4$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right).$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

Пример 17.5. *Вычислить*

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}\ (\textit{неопределенность типа } 1^{+\infty})\,.$$

Р е ш е н и е: Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{3/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}=-6.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}=e^{-6}.$$

Пример 17.6. *Вычислить*

$$\lim_{x\to +0}(\operatorname{tg} x)^{\sin x}\ (\textit{неопределенность типа } 0^0)\,.$$

Р е ш е н и е: Имеем

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = y;\ \ln y = \sin x \ln \operatorname{tg} x;$$

$$\lim_{x\to+0} \ln y = \lim_{x\to+0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1/\sin x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cos x\right)} = \lim_{x\to+0} \frac{-\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= 0 \Rightarrow \lim_{x\to+0} e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x} = 1$$

Пример 17.7. *Вычислить*

$$\lim_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}\ (\textit{неопределенность типа } +\infty^0).$$

Р е ш е н и е: Имеем

$$(\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = y;\ \ln y = \sin x \ln \operatorname{ctg} x;$$

$$\lim_{x\to+0} \ln y = \lim_{x\to+0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{1/\sin x} = \lim_{x\to+0} \frac{-1/\operatorname{ctg} x \cdot 1/\sin^2 x}{-1/\sin^2 x \cdot \cos x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+0} y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = 1.$$

Самостоятельная работа

Пример 17.8. *Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции* $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ *на отрезке* $[2; 3]$.

Пример 17.9. *Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции* $y = 4^{\sin x}$ *на отрезке* $[0; \pi]$.

Пример 17.10. *Составьте формулу Лагранжа для функции* $y = x(1 - \ln x)$ *на отрезке* $[a; b]$.

Найдите пределы:

Пример 17.11. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Пример 17.12. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

Пример 17.13. $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sin x}$.

Пример 17.14. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$.

Пример 17.15. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$.

Пример 17.16. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Лекция 18. Функциональные ряды

Область сходимости функционального ряда. Правильно сходящиеся ряды и их свойства. Степенные ряды.

18.1. Область сходимости функционального ряда

Ранее мы познакомились с рядами, членами которых являются числа. Рассмотрим теперь ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x). \tag{18.1}$$

Определение 18.1. *Ряд (18.1), членами которого являются функции, определённые в некоторой области изменения аргумента x, называется функциональным рядом.*

Если в функциональный ряд вместо x подставить некоторое значение x_0 из области определения всех его функций, то получится числовой ряд.

Определение 18.2. *Точка $x = x_0$, при подстановке которой в (18.1) получится сходящийся числовой ряд, называется точкой сходимости функционального ряда (18.1).*

Определение 18.3. *Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его областью сходимости.*

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых n его членов

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \tag{18.2}$$

является функцией переменой x, определённой в области сходимости ряда.

Действительно, из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел $S_n(x)$ при $n \to +\infty$. В точках же, не принадлежащих области сходимости, $S_n(x)$ не имеет предела.

Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$, как и для числового ряда, называется n-м остатком ряда и обозначается $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

Очевидно, что если ряд сходится, то должен быть выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0 \tag{18.3}$$

во всех точках сходимости ряда, где также

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0. \tag{18.4}$$

Для определения области сходимости функционального ряда обычно сначала используют признак Даламбера (теорема 11.4), применяемый к ряду, составленному из абсолютных величин ряда (18.1):

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1. \tag{18.5}$$

Все точки x, удовлетворяющие (18.5), входят в область сходимости ряда.

Из признака Даламбера следует, что в случае, если предел последующего члена ряда к предыдущему равен единице, ряд может сходиться или расходиться. Поэтому в граничных точках промежутка, точки которого удовлетворяют (18.5), ряд также может сходиться, так как в них

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 1. \tag{18.6}$$

Вопрос о сходимости ряда в точках удовлетворяющих (18.6), решается непосредственной подстановкой их значений в ряд (18.1).

Пример 18.1. *Определить область сходимости функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}.$$

Р е ш е н и е:

$$u_n = \frac{1}{n(x+3)^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(x+3)^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n(x+3)^n}{(n+1)(x+3)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|x+3|} < 1.$$

Следовательно, $|x+3| > 1 \ \Rightarrow x > -2$ и $x < -4$.
Проверим сходимость ряда в точках $x = -2$ и $x = -4$:

- $x = -2$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится;
- $x = -4$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(-1)^n}$ – знакочередующийся ряд, сходится по признаку Лейбница, но сходится условно, так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда,
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n},$$
является расходящимся.

Таким образом, область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+3)^n}$ состоит из всех точек $x \in (-\infty, -4] \cup (-2, +\infty)$.

Пример 18.2. *Определить область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x}$.

Р е ш е н и е: $u_n = n\sqrt[3]{\cos^n x}, \quad u_{n+1} = (n+1)\sqrt[3]{\cos^{n+1} x};$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\sqrt[3]{\cos^{n+1} x}}{n\sqrt[3]{\cos^n x}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\sqrt[3]{\cos x}\right|.$$

Этот предел меньше единицы при всех x, кроме $x_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. При целых значениях k получатся ряды:

- при чётном k: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x_k} = 1 + 2 + 3 + \ldots,$
- при нечётном k: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x_k} = -1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^n n + \ldots$.

Оба ряда расходятся, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x}$ является вся числовая ось, кроме точек $x_k = k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots$.

Пример 18.3. *Определить область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{3n+2}\left(\dfrac{5-x}{8x-3}\right)^n$.

Р е ш е н и е: В область сходимости функционального ряда входят точки, в которых выполняется неравенство (18.7).

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1. \tag{18.7}$$

В нашем случае

$$u_n(x) = \frac{1}{3n+2}\left(\frac{5-x}{8x-3}\right)^n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3n+5}\left(\frac{5-x}{8x-3}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{3n+5}\left|\frac{5-x}{8x-3}\right| < 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{3n+5} = 1,$$

то область сходимости определяется неравенством

$$\left|\frac{5-x}{8x-3}\right| < 1 \ \text{ или системой } \ -1 < \frac{5-x}{8x-3} < 1.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{5-x}{8x-3} > -1, \\ \dfrac{5-x}{8x-3} < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5-x}{8x-3} + 1 > 0, \\ \dfrac{5-x}{8x-3} - 1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7x+2}{8x-3} > 0, \\ \dfrac{9x-8}{8x-3} > 0. \end{cases}$$

Методом интервалов определяем, что этой системе удовлетворяют точки $x \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{7}\right) \bigcup \left(\dfrac{8}{9}, +\infty\right)$. Исследуем дополнительно сходимость ряда в точках, где предел отношения последующего члена ряда к предыдущему равен единице:

- $x = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{3n+2}$. Сравнив этот ряд с гармоническим, получим, что он расходится;
- $x = -\dfrac{2}{7} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+2} \Rightarrow$ сходится по признаку Лейбница.

  Ясно, что в этой точке ряд сходится условно.

Итак, окончательно область сходимости ряда

$$x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right] \bigcup \left(\frac{8}{9}, +\infty\right)$$

18.2. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная, и производная суммы конечного числа функций равна сумме производных этих функций. Функциональные же ряды содержат бесконечное число слагаемых и указанные свойства не всегда справедливы и для них.

Определение 18.4. *Функциональный ряд (18.1) называется правильно сходящимся в области D, принадлежащей области его сходимости, если в любой точке этой области все члены ряда не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда.*

В некоторых учебниках правильно сходящийся ряд называется мажорируемым, а соответствующий числовой ряд, с которым он сравнивается, мажорирующим. В более подробных курсах вводят определение равномерной сходимости, на котором в наших лекциях мы останавливаться не будем. Приведем без доказательства три теоремы для правильно сходящихся функциональных рядов, определяющих их свойства, о которых говорилось в начале этого пункта.

Теорема 18.1. *Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся в области D, сходится абсолютно в любой точке этой области.*

Пример 18.4. *Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ абсолютно сходится при любом $x \in (-\infty, +\infty)$.*

Р е ш е н и е: Действительно, $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ при любых x, а следовательно, члены данного ряда не превышают по модулю соответствующие члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, тогда по теореме 18.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ сходится правильно и абсолютно при любых x.

Теорема 18.2. *Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция непрерывная в этой области.*

Теорема 18.3. *Если ряд (18.1), составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна $S(x)$, а ряд из производных его членов сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда $S'(x)$ равна сумме ряда, составленного из производных его членов. Это значит, что такой ряд можно почленно дифференцировать в области D.*

Из функциональных рядов мы рассмотрим лишь степенные ряды, а в дальнейшем (в третьем семестре) – тригонометрические ряды.

18.3. Степенные ряды

Определение 18.5. *Степенным рядом называется функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + ..., \qquad (18.8)$$

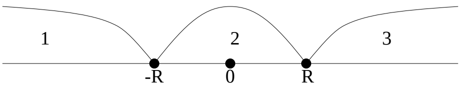
членами которого являются произведения постоянных a_0, $a_1, \ldots, a_n$ на разность $(x-x_0)$ в соответствующих целых степенях n. Постоянные $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, степенной ряд (18.8) примет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ..., \qquad (18.9)$$

который мы прежде всего и рассмотрим.

Определим область сходимости этого ряда. Для этого рассмотрим знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (18.9) и применим к нему достаточный признак сходимости



1 – область, где ряд расходится;
2 – область, где ряд сходится;
3 – область, где ряд расходится.

Рис. 103. *Область сходимости степенного ряда*

Даламбера (18.5).

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Откуда

$$|x| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R. \qquad (18.10)$$

Определение 18.6. *Число* $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *называется радиусом сходимости степенного ряда (18.9), при всех* $|x| < R$ *ряд абсолютно сходится, при* $|x| > R$ *– расходится. Интервал* $(-R; R)$ *называется интервалом сходимости ряда (18.9).*

В точках $x = \pm R$ сходимость или расходимость ряда устанавливается проверкой сходимости числовых рядов, полученных после подстановки в (18.9) $x = -R$ и $x = R$. Областью сходимости степенного ряда (18.9) является интервал $(-R; R)$, к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены один или оба конца отрезка $[-R; R]$ (рис. 103). В каждой точке интервала $(-R; R)$ ряд (18.9) сходится абсолютно.

Очевидно, любой степенной ряд вида (18.9) сходится при $x = 0$. Если других точек сходимости нет, радиус сходимости $R = 0$. Если же ряд сходится при любых $x \in (-\infty; +\infty)$, то будем считать, что радиус сходимости $R = +\infty$.

Пример 18.5. *Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Р е ш е н и е: $u_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;
$R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1.$

Интервал сходимости $(-1; 1)$.

Проверяем граничные точки:

- $x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, при $\alpha \leqslant 1$ – расходится;
- $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – знакочередующийся ряд условно сходится.

Следовательно, область сходимости ряда $[-1; 1)$.

Пример 18.6. *Найти область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Р е ш е н и е: $a_n = \dfrac{1}{n!}$; $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$; $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} =$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} =$
$= \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$

Следовательно, область сходимости ряда $x \in (-\infty; +\infty)$.

При определение радиуса сходимости в этом примере использовано соотношение $(n+1)! = n!(n+1)$.

Для степенных рядов может быть доказана теорема.

Теорема 18.4. *Пусть степенной ряд (18.9) имеет интервал сходимости $(-R; R)$, а $r < R$ произвольное положительное число. Тогда ряд (18.9) является правильно сходящимся на отрезке $[-r; r]$. По свойству правильно сходящихся рядов:*

- *Степенной ряд (18.9) абсолютно сходится в любой точке интервала сходимости и, следовательно, степенные ряды можно почленно складывать и умножать (как многочлены). При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет множество всех точек, в которых сходятся складываемые или перемножаемые ряды.*
- *Сумма степенного ряда (18.9) является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости.*

- *Степенной ряд (18.9) можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.*

Естественно, что радиус сходимости степенного ряда (18.8) также равен

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

однако интервал сходимости будет

$$(x_0 - R; x_0 + R), \tag{18.11}$$

т.к. применив к ряду (18.8) признак Даламбера, получим

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

и, следовательно, ряд (18.8) сходится в интервале

$$|x-x_0| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R. \tag{18.12}$$

В точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ сходимость устанавливается так же, как и для ряда (18.9) в точках $x = -R$ и $x = R$.

Пример 18.7. *Найти область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{4^n}$.

Р е ш е н и е:
$a_n = \dfrac{1}{4^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$; $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+1}}{4^n} = 4.$
Интервал сходимости $|x-3| < 4$ или $x \in (-1; 7)$.
Рассмотрим граничные точки $x = 7$ и $x = -1$:

- $x = 7$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{4^n} = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots;$
- $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 4^n}{4^n} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots.$

Оба ряда расходятся, т.к. предел u_n не равен нулю. Область сходимости совпадает с интервалом сходимости $x \in (-1; 7)$.

Практическое занятие 18. Контрольная работа по материалам лекций 13–17

Рассмотрим один из возможных вариантов контрольной работы по материалам лекций 13–17.

Пример 18.1. *Найти* $y'(4)$, *если* $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}(x^2+\sqrt{x}) + \dfrac{\cos^2\sqrt{x}}{4x}$.

Пример 18.2. *Найти дифференциал функции* $y = (\sqrt{x})^{1/x}$.

Пример 18.3. *Определить функцию* $y(x)$ *по её дифференциалу* $dy = \ln\sin(x+2)\cdot\operatorname{ctg}(x+2)dx$.

Пример 18.4. *В какой точке* $M_0(x_0; y_0)$ *кривой* $y^2 = 2x^3$ *касательная* T *перпендикулярна к прямой* $4x - 3y + 2 = 0$?

Пример 18.5. *Используя правило Лопиталя найти пределы:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{7}{x^7-1}\right)$.

b) $\displaystyle\lim_{\alpha\to0}(\cos k\alpha)^{1/\alpha^2}$.

Решение примеров варианта контрольной работы

Пример 18.1. *Найти* $y'(4)$, *если*

$$y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\left(x^2+\sqrt{x}\right) + \frac{\cos^2\sqrt{x}}{4x}.$$

Р е ш е н и е: Находим производную заданной функции

$$y' = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}(\ln 3)\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+\sqrt{x}) + 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) +$$

$$+\frac{x\cdot 2\cos\sqrt{x}(-\sin\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \cos^2\sqrt{x}}{4x^2} =$$

$$= \left(\frac{(x^2+\sqrt{x})\ln 3}{x^2\sin^2\dfrac{1}{x}} + 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}} -$$

$$-\frac{x\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}{4x^2\sqrt{x}}$$

и вычисляем её значение в точке $x = 4$

$$y'(4) = \left(\frac{9\ln 3}{8\sin^2\frac{1}{4}} + \frac{33}{4}\right)3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{4}} - \frac{\sin 4 + \cos^2 2}{64}.$$

Пример 18.2. *Найти дифференциал функции* $y = (\sqrt{x})^{1/x}$.

Р е ш е н и е: Так как $dy = y'(x)dx$, находим вначале производную функции $y = (\sqrt{x})^{1/x}$. Поскольку наша функция является показательно-степенной, её производная ищется с помощью логарифмической производной.

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\sqrt{x} = \frac{\ln x}{2x} \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x}{2x^2} = \frac{1-\ln x}{2x^2} \to$$

$$\to\ y'(x) = y\frac{1-\ln x}{2x^2} = \frac{1-\ln x}{2x^2}(\sqrt{x})^{1/x}.$$

Ответ: $dy = \dfrac{1-\ln x}{2x^2}(\sqrt{x})^{1/x}dx.$

Пример 18.3. *Определить функцию* $y(x)$ *по её дифференциалу* $dy = \ln\sin(x+2)\operatorname{ctg}(x+2)dx.$

Р е ш е н и е: Решение данной задачи проводится внесением функции $\ln\sin(x+2)\operatorname{ctg}(x+2)$ под знак дифференциала.

$$\ln\sin(x+2)\operatorname{ctg}(x+2)dx = \ln\sin(x+2)\frac{\cos(x+2)d(x+2)}{\sin(x+2)} =$$

$$= \ln\sin(x+2)\frac{d\sin(x+2)}{\sin(x+2)} = \ln\sin(x+2)d\ln\sin(x+2) = d\frac{\ln^2\sin(x+2)}{2}.$$

Ответ: $y = \dfrac{\ln^2\sin(x+2)}{2}.$

Пример 18.4. *В какой точке* $M_0(x_0; y_0)$ *кривой* $y^2 = 2x^3$ *касательная* T *перпендикулярна к прямой* $4x - 3y + 2 = 0$*?*

Р е ш е н и е: Заданная кривая является графиком двух функций $y = \sqrt{2x^3}$ и $y = -\sqrt{2x^3}$ (рис. 104).

Очевидно, что искомая точка находится на графике функции $y = -\sqrt{2x^3}$. Из уравнения прямой $4x - 3y + 2 = 0$ находим угловой коэффициент $K = \dfrac{4}{3}$. Так как по условию задачи искомая касательная

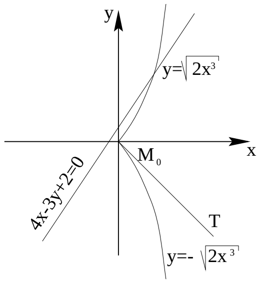


Рис. 104. *К решению примера 18.4*

$\perp$ заданной прямой $K \cdot K_T = -1$ и, следовательно, $K_T = -\dfrac{1}{K} =$ $= -\dfrac{3}{4}$; с другой стороны $K_T = (-\sqrt{2x^3})'_{M_0} = -\dfrac{3\sqrt{2x_0}}{2}$. Приравнивая эти значения K_T получаем $-\dfrac{3\sqrt{2x_0}}{2} = -\dfrac{3}{4} \to x_0 = \dfrac{1}{8}$, $y_0 = -\dfrac{1}{16}$. Уравнение касательной T к кривой $y = -\sqrt{2x^3}$ в точке $M_0\left(\dfrac{1}{8}; -\dfrac{1}{16}\right)$ будет $y_T = -\dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{4}(x - \dfrac{1}{8}) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{32}$

Ответ: $M_0\left(\dfrac{1}{8}; -\dfrac{1}{16}\right)$.

Пример 18.5. *Используя правило Лопиталя, найти пределы:*

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{7}{x^7-1}\right)$ *и 2.* $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos k\alpha)^{\dfrac{1}{\alpha^2}}$.

Р е ш е н и е:

1. В данном задании мы имеем дело с неопределённостью типа $+\infty - \infty$, которую необходимо перевести в неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$, а затем дважды применить правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{7}{x^7-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{5(x^7-1) - 7(x^5-1)}{(x^5-1)(x^7-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{5\cdot 7x^6 - 7\cdot 5x^4}{5x^4(x^7-1) + 7x^6(x^5-1)} == \lim_{x\to 1}\frac{35(x^2-1)}{12x^7 - 7x^2 - 5} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{35 \cdot 2x}{12 \cdot 7x^6 - 7 \cdot 2x} = 1.$$

Ответ: 1.

2. В этом задании мы встретились с неопределённостью типа $1^{+\infty}$, для раскрытия которой необходимо вначале прологарифмировать заданную функцию $y = (\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}$, найти предел $\ln y$ при $\alpha \to 0$, используя правило Лопиталя, а затем вернуться к искомому пределу.

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos k\alpha}{\alpha^2} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos k\alpha}(-\sin k\alpha)}{2\alpha} = -\lim_{x\to 0} \frac{k}{2\cos k\alpha} \lim_{x\to 0} \frac{\sin k\alpha}{\alpha} =$$

$$= -\frac{k^2}{2} \to \lim_{x\to 0} (\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}} = e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

Ответ: $e^{-\frac{k^2}{2}}$

Самостоятельная работа

Пример 18.6. *Найти $y'(1)$,*

$$y = e^{\sqrt{x}} \ln^2 \operatorname{tg}(x^2 + x + 3) + \frac{x}{5\sin x}.$$

Пример 18.7. *Найти дифференциал функции $y(x)$*

$$y = \left(\frac{x}{a}\right)^{ax}.$$

Пример 18.8. *Определить функцию $y(x)$ по её дифференциалу*

$$dy = x^2 e^{x^3} dx.$$

Пример 18.9. *Показать, что кривые $y_1 = 4x^2 + 2x - 8$ и $y_2 = x^3 - x + 10$ касаются друг друга в точке $(3; 34)$. Будет ли касание в точке $(-2; 4)$?*

Пример 18.10. *Используя правило Лопиталя найти пределы:*

$$a) \quad \lim_{x\to +0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(x + e^x),$$

$$b) \quad \lim_{x\to+0}\Big(\operatorname{ctg}2x\Big)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Лекция 19. Формула и ряд Тейлора

Многочлен Тейлора.Формула Тейлора. Ряд Тейлора. Формулы и ряды Тейлора для некоторых элементарных функций и использование их для вычисления пределов и в приближённых вычислениях.

Формула и ряд Тейлора[9] относятся к числу важнейших понятий математического анализа. Они широко используются в математике. В частности, в этом семестре мы будем использовать их при исследовании функций, приближённом вычислении значений функций, численном решении уравнений и оценке возникающих при этом ошибок.

19.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0. Построим многочлен степени $m < n$

$$P_m(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + \dots + C_m(x-x_0)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k(x-x_0)^k, \tag{19.1}$$

коэффициенты которого определим из условия совпадения значений этого многочлена и его m производных с соответствующими значениями функции $y = f(x)$ и её производных в точке x_0.

$$\begin{cases} P_m(x_0) = C_0 = f(x_0), \\ P'_m(x_0) = C_1 = f'(x_0), \\ P''_m(x_0) = 2\cdot 1\cdot C_2 = f''(x_0), \\ P'''_m(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3 = f'''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^{(k)}_m(x_0) = k\cdot(k-1)...2\cdot 1\cdot C_k = f^{(k)}(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^{(m)}_m(x_0) = m\cdot(m-1)...2\cdot 1\cdot C_m = f^{(m)}(x_0). \end{cases} \tag{19.2}$$

[9]Б. Тейлор(1685–1731) – английский математик.

Члены в производных от многочлена (19.1), содержащие множитель $(x - x_0)$ в точке x_0, равны нулю. Производные порядка выше m от многочлена m-й степени также равны нулю. Из (19.2) имеем

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \ldots, m. \tag{19.3}$$

В (19.3) положено $0! = 1, f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Следовательно, искомый многочлен (19.1) с коэффициентами C_k, определяемыми по формуле (19.3), будет

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m = \tag{19.4}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Определение 19.1. *Многочлен (19.4) называется m-м многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.*

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени m, то запись ее в виде (19.4) всегда возможна и означает лишь представление данного многочлена по степеням разности $(x - x_0)$.

Пример 19.1. *Представить функцию $f(x) = x^2$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x - 3)$.*

Р е ш е н и е: Имеем $f(3) = 9, f'(3) = 6, f''(3) = 2$. Все производные выше второго порядка от $f(x) = x^2$ равны нулю. Следовательно, многочлен Тейлора при $x_0 = 3$ для $f(x) = x^2$ имеет вид

$$P_2(x) = 9 + 6(x - 3) + (x - 3)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, очевидно, получим данную функцию $f(x) = x^2$.

Пример 19.2. *Пусть $f(x) = (a + x)^m$ и $x_0 = 0$.*

Тогда по (19.4)

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{((a + x)^m)^{(k)}_{x=0}}{k!}\, x^k = (a + x)^m,$$

где

$$((a + x)^m)^{(k)} = m(m - 1) \ldots (m - k + 1)(a + x)^{m-k}_{x=0} =$$
$$= m(m - 1) \ldots (m - k + 1)\, a^{m-k}$$

есть k-я производная от $(a+x)^m$ в точке $x=0$. Положив теперь $x=b$, получим формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\,a^{m-k}b^k = a^m+ma^{m-1}b+ \tag{19.5}$$

$$+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\,a^{m-k}b^k+\dots+mab^{m-1}+b^m,$$

которую мы использовали в лекции 6 при выводе предела

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

19.2. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ не является многочленом, её всегда можно представить в виде

$$f(x) = P_m(x)+R_m(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_m(x). \tag{19.6}$$

Определение 19.2. *Формула (19.6) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, а $R_m(x)$ называется m-м остаточным членом формулы Тейлора и определяет отличие $f(x)$ от многочлена Тейлора (19.4).*

Будем искать остаточный член в виде, подобном $m+1$-му члену

$$R_m(x) = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}\,Q(x), \tag{19.7}$$

где функция $Q(x)$ неизвестна. Выразим её через $f^{(m+1)}(x)$.

Поскольку многочлен $P_m(x)$ определен на основании (19.2), то из (19.6) получаем

$$R_m(x_0) = R'_m(x_0) = \dots = R_m^{(m)}(x_0) = 0, R_m^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x),$$

т.к. $P_m^{(m+1)}(x)=0$. Обозначим $\varphi(x) = (x-x_0)^{m+1}$. Очевидно, что

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(m)}(x_0) = 0, \varphi^{(m+1)}(x) = (m+1)!.$$

Функции $R_m(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0,x]$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши, приведённой в лекции 17. Следовательно, на основании этой теоремы и указанных выше свойств функций $R_m(x)$ и $\varphi(x)$,

$$\frac{R_m(x)}{\varphi(x)} = \frac{R_m(x) - R_m(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{R'_m(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

где $x_1 \in (x_0, x)$. Применяя теперь теорему Коши к $R'_m(x_1)$ и $\varphi'(x_1)$ и последующим их производным, получим

$$\frac{R'_m(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R'_m(x_1) - R'_m(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{R''_m(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \dots =$$

$$= \frac{R_m^{(m)}(x_m)}{\varphi^{(m)}(x_m)} = \frac{R_m^{(m)}(x_m) - R_m^{(m)}(x_0)}{\varphi^{(m)}(x_m) - \varphi^{(m)}(x_0)} = \frac{R_m^{(m+1)}(x_{m+1})}{\varphi^{(m+1)}(x_{m+1})},$$

где $x_{k+1} \in (x_0, x_k), k = 1, 2, \dots, m$. Следовательно,

$$\frac{R_m(x)}{\varphi(x)} = \frac{R_m^{(m+1)}(x_{m+1})}{\varphi^{(m+1)}(x_{m+1})} = \frac{f^{(m+1)}(x_{m+1})}{(m+1)!},$$

где последнее соотношение получено на основании рассмотренных выше свойств функций $R_m(x)$ и $\varphi(x)$.

Обозначив $x_{m+1} = \xi$, имеем

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,\varphi(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,(x - x_0)^{m+1}.$$

Следовательно, искомая функция $Q(x) = f^{(m+1)}(\xi)$.

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,(x - x_0)^{m+1}, \tag{19.8}$$

где $\xi \in (x_0, x)$ и вся неопределенность остаточного члена, т. е. отличие нашей функции $f(x)$ от многочлена $P_m(x)$, заключена в неизвестном значении ξ. Положив для удобства $m + 1 = n$, формулу (19.6) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x - x_0)^n. \tag{19.9}$$

Определение 19.3. *Формула (19.9) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа*

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x - x_0)^n, \tag{19.10}$$

в которой точка $\xi \in (x_0, x)$ не определена и зависит от x и n. Формула (19.9) при $x_0 = 0$ является представлением функции $f(x)$ в виде многочлена в окрестности начала координат и часто называется формулой Маклорена[10].

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n, \tag{19.11}$$

где положено $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$.

При x близком к x_0, остаточный член является, очевидно, неизвестной бесконечно малой величиной порядка n при $x \to x_0$ и формула (19.9) может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k + O((x - x_0)^n), \tag{19.12}$$

где $O(\alpha^n)$ есть обозначение бесконечно малой величины порядка n при $\alpha \to 0$. Выведенные выше формулы (19.9) и (19.12) позволяют сформулировать важную теорему.

Теорема 19.1. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой окрестности непрерывные n производных, то она может быть представлена в виде (19.9) или при $x \to x_0$ по формуле (19.12).*

19.3. Ряд Тейлора

Докажем ещё одну важную теорему.

Теорема 19.2. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой δ-окрестности, т. е. для всех $x \in (|x - x_0| \leqslant \delta)$ непрерывные производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом M, то она разлагается в этой окрестности точки x_0 в сходящийся к $f(x)$ степенной ряд.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x - x_0)^n. \tag{19.13}$$

Доказательство: По условиям теоремы $|f^{(n)}(x)| \leqslant M, n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда из (19.10):

$$|R_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M}{n!}\, |x - x_0|^n \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \tag{19.14}$$

[10] К. Маклорен(1698-1746) – шотландский математик.

Приведённая оценка (19.14) получена на основании того, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ для любого a. Следовательно, формула (19.9) переходит в ряд (19.13), что и доказывает теорему (19.2).

Определение 19.4. *Ряд (19.13), к которому по теореме (19.2) сходится функция $f(x)$, называется рядом Тейлора.*

Для $x_0 = 0$ соответствующий ряд (19.13) часто называют рядом Маклорена .

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n. \tag{19.15}$$

Покажем, что выведенная в лекции 17 формула Лагранжа (17.4), или формула конечных приращений, является частным случаем формулы Тейлора (19.9) при $n = 1$.

Действительно, из (19.9) при $n = 1$ следует

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0). \tag{19.16}$$

Положив $x_0 = a$ и $x = b$, получим $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$,где $\xi\in(a,b)$. Это и есть формула конечных приращений Лагранжа.

Рассмотрим представление по формуле Тейлора (19.9) (чаще всего это будет формула Маклорена (19.11)) и разложение в ряд Тейлора (19.13) или Маклорена (19.15) некоторых элементарных функций и определим их области сходимости.

19.4. Показательная функция $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

Так как $x_0 = 0$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, $f^{(n)}(\xi) = e^{\xi}$, то по формуле (19.11):

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}\cdot x^n, \tag{19.17}$$

где $0 < \theta < 1$.

Поскольку для функции $f(x) = e^x$ при любом $x = N \in (-\infty, +\infty)$ производные любого порядка $f^{(n)}(x) = e^N$ ограничены одним и тем же числом $M = e^N$, то по теореме (19.2) предыдущей лекции формула (19.17) переходит в соответствующий ряд Маклорена:

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}, \tag{19.18}$$

который сходится к e^x на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 19.3. *Вычислим* $e^{-1} = 1/e$ *с точностью до* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: По (19.18) при $x = -1$,

$$1/e = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Это знакочередующийся ряд и по теореме Лейбница остаток ряда не превышает своего первого члена. Следовательно, ошибка при вычислении величины e^{-1} не больше первого из отброшенных членов ряда её представляющего

$|\frac{(-1)^n}{n!}| \leqslant \varepsilon, n! \geqslant 1/\varepsilon = 10^4$, откуда $n = 8$, т. к. $8! = 40320 > 10^4$.

Итак, $1/e = 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 + 1/720 - 1/5040 = 0,3679$.

Первый из неучитываемых членов $\dfrac{(-1)^8}{40320} < 0,25 \cdot 10^{-4}$.

Пример 19.4. *Вычислить число* e *с точностью до* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: Ряд Маклорена (19.18) при $x = 1$ будет знакоположительным и для оценки ошибки вычисления числа e надо воспользоваться формулой (19.17). Оценим величину остаточного члена $\dfrac{e^\theta x}{n!}\, x^n$ при $x = 1$:

$$\varepsilon = e^\theta/n! < e/n! < 3/n!, \quad n! > 3 \cdot 10^4,$$

т.е. $n = 8$, как и в примере 19.3. Следовательно, с заданной точностью

$$e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 = 2,7183.$$

19.5. Функция $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

Как показано в лекции 16 $f^{(k)}(x) = \sin(x+\pi k/2),\ f^{(k)}(0) = \sin(\pi k/2)$. Так как $|\sin(x + \pi k/2)| \leqslant 1$ и, следовательно, все производные $f(x)$ не превышают единицу, по теореме (19.2) предыдущей лекции $\sin x$ разлагается в сходящийся к ней на $(-\infty, +\infty)$ ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (19.19)$$

19.6. Функция $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0$

Продифференцировав обе части (19.19), получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \tag{19.20}$$

В качестве примера рассмотрим применение разложений (19.19) и (19.20) к нахождению предела.

Пример 19.5. *Показать, что*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2}\ .$$

Р е ш е н и е: Из (19.20) имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

и, следовательно,

$$\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{1 - \dfrac{m^2x^2}{2} + O(x^4) - 1 + \dfrac{n^2x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} =$$

$$= \frac{n^2 - m^2}{2} + \frac{O(x^4)}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2} + O(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{n^2 - m^2}{2}.$$

19.7. Функция $f(x) = (1 + x)^m, \quad x_0 = 0$

Здесь

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$
$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1).$$

Запишем формально ряд Маклорена для этой функции

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}\, x^k, \tag{19.21}$$

где m – любое действительное число. Определим радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(n+1)!}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(m-n)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

Следовательно, правая часть формулы (19.21) есть сходящийся при $|x| < 1$ ряд и, как показывается, он сходится к функции $(1+x)^m$. Сходимость при $|x| = 1$ необходимо рассматривать отдельно, что мы делать не будем.

Определение 19.5. *Ряд (19.21) для* $(1+x)^m$ *называется биномиальным рядом.*

Используем (19.21) для вычисления предела.

Пример 19.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Р е ш е н и е: Из (19.21) имеем при $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2),$$
$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2).$$

Следовательно,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + O(x)) = 1.$$
Рассмотрим ещё пример приложения биномиального ряда к приближённому вычислению корней $\sqrt[m]{a}$. Прежде всего надо найти число b, близкое к a, из которого корень m-й степени извлекается элементарно, и такое, чтобы их разность была бы, по крайней мере, меньше b.

Тогда $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b+x} = \sqrt[m]{b}\sqrt[m]{1+\dfrac{x}{b}} = \sqrt[m]{b}\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Затем $\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$ необходимо разложить в биномиальный ряд и взять необходимое для нужной точности число членов.

Пример 19.7. *Вычислить* $\sqrt{5}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Р е ш е н и е:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+0.25)} = 2\Big(1+\frac{1}{4}\Big)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 2\Big(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 + \dots\Big).$$

Полученный ряд является знакочередующимся и для того, чтобы вычислить $\sqrt{5}$ с нужной точностью, необходимо учитывать лишь те члены, которые по модулю больше 10^{-3}.

Поэтому $\sqrt{5} = 2 + 0,25 - 0,0156 + 0,0020 = 2.236$.

19.8. Функция $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0$

Для этой функции

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}; \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!.$$

Соответствующий ряд Маклорена примет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \tag{19.22}$$

Он сходится к функции $\ln(1+x)$ на множестве $(-1 < x \leqslant 1)$

Полученный ряд (19.22) можно также использовать для вычисления пределов.

Пример 19.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\ln(1+x)}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 - x + \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Займемся теперь вычислением логарифмов. По формуле (19.22) вычислить логарифмы можно лишь для чисел от 0 до 2. Получим теперь формулу, позволяющую вычислить логарифмы любых положительных чисел.

Заменим в формуле (19.22) x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}. \tag{19.23}$$

Вычтем теперь из равенства (19.22) соотношение (19.23):

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{19.24}$$

Положив $\dfrac{1+x}{1-x} = a$, получим $x = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Формулу (19.24) можно использовать для вычисления логарифмов любых положительных чисел.

Ошибки при вычислении логарифмов с помощью конечного числа членов ряда (19.24) можно оценить следующим образом. По a определим x, затем берем несколько членов в формуле (19.24):

$$\ln a = 2\Big(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big) + r_n. \tag{19.25}$$

Остаток ряда r_n и есть ошибка. Учитывая, что

$$\frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n+3}, \quad \frac{1}{2n+7} < \frac{1}{2n+3} \text{ и т. д., получим}$$

$$r_n = 2\Big(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \ldots\Big) < 2\Big(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+3} + \tag{19.26}$$

$$+\frac{x^{2n+7}}{2n+3} + \ldots\Big) = 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}(1 + x^2 + x^4 + \ldots) = 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\frac{1}{1-x^2}.$$

Так как $|x| < 1$ то $1 + x^2 + x^4 + \ldots$ есть бесконечно убывающая геометрическая последовательность с $q = x^2$, её сумма равна $\dfrac{1}{1-x^2}$

Пример 19.9. *Вычислить* $\ln 3$, *с точностью* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: В формуле (19.24) положим $a = 3$, а $x = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}$.

Тогда по (19.26) должно быть $\dfrac{2\cdot 4}{(2n+3)\cdot 3\cdot 2^{2n+3}} = \dfrac{1}{3(2n+3)\cdot 4^n} < 10^{-4}$.

Это неравенство выполняется при $n = 5$ следовательно,

$$\ln 3 = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} + \frac{11}{3\cdot 2^{11}}\Big) = 1 + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 16} +$$
$$+ \frac{1}{7\cdot 64} + \frac{1}{9\cdot 256} + \frac{1}{11\cdot 1024} = 1{,}0986.$$

Хотя в данной сумме шестое слагаемое и меньше 10^{-4}, его нельзя отбрасывать, так как тогда ошибка будет больше 10^{-4}. Напомним, что только для знакочередующегося ряда ошибка не превышает первого из не учитываемых членов, а в случае знакоположительных рядов ошибку чаще всего оценивают, сравнивая остаток ряда с геометрической убывающей прогрессией, что мы и сделали в нашем примере.

Практическое занятие 19. Формула и ряд Тейлора

В лекциях 18 и 19 получены формулы, дающие представление некоторых функций по формуле Тейлора и рядом Тейлора. На практическом занятии проделаем подобные операции для некоторых других функций, а также воспользуемся разложениями (19.18) – (19.25).

Пример 19.1. *Разложить в ряд Маклорена (19.11) функцию* $f(x) = 3^x$.

Решение: Найдем значение функции $f(x) = 3^x$ и её производных в точке x=0:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 3^x|_{x=0} = 1,\\
&f^I(0) = 3^x \cdot \ln 3|_{x=0} = \ln 3,\\
&f^{II}(0) = 3^x \cdot \ln^2 3|_{x=0} = \ln^2 3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n-1)}(0) = 3^x \cdot \ln^{n-1} 3|_{x=0} = \ln^{n-1} 3,\\
&f^{(n)}(\theta x) = 3^{\theta x} \cdot \ln^n 3.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в формулу (19.11):

$$3^x = 1 + x \cdot \ln 3 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 3}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1} \cdot \ln^{n-1} 3}{(n-1)!} + \frac{3^{\theta x} \cdot \ln^n 3}{n!} \cdot x^n.$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n-1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\theta x} \cdot \ln^n 3}{n!}$$

при любом фиксированном x=C равен нулю. Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\theta C} \cdot \ln^n 3}{n!} C^n < 3^C \lim_{n\to+\infty} \frac{(C \cdot \ln 3)^n}{n!} = 3^C \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!},$$

так как при любом конечном a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. Следовательно, по теореме (19.2) функция $f(x) = 3^x$ представима своим рядом Тейлора (Маклорена) при любых x:

$$3^x = 1 + x \cdot \ln 3 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 3}{2!} + \dots + \frac{x^n \cdot \ln^n 3}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cdot \ln^n 3}{n!}.$$

Это представление можно было бы получить и просто заменой x на $x\ln 3$ в формуле (19.18) и не проделывать все вышеприведённые выкладки.

Пример 19.2. *Представить рядом Маклорена функцию* $f(x) = \cos^2 x$.

Р е ш е н и е: Найдем значения функции $f(x) = \cos^2 x$ и её производных в точке x=0:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = \cos^2 x|_{x=0} = 1,\\
&f^{I}(0) = -2\cos x \sin x|_{x=0} = -\sin 2x|_{x=0} = 0,\\
&f^{II}(0) = -2^2 \cos 2x|_{x=0} = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)|_{x=0} = -2,\\
&f^{III}(0) = 2^2 \sin 2x|_{x=0} = -2^2 \sin\left(2x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)|_{x=0} = 0,\\
&f^{IV}(0) = 2^3 \cos 2x|_{x=0} = -2^3 \sin\left(2x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)|_{x=0} = 2^3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n-1)}(0) = -2^{n-2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-2)\right)|_{x=0},\\
&f^{(n)}(\theta x) = -2^{n-1}\sin\left(2\theta x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right).
\end{aligned}
$$

При любом фиксированном $x = C$ остаточный член в формуле Маклорена для функции $f(x) = \cos^2 x$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Действительно,

$$
\lim_{n\to+\infty} |R_{n-1}(x)| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n-1}\sin\left(2\theta C + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)}{n!}\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n-1}}{n!} = 0.
$$

Таким образом, функция $f(x) = \cos^2 x$ разлагается в ряд Маклорена, сходящийся к ней при любом x:

$\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \dots$

Можно было бы не проделывать все эти вычисления, а воспользоваться формулой $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и разложением (19.20), заменив в нём x на $2x$:

$$
\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x^4)}{4!} - \frac{(2x^6)}{6!} + \dots, \text{ тогда } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) =
$$

$$
= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x^4)}{4!} - \frac{(2x^6)}{6!} + \dots\right) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \dots
$$

В приведённых примерах, мы видим,что если удаётся воспользоваться известными разложениями (19.17) - (19.22), предварительно преобразовав функцию $f(x)$,то результат может быть получен значительно быстрее.

Пример 19.3. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение: Заменив в формуле (19.18) x на x^2, получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Пример 19.4. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Мы здесь воспользовались разложениями функций $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена. Так как они справедливы при любых x,то и полученное нами разложение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ в ряд Маклорена справедливо при любых x.

Пример 19.5. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$.

Решение: Вынесем 4 из-под корня в знаменателе, затем заменим в формуле для биномиального ряда (19.21) x на $\frac{x^2}{4}$ и, положив $m = -\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 4^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 4^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(-1)^n}{n!2^{3n}} x^{2n}\right).$$

Так как биномиальный ряд (19.21) сходится при $|x| < 1$, в нашем случае $\frac{x^2}{4} < 1$, то есть, $-2 < x < 2$.

Пример 19.6. *Разложить в ряд Тейлора по степеням $x-1$ функцию $f(x) = \ln x$.*

Решение: Подставив в формулу (19.22) $x-1$ вместо x, получим:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) =$$
$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Так как ряд Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x)$ сходится при $-1 < x \leqslant 1$, полученный ряд сходится при $0 < x \leqslant 2$.

Пример 19.7. *Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x}\sin x$.*

Решение: Поскольку степенные ряды можно почленно перемножать, ряд для $e^{-x}\sin x$ можно получить почленным перемножением ряда Маклорена для e^{-x} на ряд для $\sin x$:

$$e^{-x}\sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$
$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots$$

Полученный ряд сходится к данной функции на всей числовой оси, поскольку ряды (19.18) для e^{-x} и (19.19) для $\sin x$ сходятся также на всей числовой оси.

Рассмотрим применение формулы и рядов Тейлора к нахождению пределов и приближённому вычислению значений функций.

Как было отмечено в лекции 19, при вычислении некоторых пределов удобно использовать формулу Тейлора в виде (19.12). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 19.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Решение: Непосредственная подстановка $x = 0$ показывает, что данный предел является пределом типа $\frac{0}{0}$. Заменив e^x и $\sin x$ их представлениями по формуле Маклорена (19.18) и (19.19) с точностью до величин $O(x^3)$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+O(x^4)\right)-2-2x-x^2}{x-x+\dfrac{x^3}{3!}+O(x^5)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+O(x^4)}{\dfrac{x^3}{6}+O(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3}+O(x)}{\dfrac{1}{6}+O(x^2)}=2.$$

Здесь использовано, что

$$\frac{O(x^4)}{x^3}=O(x)\ \text{и}\ \frac{O(x^5)}{x^3}=O(x^2),\ \text{а}\ \lim_{x\to 0}O(x)=\lim_{x\to 0}O(x^2)=0.$$

Пример 19.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}$.

Р е ш е н и е: В этом примере также мы имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Подставляя вместо $(1+x)^m$ и $\ln(1+x)$ их представления по формуле Маклорена (19.21) и (19.22), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)-x(1+mx+O(x^2))}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\dfrac{1}{2}+m\right)x^2+O(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-m+O(x)\right)=-\frac{1}{2}-m.$$

Рассмотрим теперь применение полученных нами в лекции 19 формул и рядов Тейлора(Маклорена)к приближённому вычислению функций и оценке ошибки таких вычислений.

Пример 19.10. *Вычислить приближённое значение $\sqrt[3]{e}$, взяв три члена представления функции $f(x)=e^x$ по формуле Маклорена, и оценить ошибку вычисления.*

Р е ш е н и е: Подставив $x=\dfrac{1}{3}$ в формулу (19.18), получим:

$$\sqrt[3]{e}=e^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3^4}+\ldots$$

С учётом трёх членов

$$\sqrt[3]{e} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = 1,388 \cdots \approx 1,39.$$

Ошибка такого вычисления равна остатку ряда

$$R_3(x) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3^3} \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3^2} + ...\right) < \frac{1}{162}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\right) =$$
$$= \frac{1}{162} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{324} < 10^{-2}.$$

Для оценки $R_3(x)$ мы использовали то, что $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 3^2} < \frac{1}{3^2}$ и т.д., и формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии $S = \frac{a_1}{1-q}$ при $a_1 = 1$ и $q = \frac{1}{3}$.

Пример 19.11. *Вычислить приближённое значение* $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$*, взяв три члена разложения функции* $f(x) = e^x$ *в ряд Маклорена.*

Решение: Подставив $x = -\frac{1}{3}$ в формулу (19.18), получим

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Полученный ряд является знакочередующимся и ошибка δ при замене его суммой первых трёх членов не превышает по абсолютной величине четвёртого члена, т.е. $\delta \leqslant \frac{1}{3!3^3} = 0,00617 < 10^{-2}$. Следовательно, $\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = 0,722 \cdots \approx 0,72$.

В этом примере оценка остатка проводится значительно проще, чем в предыдущем, так как можно использовать признак Лейбница для знакочередующегося ряда, а не проводить оценку остаточного члена в формуле Тейлора.

Пример 19.12. *Вычислить* $\sin 18^\circ$ *с точностью до* 10^{-4}.

Решение: Подставим $18^\circ = \frac{\pi}{10} = 0,314159$ вместо x в ряд (19.19):

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 + \cdots \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0,3090.$$

Этот результат получен с точностью до 10^{-4}, так как первый из неучтённых членов $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 < 10^4$.

Пример 19.13. *Вычислите* $\sqrt[3]{70}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Р е ш е н и е: Ближайшее к 70 целое число в кубе равно 64, тогда

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64+6} = 4\sqrt[3]{1+\frac{6}{64}}.$$

Используя выражение для биномиального ряда (19.21) при $m = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{3}{32}$, получим:

$$\sqrt[3]{70} = 4\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{32} - \frac{1\cdot 2\cdot 3^2}{2!3^2\cdot(32)^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 3^3}{3!3^3\cdot(32)^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 3^4}{4!3^4\cdot(32)^4} + \ldots\right) \approx$$

$$\approx 4\left(1 + \frac{1}{64} - \frac{2}{3\cdot 32^2} + \frac{10}{12\cdot 32^3}\right) \approx 4,118.$$

Здесь также первый из неучтённых членов $\frac{4\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{32^4} < 10^{-3}$.

Пример 19.14. *Вычислить* $\ln 5$ *с точностью до* 10^{-3}.

Р е ш е н и е: Для вычисления $\ln 5$ воспользуемся разложением (19.24), положив в нём $\frac{1+x}{1-x} = 5$, откуда $x = \frac{2}{3}$:

$$\ln 5 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2^3}{3\cdot 3^3} + \frac{2^5}{5\cdot 3^5} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2^2}{3\cdot 3^2} + \frac{2^4}{5\cdot 3^4} + \cdots + \frac{2^{2n}}{(2n+1)3^{2n}} + \ldots\right).$$

Если мы не будем учитывать члены ряда, начиная с $\frac{2^{2n}}{(2n+1)3^{2n}}$, то остаток ряда

$$\frac{4}{3}\left(\frac{2^{2n}}{(2n+1)3^{2n}} + \frac{2^{2(n+1)}}{(2n+3)3^{2(n+1)}} + \frac{2^{2(n+2)}}{(2n+5)3^{2(n+2)}} + \ldots\right) =$$

$$
= \frac{4\cdot 2^{2n}}{3\cdot(2n+1)3^{2n}}\left(1+\frac{(2n+1)2^2}{(2n+3)3^2}+\frac{(2n+1)2^4}{(2n+5)3^4}+\ldots\right) <
$$

$$
< \frac{4\cdot 2^{2n}}{3(2n+1)3^{2n}}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots\right) =
$$

$$
= \frac{4\cdot 2^{2n}}{3(2n+1)3^{2n}(1-\frac{4}{9})} = \frac{2^{2n+2}}{5(2n+1)3^{2n-1}}
$$

должен быть меньше 10^{-3}.

При оценке остатка учитывалось, что $\dfrac{2n+1}{2n+3}<1$, $\dfrac{2n+1}{2n+5}<1$ и т.д. и что сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $a_1=1$ и $q=\dfrac{4}{9}$ равна $\dfrac{9}{5}$.

Итак, задача будет решена, если взять $\dfrac{2^{2n+2}}{5(2n+1)3^{2n-1}}<10^{-3}$. Это соотношение выполняется при $n=7$. Следовательно, с нужной нам точностью

$$
\ln 5 = \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{3}\frac{4}{9}+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{4}{9}\right)^3+\cdots+\frac{1}{15}\left(\frac{4}{9}\right)^7\right) = 1,609.
$$

Самостоятельная работа

Пример 19.15. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=2^x$.

Пример 19.16. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=\sin^2 x$.

Пример 19.17. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=e^{2x}$.

Пример 19.18. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Пример 19.19. *Представить рядом Маклорена функцию* $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

Пример 19.20. *Разложить в ряд Тейлора по степеням* $x+1$ *функцию* $f(x)=\ln(2+x)$.

Пример 19.21. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+1)^2}$.

Пример 19.22. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

Пример 19.23. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}$.

Пример 19.24. *Вычислить приближённо* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ *с точностью до* 10^{-4}.

Пример 19.25. *Вычислить* $\cos 1^\circ$ *с точностью до* 10^{-3}.

Пример 19.26. *Вычислить* $\sqrt[5]{250}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Пример 19.27. *Вычислить* $\ln 6$ *с точностью до* 10^{-4}.

Лекция 20. Экстремум и интервалы монотонности функции

Необходимое и достаточное условие монотонности функций. Локальный и глобальный экстремумы функций.

20.1. Необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции

Напомним, что функция $y = f(x)$, определённая на отрезке (или интервале), называется возрастающей (или убывающей) на этом отрезке (интервале), если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_1 и x_2 – любые две точки, принадлежащие сегменту (или интервалу), следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (или $f(x_2) < f(x_1)$).

Обозначив $x_2 - x_1 = \Delta x$ и $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$, получаем, что при $x_2 - x_1 = \Delta x > 0$ для возрастающей функции $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, а для убывающей функции $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y < 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Теорема 20.1.*Необходимое условие возрастания(убывания) функции: если дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то её производная не может быть отрицательной (положительной) ни в одной точке данного интервала, то есть $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для $a < x < b$.*

Доказательство. Проведем его для возрастающей в интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$. Пусть точки x и $x + \Delta x$ принадлежат $(a; b)$, $\Delta x > 0$. Тогда, как было указано выше, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Откуда

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$, так как предел положительной функции не может быть отрицательным, и, следовательно, так как $y = f(x)$ дифференцируема, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$. Аналогично проводится доказательство теоремы для убывающей функции.

Дадим геометрическую иллюстрацию этой теоремы. График возрастающей функции при перемещении вправо по оси абсцисс поднимается вверх. В таком случае, касательные к графику образуют острые углы α с положительным направлением оси x или, быть может, в некоторых точках (например, в точке x_1 рис. 105) параллельны ей. Так как тангенсы острых углов положительны, а в точках, подобных x_1, равны нулю и по геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\ \alpha = f'(x)$, то для возрастающей функции $f'(x) \geqslant 0$.

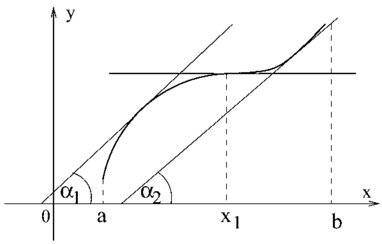


Рис. 105. *Угловой коэффициент касательной возрастающей функции*

Аналогично, если функция убывает, то касательные к графику функции образуют тупые углы α с осью x или в некоторых точках ей параллельны, например, в точке x_2 на рисунке 106. Так как тангенсы тупых углов отрицательны, а в точках, подобных x_2, равны 0, то для убывающей функции $f'(x) \leqslant 0$.

ТЕОРЕМА 20.2. *Достаточное условие возрастания (убывания) функции: Если непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ имеет в каждой внутренней точке этого отрезка положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.*

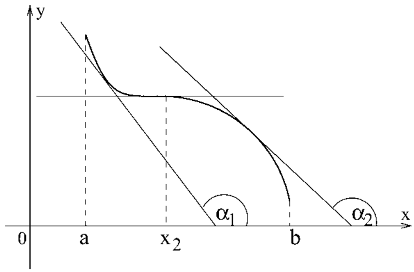


Рис. 106. *Угловой коэффициент касательной убывающей функции*

Доказательство. Проведем доказательство для $f'(x) > 0$. Пусть x_1 и x_2 две произвольные точки из $[a;b]$, причём $x_2 > x$. Применим формулу Лагранжа (17.4) к отрезку $[x_1;x_2]$:

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$, $x_1 < \xi < x_2$.

Так как во всех точках $[a;b]$ производная $f'(x) > 0$, то и $f'(\xi) > 0$.

Кроме того, и $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, и $(x_2 - x_1)f'(\xi) > 0$ и $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Откуда $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция $f(x)$ возрастает на $[a;b]$.

Аналогично доказывается теорема и для $f'(x) < 0$ на $[a;b]$.

Напомним, что *функция только возрастающая или только убывающая в каком-либо интервале называется монотонно возрастающей или монотонно убывающей в этом интервале.*

20.2. Локальный и глобальный экстремумы функций

Определение 20.1. *Экстремумом функции $y = f(x)$ называется её наибольшее или наименьшее значения на некотором множестве значений аргумента x. Наибольшее значение принято также называть максимумом, а наименьшее – минимумом.*

Экстремумы (максимумы и минимумы) бывают локальными и глобальными. Локальные максимумы достигаются в точках x_k, $k = 1;3$ (рис. 107), для которых существует такая окрестность (она может быть сколь угодно малой), что для всех точек из этой окрестности, кроме самой точки x_k, $f(x) < f(x_k)$.

Локальные минимумы достигаются в точках $x_k(k=2;4)$(рис.107), для которых существует такая окрестность (она может быть сколь

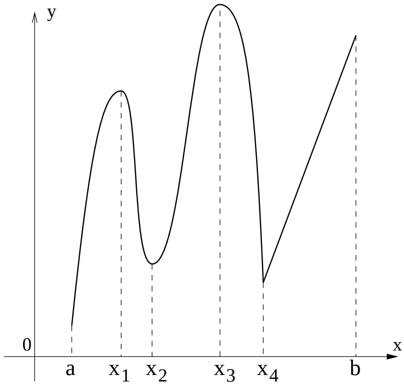


Рис. 107. *Экстремумы функции*

угодно малой), что для всех точек из этой окрестности, кроме самой точки x_k, $f(x) > f(x_k)$.

Замечание 20.1. *В приведённых определениях максимума и минимума вместо строгого неравенства, исключающего точку x_k, может быть введено нестрогое неравенство, включающее точку x_k.*

В дальнейшем мы будем использовать лишь строгое неравенство.

Глобальные экстремумы на $[a;b]$ могут достигаться в точках локальных экстремумов или на границах отрезка.

В дальнейшем мы часто локальные экстремумы (максимумы или минимумы) будем называть просто экстремумами (максимумами или минимумами), а глобальные экстремумы – наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке $[a;b]$. На рисунке 107 экстремумы достигаются в точках x_1, x_2, x_3 и x_4, наименьшее значение в точке a, наибольшее – в точке x_3.

Перейдем к рассмотрению необходимых и достаточных условий существования локальных экстремумов.

Теорема 20.3. *Необходимый признак существования экстремума функции: Если дифференцируемая во внутренней точке $x = x_0$ интервала $(a;b)$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке максимум или минимум, то её производная в этой точке обращается в нуль, то есть $f'(x) = 0$.*

Доказательство: По определению (20.1) максимумом и минимумом называются соответственно наибольшее и наименьшее значения функции и, поскольку, по условию теоремы производная $f'(x)$ в точке x_0 существует, то по теореме Ферма 17.1 она равна 0, $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана. Однако производная в точках экстремума может и не существовать. Например, в точке x_4 на рис. 107. График функции в этой точке имеет излом и производные слева и справа не равны между собой (разрыв на конечную величину).

У функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ производная $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ точке $x = 0$ не существует (бесконечный разрыв), несмотря на это, функция имеет в этой точке максимум (рис. 108).

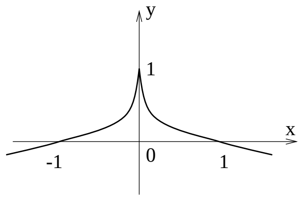


Рис. 108. *График функции* $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

Определение 20.2. *Точки непрерывности функции, в которых производная равна нулю, называются стационарными точками данной функции. Стационарные точки и точки, в которых производная не существует, называются критическими.*

Поэтому можно обобщить необходимый признак существования экстремума, сформулированный в теореме 20.3:

Теорема 20.4. *Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет во внутренней точке x_0 экстремум, то точка x_0 является критической точкой функции.*

Однако не во всякой критической точке существует экстремум. То, что точка x_0 критическая, является лишь необходимым, а не достаточным условием. Например, точка $x = 0$ является критической для $y = x^3$, но экстремума в точке $x = 0$ у этой функции, очевидно, нет.

Для нахождения экстремума прежде всего надо найти критические точки, а затем проверить, выполняются ли в них так называемые достаточные условия, к рассмотрению которых мы и переходим.

Теорема 20.5. *Достаточный признак существования экстремума функции.*

Если точка $x = x_0$ является критической точкой функции $y = f(x)$, и в некоторой δ-окрестности этой точки производная $f'(x)$ слева от этой точки, т.е. при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и справа, т.е. при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ существует, но имеет разные знаки, то $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум. Причём, если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — максимум, если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — минимум.

Доказательство. Пусть x_0 – критическая точка и для определённости $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает в интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и убывает в интервале $(x_0; x_0 + \delta)$. Тогда значение функции в точке x_0 больше значения этой функции в любой точке интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, а это и означает, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум. Теорема доказана.

Аналогично доказывается теорема и для случая минимума.

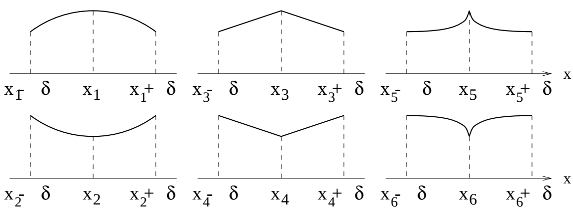


Рис. 109. *Виды экстремумов функции*

График функции в окрестности точек минимума или максимума в случае стационарной точки (точки x_1 и x_2 на рис. 109) имеет вид бугорка или ямки с плавно меняющимся контуром (рис. 109), или контура с изломом для точки, в которой производная не существует (на рис. 109 производные слева и справа в точках x_3 и x_4 не равны, а в точках x_5 и x_6 не существуют).

Пример 20.1. *Исследовать на экстремум функцию $y = f(x) = x^3 - 4x + 2$ и определить её интервалы монотонности.*

Р е ш е н и е: Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

- Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 4$.
- Приравниваем производную к нулю и находим стационарные точки.

  $3x^2 - 4 = 0;\ \ x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

  Эти числа разбивают всю область определения данной функции на три интервала $-\infty < x < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < +\infty$.
- В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак, так как они не содержат более критических точек, а производная может изменять знак только при переходе через критическую точку. Поэтому для исследования знака в каждом интервале можно взять любую точку, а не обязательно вблизи критической точки.

В интервале $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ $f'(x) = 3x^2 - 4 > 0$, так как при достаточно больших x первый член $3x^2$ больше 4.

Аналогично и для интервала $\left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $f'(x) > 0$, так как x входит в $f'(x)$ только как x^2

В интервале $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ удобнее всего положить $x = 0$, тогда $f'(0) = -4 < 0$, поэтому $f'(x)$ во всем интервале $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ отрицательна.

На основании сказанного функция в точке $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ имеет максимум

$$y_{\max} = y\Big(-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = \Big(-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^3 - 4\Big(-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big) + 2 \approx 5,0792,$$

а в точке $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ – минимум.

$$y_{\min} = y\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^3 - 4\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big) + 2 \approx -1,0792.$$

Полученные результаты целесообразно занести в таблицу.

x	$(-\infty; -2/\sqrt{3})$	$-2/\sqrt{3}$	$(-2/\sqrt{3}; 2/\sqrt{3})$	$2/\sqrt{3}$	$(2/\sqrt{3}; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max 5,08	$\searrow$	min $-1{,}08$	$\nearrow$

График функции изображен на рис. 110. Точки ξ_1, ξ_2, ξ_3 пересечения с осью OX определены в лекции 23.

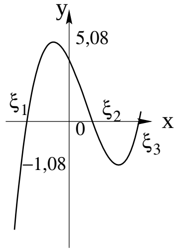


Рис. 110. *График функции* $y = x^3 - 4x + 2$

Рассмотрим ещё один пример, в котором наряду со стационарной точкой будет и точка, в которой производная не существует.

Пример 20.2. *Исследовать на экстремум и определить интервалы монотонности функции* $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$.

Р е ш е н и е: Эта функция определена при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, но, как мы сейчас покажем, не при всех x дифференцируема.

- Находим производную $f'(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{3\sqrt[3]{x^4\,(1-x)^2}} = \dfrac{2 - 3x}{3\sqrt[3]{x\,(1-x)^2}}$.
- Функция имеет одну стационарную точку $x = \dfrac{2}{3}$, в которой $f'(x) = 0$, и две точки $x = 0$ и $x = 1$, в которых производная обращается в бесконечность. Эти точки разбивают всю область определения функции на четыре интервала $-\infty < x < 0$, $0 < x < \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3} < x < 1$, $1 < x < +\infty$, в каждом из которых функция является монотонной.
- Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов. В интервале $-\infty < x < 0$ производная $f'(x) = \dfrac{2 - 3x}{3\sqrt[3]{x\,(1-x)^2}} < 0$,

в чем можно убедиться, непосредственно подставив в $f'(x)$ любое число $x < 0$. Функция убывает в этом интервале, производная $f'(x) > 0$, так как при любом x из этого интервала числитель отрицателен, а знаменатель положителен для всех $x > 0$. Функция возрастает. Аналогично рассуждая, получаем, что в интервалах $\frac{2}{3} < x < 1$ и $1 < x < +\infty$ производная $f'(x) < 0$. Функция убывает. Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет минимум $y_{\min} = 0$, в точке $x = \frac{2}{3}$ – максимум $y_{\max} = $
$= \left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \approx 0,53$. В точке $x = 1$ экстремума нет, $y(0) = 0$.

- Результаты заносим в таблицу

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 1$	1	$1 < x < +\infty$
y'	< 0	$\mp + \infty$	> 0	0	< 0	$-\infty$	< 0
y	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	max $0,53$	$\searrow$	0	$\searrow$

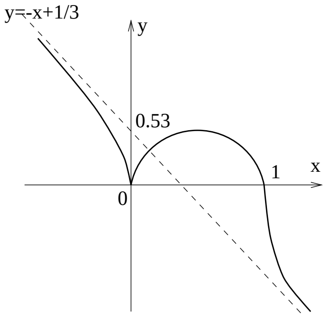


Рис. 111. *График функции* $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

- Строим график функции. Он изображен на рисунке 111. Роль представленной на рисунке прямой $y = -x + \frac{1}{3}$ будет объяснена в лекции 22.

Практическое занятие 20. Исследование функций

Определение интервалов монотонности и экстремумов функций.

Напомним, что для определения интервалов монотонности (интервалы возрастания и убывания) и экстремумов функции прежде всего надо найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, а затем по знаку производной в интервалах между критическими точками определить интервалы монотонности и выделить те критические точки, которые на основании достаточного признака существования экстремума являются точками экстремума функции.

В следующих примерах необходимо определить критические точки, интервалы монотонности и экстремумы функций $y = f(x)$.

Пример 20.1. $\quad y = x^2 - x^3 = x^2 \cdot (1 - x)$.

Р е ш е н и е: Функция определена на всей числовой оси.

- Находим производную $y' = f'(x) = 2x - 3x^2 = x \cdot (2 - 3x)$, которая существует при всех $x \in (-\infty, +\infty)$;
- Приравниваем производную к нулю и находим корни производной:

$$f'(x) = x(2 - 3x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

  Таким образом, функция $y = x^2 - x^3$ имеет две стационарные критические точки, которые разбивают область определения на три интервала монотонности: $(-\infty < x < 0)$, $\left(0; \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.
- Исследуем знаки производной y' в каждом из этих интервалов, взяв для определения знака любую точку соответствующего интервала.

  В интервале $-\infty < x < 0$ производная $y' < 0$, т.к., например, $y'(-1) = -1 \cdot (2+3) = -5 < 0$, функция в этом интервале убывает.

В интервале $0 < x < \dfrac{2}{3}$ производная $y' > 0$, т.к., например, $y'(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{3} \cdot (2 - 3 \cdot \dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{3} > 0$, функция в этом интервале возрастает.

В интервале $\dfrac{2}{3} < x < +\infty$ производная $y' < 0$, т.к., например, $y'(1) = 1 \cdot (2 - 3) = -1 < 0$, функция в этом интервале убывает.

- Так как при переходе критической точки $x = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, в этой точке достигается минимум $y_{min} = y(0) = 0$.

  При переходе критической точки $x = \dfrac{2}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, эта точка есть точка максимума $y_{\max} = y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$.

Полученные результаты занесем в таблицу.

x	$-\infty; 0$	0	$0; \dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3}; +\infty$
y'	< 0	0	> 0	0	< 0
y	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\dfrac{4}{27}$ max	$\searrow$

Пример 20.2. $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$.

Р е ш е н и е: Функция определена при всех $x \in [0; +\infty)$.

- Находим производную $y' = f'(x) = 1 + \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.
- Производная $f'(x) = 1 + \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$ существует при всех $x \geqslant 0$ и нигде в нуль не обращается. Критических точек функция не имеет.
- Очевидно, что $f(x \geqslant 0) = (1 + \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x})|_{x \geqslant 0} > 0$, функция $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$ монотонно возрастает при $x \geqslant 0$.
- Экстремумов нет.

Пример 20.3. $y = 1 + \sqrt[4]{x}$.

Р е ш е н и е: Функция определена при $x \geqslant 0$.

- Находим производную $y' = f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

- Производная $f'(x)$ в точке $x = 0$ не существует. Следовательно, функция $y = 1 + \sqrt[4]{x}$ имеет одну критическую точку $x = 0$, которая является граничной точкой её области существования. Производная определена в интервале $0 < x < +\infty$.
- Очевидно, что $f'(x > 0) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\Big|_{x>0} > 0$, поэтому функция монотонно возрастает в интервале $0 < x < +\infty$.
- Экстремумов нет.

Пример 20.4. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Р е ш е н и е: Функция определена на всей числовой оси.

- Находим производную $y' = f'(x) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.
- Приравниваем производную к нулю:

$$f'(x) = 0, \quad \frac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0, \quad \sqrt[3]{x} = 1, \quad x = 1.$$

Следовательно, $x = 1$ является стационарной критической точкой. Кроме того, в точке $x = 0$ производная не существует, значит и точка $x = 0$ является критической точкой.Эти две критические точки разбивают область существования на три интервала:

$$-\infty < x < 0; \quad 0 < x < 1; \quad 1 < x < +\infty.$$

- Исследуем знаки производной в каждом из этих интервалов:

В интервале $-\infty < x < 0$ производная $y' = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} > 0$, т.к., например, $y'(-1) = \dfrac{2(-1-1)}{-1} = 4 > 0$. Функция в этом интервале возрастает.

В интервале $0 < x < 1$ производная $y' = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} < 0$, т.к. числитель в любой точке этого интервала < 0, а знаменатель > 0. Функция в этом интервале убывает.

В интервале $1 < x < +\infty$ производная $y' = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} > 0$, т.к. в любой точке интервала и числитель, и знаменатель > 0. Функция в этом интервале возрастает.

- Так как при переходе критической точки $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, в ней достигается максимум $y_{\max} = y(0) = 0$.

  При переходе критической точки $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, точка $x = 1$ есть точка минимума $y_{\min} = y(1) = 2 \cdot 1 - 3\sqrt[3]{1} = -1$

Полученные данные занесем в таблицу.

x	$-\infty; 0$	0	$0; 1$	1	$1; +\infty$
y'	> 0	$\pm + \infty$	< 0	0	> 0
y	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$

Пример 20.5. $y = x^3 e^x$.

Р е ш е н и е: Функция определена при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

- Находим производную $y' = f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$, которая существует при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Приравниваем производную к нулю и находим корни производной:

$$f'(x) = 0, \quad x^2 e^x (3 + x) = 0, \quad e^x \neq 0, \quad x = 0, \quad x = -3.$$

  Таким образом, функция $y = x^3 e^x$ имеет две стационарные критические точки $x = 0$ и $x = -3$, которые разбивают область существования на три интервала :

$$-\infty < x < -3; \quad -3 < x < 0; \quad 0 < x < +\infty.$$

- Исследуем знаки производной в каждом из этих интервалов:

  В интервале $-\infty < x < -3$ производная $y' = x^2 e^x (3 + x) < 0$, т.к. $x^2 > 0$; $e^x > 0$; $3 + x < 0$, при $x < -3$. Функция убывает в этом интервале.

  В интервале $-3 < x < 0$ производная $y' = x^2 e^x (3 + x) > 0$, т.к. $x^2 > 0$; $e^x > 0$; $3 + x > 0$, при $-3 < x < 0$. Функция возрастает в этом интервале.

  В интервале $0 < x < +\infty$ производная $y' = x^2 e^x (3+x) > 0$, т.к. $x^2 > 0$; $e^x > 0$; $3 + x > 0$, при $x > 0$. Функция возрастает в этом интервале.

- Так как при переходе критической точки $x = -3$ производная меняет знак с минуса на плюс, в этой точке функция имеет минимум $y_{\min} = y(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -\dfrac{27}{e^3}$.

При переходе второй критической точки $x = 0$ производная не меняет знак. В этой точке экстремума нет.

Занесем все полученные данные в таблицу.

x	$-\infty; -3$	-3	$-3; 0$	0	$0; +\infty$
y'	< 0	0	> 0	0	> 0
y	$\searrow$	$-\dfrac{27}{e^3}$ min	$\nearrow$	экстремума нет	$\nearrow$

Самостоятельная работа

Пример 20.6. $y = x^3 - 3x^2$.

Пример 20.7. $y = x(1 + \sqrt{x})$

Пример 20.8. $y = 1 + \sqrt{x}$.

Пример 20.9. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Пример 20.10. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

Пример 20.11. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Лекция 21. Выпуклость и вогнутость, точки перегиба

Достаточный признак существования экстремума функции по высшим производным. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке (глобальный экстремум). Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

21.1. Достаточный признак существования экстремума функции по высшим производным

В теореме 20.5 предыдущей лекции достаточный признак существования экстремума в критической точке основывался на определении знака производной слева и справа от этой точки.

Рассмотрим теперь ещё одно достаточное условие, в котором участвует производная только в самой критической точке. Критическая точка может быть только стационарной.

ТЕОРЕМА 21.1. *Достаточный признак существования экстремума по высшим производным.*

Пусть в стационарной критической точке x_0 функции $f(x)$ наряду с первой могут обращаться в нуль и последующие производные. Тогда, если первая не обращающаяся в нуль, производная является чётной ($n = 2k$, $k = 1.2\cdots$) и непрерывной, то в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет экстремум. Причём если эта производная $f^{(2k)}(x_0) > 0$, в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет минимум, если же $f^{(2k)}(x_0) < 0$ – максимум. Если же первая не обращающаяся в нуль, производная является нечётной ($n = 2k+1, k = 1, 2, \cdots$) и непрерывной, причём $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 является возрастающей, если же $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ – убывающей.

Доказательство: Пусть для определённости $f^{(2k)}(x_0) > 0$. Покажем, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Согласно формуле Тейлора (19.9) при $n = 2k$ в окрестности точки x_0 при $f'(x_0) = \cdots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ имеем :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}\left(x - x_0\right)^{2k}, \tag{21.1}$$

причём $\left(x - x_0\right)^{2k} > 0$ при любых x. Поскольку $f^{(2k)}(x_0) > 0$, в силу непрерывности всегда найдется такая окрестность точки x_0, что для точки ξ, принадлежащей этой окрестности, $f^{(2k)}(\xi) > 0$ и, следовательно, в этой окрестности $\dfrac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}\left(x - x_0\right)^{2k} > 0$. Таким образом, доказано, что всегда существует некоторая окрестность точки x_0, в которой на основании (21.1) $f(x) > f(x_0)$. Следовательно, функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум. Аналогично доказывается, что если $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум.

Пусть теперь $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$. Покажем, что в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является возрастающей.

Согласно формуле Тейлора (19.9) при $n = 2k + 1$ в окрестности точки x_0 при $f'(x_0) = \cdots = f^{(2k)}(x_0) = 0$ имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}\left(x - x_0\right)^{2k+1}. \tag{21.2}$$

В силу непрерывности всегда найдется такая окрестность точки x_0, в которой для любой её точки ξ будет выполняться условие $f^{(2k+1)}(\xi)>0$, а $(x-x_0)^{2k+1}$ будет иметь разные знаки при $x > x_0$ и $x < x_0$. Следовательно, при $x > x_0$:

$$\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1} > 0,$$

а при $x < x_0$:

$$\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1} < 0.$$

Таким образом, доказано, что всегда существует некоторая окрестность точки x_0, в которой на основании (21.2) $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ и

$f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$. И, следовательно, в этой окрестности функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично доказывается, что если $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ убывает.

Пример 21.1. *Существует ли экстремум у функции $f(x) = x^4$?*

Р е ш е н и е: Вычисляем первую производную $f'(x) = 4x^3$. Она обращается в нуль при $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ является стационарной критической точкой.

При $x = 0$ обращаются в нуль также $f''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$,
$f'''(0) = 24x|_{x=0} = 0$, но четвертая производная $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Следовательно, функция $f(x) = x^4$ в точке $x = 0$ имеет экстремум, а именно минимум.

Пример 21.2. *Существует ли экстремум у функции $f(x) = x^5$?*

Р е ш е н и е: По аналогии с предыдущим примером имеем
$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, а $f^{(5)}(0) = 120 > 0$. Следовательно, экстремума нет, а функция $f(x) = x^5$ является монотонно возрастающей при всех x.

Очевидно, что любая парабола чётной степени $y = x^{2k}$ имеет минимум в точке $x = 0$, а любая парабола нечётной степени $y = x^{2k+1}$ является на интервале $(-\infty; +\infty)$ возрастающей функцией.

Наиболее часто встречается случай, когда первая не обращающаяся в нуль в стационарной точке производная является второй. Тогда теорема (21.1) для этого частного случая может быть сформулирована так:

Теорема 21.2. *Пусть x_0 стационарная точка функции $f(x)$, и в точке x_0 существует непрерывная вторая производная $f''(x) \neq 0$.*

Тогда если $f''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка минимума.

Применим этот критерий к примерам, рассмотренным ранее.

Пример 21.3. *Найти экстремум функции $y = f(x) = x^3 - 4x + 2$, используя теорему (21.2).*

Решение: Обе критические точки этой функции $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ являются стационарными точками. Вторая производная $f''(x) = 6x$ в первой из них $f''\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{12}{\sqrt{3}} < 0$. Следовательно, точка $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ является точкой максимума, во второй точке $f''\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{12}{\sqrt{3}} > 0$ и, таким образом, точка $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ является точкой минимума.

Пример 21.4. *На основании теоремы (21.2) исследовать критические точки функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.*

Решение: Из трёх критических точек этой функции лишь одна $x = \dfrac{2}{3}$ является стационарной, и лишь к ней применима теорема (21.2). $f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4(1-x)^5}} = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^5}} < 0$ и, следовательно, точка $x = \dfrac{2}{3}$ для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ является точкой максимума.

21.2. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке (Глобальный экстремум)

Как уже говорилось в пункте (6.4.2) предыдущей лекции, глобальный экстремум на отрезке $[a; b]$ может достигаться или в критических точках интервала $(a; b)$, или в граничных $x = a$ и $x = b$. Таким образом, чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$, необходимо:

- найти все критические точки x_k в интервале $(a; b)$ и значения функции $f(x)$ в этих точках $f(x_k)$,
- найти значения функции $f(x)$ на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$,
- выбрать наибольшее значение M и наименьшее значение m из всех $f(x_k)$ и $f(a)$ и $f(b)$.

Очевидно, что для этой задачи нет необходимости даже знать, являются ли точки x_k точками экстремума функции.

Пример 21.5. *Найти M и m функции $f(x) = x^3 - 4x + 2$ на отрезках* $[0; 1]\,, [-1; 1]\,, [-2; 2]$.

Решение: Из примера 20.1 предыдущей лекции определяем, что в интервале $(0; 1)$ критических точек у данной функции нет, определяем значения функции $f(x)$ на границах отрезка $f(0) = 2, f(1) = -1$. Следовательно, $M = f(0) = 2, m = f(1) = -1$ достигается на границах отрезка $[0; 1]$.

В интервале $(-1; 1)$ критических точек также нет, и так как $f(-1) = 5, f(1) = -1$, то $M = f(-1) = 5, m = f(1) = -1$. Рассмотрим теперь отрезок $[-2; 2]$. В интервале $(-2; 2)$ имеются две критические точки $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, значение функции в которых $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 5,0792$ и $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx -1,0792$. Сравнивая эти значения со значениями функции на границах отрезка $f(-2) = 2$ и $f(2) = 2$, имеем, что наибольшее значение $M = f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и наименьшее значение $m = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ достигается во внутренних точках отрезка $[-2; 2]$.

21.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Введем понятие выпуклости и вогнутости кривой.

Определение 21.1. *Кривая, являющаяся графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$, называется выпуклой в интервале $(a; b)$, если она расположена ниже касательной, проведённой к ней в любой точке x_0 этого интервала (рис. 112).*

Определение 21.2. *Кривая, являющаяся графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$, называется вогнутой в интервале $(a; b)$,*

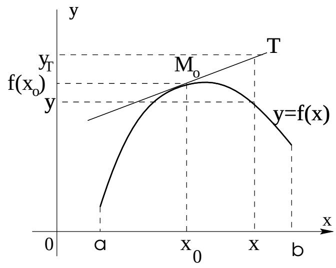


Рис. 112. *График выпуклой функции*

если она расположена выше касательной, проведенной к ней в любой точке x_0 этого интервала (рис. 113).

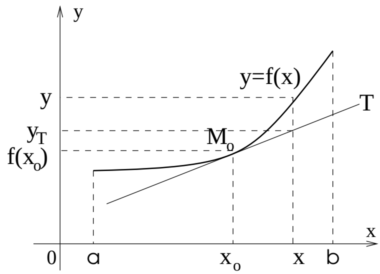


Рис. 113. *График вогнутой функции*

Определение 21.3. *Точка x_0 называется точкой перегиба кривой, если существует такая её окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в которой с одной стороны от точки x_0 кривая выпуклая, а с другой – вогнутая.*

Так, изображённая на рис. 114 кривая $y = f(x)$ – вогнутая в интервале $(a; x_0)$ и выпуклая в интервале $(x_0; b)$, а точка x_0 является точкой перегиба кривой.

Теорема 21.3. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый, если $f''(x) > 0$ – вогнутый.*

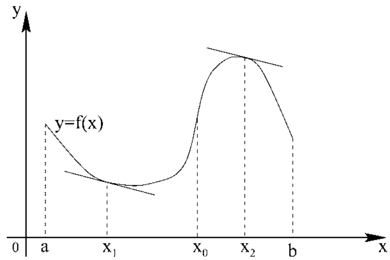


Рис. 114. *Точка перегиба функции*

Доказательство. Возьмём на графике функции произвольную точку M_0 с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ и проведем через точку M_0 касательную T к кривой $y = f(x)$ (рис. 112 и 113). Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0:

$$y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{21.3}$$

Представим теперь функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора (19.9)) при $n = 2$:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2. \tag{21.4}$$

Из сравнения формул (21.3) и (21.4) видно, что

$$y = y_T + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2. \tag{21.5}$$

Из формулы (21.5) следует доказательство теоремы.

Действительно, если в точке $x \in (a; b)$ вторая производная $f''(x)<0$, то поскольку ξ заключено между x и x_0, то по условию теоремы и $f''(\xi) < 0$, а следовательно, из (21.5) следует, что $y < y_T$. Это означает, что график функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ расположен ниже касательной T и, следовательно, является выпуклым в этом интервале (рис. 112).

Аналогично доказывается, что, если $f''(x) > 0$ в интервале $(a; b)$, кривая $y = f(x)$ располагается выше касательной T, проведённой в любой точке M_0 с абсциссой $x_0 \in (a; b)$, и является вогнутой (рис. 113).

Пример 21.6. *Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^{2k}$.*

Р е ш е н и е: Вторая производная $y'' = 2k(2k-1)x^{(2k-2)} > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$. Следовательно, параболы чётной степени вогнуты при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 21.7. *Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции* $y = x^{(2k-1)}$.

Р е ш е н и е: Вторая производная $y'' = 2(k-1)(2k-2)x^{(2k-3)} < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, парабола нечётной степени выпукла при $x < 0$ и вогнута при $x > 0$.

Пример 21.8. *Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции* $y = x^3 - 4x + 2$.

Р е ш е н и е: Вторая производная $y'' = 6x < 0$ при $x < 0$ и $y'' = 6x > 0$ при $x > 0$. Следовательно, график этой функции является выпуклым при $x < 0$ и вогнутым при $x > 0$ (рис. 110).

Пример 21.9. *Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции* $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

Р е ш е н и е: Вторая производная $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4(1-x)^5}}$ меняет знак при переходе через точку $x = 1$, именно $f''(x) < 0$ при $x < 1$ и $f''(x) > 0$ при $x > 1$. Следовательно, график этой функции является выпуклым при $x < 1$ и вогнутым при $x > 1$ (рис. 111).

Теорема 21.4. *Необходимое условие существования точки перегиба графика дифференцируемой функции: если* x_0 *есть точка перегиба кривой* $y = f(x)$ *и* $f''(x_0)$ *существует, то* $f''(x_0) = 0$.

Доказательство этой теоремы очевидно следует из теоремы 21.3.

Естественно, что точкой перегиба может также являться точка, в которой вторая производная не существует.

Точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует, являются критическими точками по второй производной. И если точки перегиба существуют, их надо искать среди этих точек.

Сформулируем теперь достаточные условия существования точки перегиба.

Теорема 21.5. *Если в точке* x_0 *вторая производная функции* $y = f(x)$ *равна нулю или не существует и существует такая окрестность этой точки* $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, *в которой с одной стороны от точки* x_0 *вторая производная* $f''(x) > 0$, *а с другой* $f''(x) < 0$, *то это есть точка перегиба.*

Доказательство. Пусть для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ вторая производная $f''(x) > 0$, а для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ вторая производная $f''(x) < 0$. Это означает, что слева от x_0 кривая $y = f(x)$ вогнутая, а справа выпуклая. А это есть определение точки перегиба кривой.

Теорема 21.6. *Достаточное условие существования точки перегиба дифференцируемых функций: Пусть в точке x_0 вторая производная $f''(x) = 0$, а также последующие производные могут обращаться в ноль, и пусть первая не обращающаяся в ноль производная нечётная и непрерывная, тогда точка x_0 есть точка перегиба.*

Теорема доказывается аналогично теореме 21.1.

Рассмотрим примеры 21.6 – 21.9. Очевидно из примера 21.6 следует, что парабола чётной степени $y = x^{2k}$ не имеет точек перегиба, из примера 21.7 – парабола нечётной степени $y = x^{(2k+1)}$ имеет единственную точку перегиба $x = 0$. Эта же точка $x = 0$ является точкой перегиба кривой $y = x^3 - 4x + 2$ из примера 21.8.

Как видно из примера 21.9, кривая $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ также имеет единственную точку перегиба, в которой вторая производная не существует, это точка $x = 1$, у кривой ещё существует одна точка, в которой $f''(x)$ не существует, это $x = 0$. Однако она не является точкой перегиба кривой, т.к. $f''(x)$ слева и справа от неё имеют один знак.

Найденные интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функций $y = x^3 - 4x + 2$ и $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ записаны в таблицы.

Таблица для функции $y = x^3 - 4x + 2$.

x	$-\infty; 0$	0	$0; +\infty$
y''	< 0	0	> 0
график $y = f(x)$	выпуклый	точка перегиба	вогнутый

Таблица для функции $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

x	$-\infty; 0$	0	$0; 1$	1	$1; +\infty$
y''	< 0	$-\infty$	< 0	$\mp + \infty$	> 0
график $y = f(x)$	выпуклый		выпуклый	точка перегиба	вогнутый

Практическое занятие 21. Выпуклость и вогнутость, точки перегиба

Применим теперь достаточный признак существования экстремума по высшим производным к исследованию функций в стационарных критических точках, а также определим области выпуклости и вогнутости и точки перегиба функций из примеров, рассмотренных на предыдущем практическом занятии.

Пример 21.1. $y = x^2 - x^3$.

Р е ш е н и е:

- Найдем вторую производную $y' = f'(x) = 2x - 3x^2$, $y'' = f''(x) = 2 - 6x$.
- Функция имеет две стационарные критические точки $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$. Определим знаки второй производной в этих точках.
  $f''(0) = 2 > 0$. Точка $x = 0$ является точкой минимума.
  $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 6 \cdot \frac{2}{3} = -2 < 0$. Точка $x = \frac{2}{3}$ является точкой максимума.
- Определим корни второй производной $f''(x) = 0$, $2 - 6x = 0$, $x = \dfrac{1}{3}$. Точка $x = \dfrac{1}{3}$ разбивает область определения функции на два интервала :

$$-\infty < x < \frac{1}{3},\ \frac{1}{3} < x < +\infty.$$

- Исследуем знаки второй производной в этих интервалах.
  В интервале $-\infty < x < \dfrac{1}{3}$, $f''(x) > 0$, как мы видели, $f''(0) = 2 > 0$— функция вогнута в этом интервале.
  В интервале $\dfrac{1}{3} < x < +\infty$, $f''(x) < 0$, в частности, как было показано, $f''(\dfrac{2}{3}) < 0$— функция выпуклая в этом интервале.
- Так как при переходе точки $x = \dfrac{1}{3}$ вторая производная меняет знак, точка $x = \dfrac{1}{3}$ является точкой перегиба.

Составим таблицу

x	$-\infty; \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}; +\infty$
y''	>0	0	<0
график $y=f(x)$	вогнутый	точка перегиба $y=\frac{2}{27}$	выпуклый

Пример 21.2. $y = x(x + \sqrt[4]{x})$.

Р е ш е н и е:

- Найдем вторую производную $y'' = f''(x) = \dfrac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}$.
- В этом случае критических точек нет.
- Вторая производная нигде в ноль не обращается, в точке $x = 0$, находящейся на границе области определения, она не существует.
- В области определения (при $x > 0$) вторая производная больше нуля, график функции вогнутый.
- Точек перегиба нет.

Составлять таблицу в данном примере излишне.

Пример 21.3. $y = 1 + \sqrt[4]{x}$.

Р е ш е н и е:

- Найдем вторую производную $y'' = f''(x) = -\dfrac{3}{16\sqrt[4]{x^7}}$.
- Имеется одна критическая тока $x = 0$, производная в которой не существует.
- Вторая производная нигде нулю не равна. В точке $x = 0$, находящейся на границе области определения функции, она не существует.
- В области определения (при $x > 0$) вторая производная меньше нуля, график функции выпуклый.
- Точек перегиба нет.

Составлять таблицу в примере излишне.

Пример 21.4. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Р е ш е н и е:

- Найдем вторую производную

$$y' = f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x}}, \quad y'' = f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

- Имеется одна стационарная критическая точка $x = 1$. В этой точке вторая производная $f''(1) = \left.\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}\right|_{x=1} = \dfrac{2}{3} > 0$. Следовательно, в точке $x = 1$ функция имеет минимум. Во второй критической точке $x = 0$ функция не дифференцируема.
- Вторая производная нигде нулю не равна. В точке $x = 0$ вторая производная не существует, эта точка разбивает область определения функции на два интервала:

$$-\infty < x < 0, \text{ и } \quad 0 < x < +\infty.$$

- В интервале $-\infty < x < 0$ вторая производная $f''(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} > 0$ – график функции вогнутый.

  В интервале $0 < x < +\infty$ также $f''(x) > 0$ и график функции вогнутый.
- Поскольку при переходе точки $x = 0$ вторая производная не меняет знак, точка $x = 0$ не является точкой перегиба.

Составим таблицу

x	$-\infty; 0$	0	$0; +\infty$
y''	> 0	$+\infty$	> 0
график $y = f(x)$	вогнутый	точки перегиба нет	вогнутый

Пример 21.5. $y = x^3 e^x$.

Р е ш е н и е:

- Найдем вторую производную

$$y' = f'(x) = x^2 e^x (3 + x), \quad y'' = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x.$$

- Функция имеет две стационарные критические точки $x = -3$ и $x = 0$. Определим знаки второй производной в этих точках.

$$f''(-3) = (-27 + 54 - 18)e^{-3} = \frac{9}{e^3} > 0.$$

  Функция в этой точке имеет минимум.

  $f''(0) = 0$. Необходимо определить знак следующей производной в этой точке:

$$f'''(0) = (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x|_{x=0} = 6 > 0.$$

  Так как первая не равная нулю производная в точке $x = 0$ оказалась нечётной, экстремум в этой точке не существует, так как $f'''(0) > 0$, функция в окрестности этой точки монотонно возрастает.

- Определим корни второй производной:

$$f''(x) = 0, (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x = 0, e^x \neq 0, x(x^2 + 6x + 6) = 0, x_1 = 0,$$

и $\quad x^2 + 6x + 6 = 0, \quad x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3}.$

Указанные три точки разбивают область на четыре интервала:

$$-\infty < x < -3 - \sqrt{3}; -3 - \sqrt{3} < x < -3 + \sqrt{3};$$

$$-3 + \sqrt{3} < x < 0; \quad 0 < x < +\infty.$$

- Найдем знаки второй производной в этих интервалах:

В интервале $-\infty < x < -3 - \sqrt{3}$ вторая производная $f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x < 0$, т.к. $e^x > 0$, а многочлен $(x^3+6x^2+6x) < 0$ при $x < 0$. Следовательно, график функции в этом интервале выпуклый.

В интервале $-3 - \sqrt{3} < x < -3 + \sqrt{3}$ вторая производная $f''(x) = (x^3+6x^2+6x)e^x > 0$, т.к., например, $f''(-3) = \dfrac{9}{e^3} > 0$, график функции вогнутый.

В интервале $-3+\sqrt{3} < x < 0$ вторая производная $f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x < 0$, т.к., например, $f''(-1) = (-1 + 6 - 6)e^{-1} = -\dfrac{1}{e} < 0$, график функции выпуклый.

В интервале $0 < x < +\infty$ вторая производная $f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x > 0$, т.к., например, $f''(1) = (1 + 6 + 6)e = 13e > 0$, график функции вогнутый.

- Поскольку при переходе точек $x = -3 - \sqrt{3} \approx -4,732$; $x = -3 + \sqrt{3} \approx -1,268$ и $x = 0$ вторая производная меняет знак, эти точки являются точками перегиба.

Составим таблицу:

x	$-\infty; -3-\sqrt{3}$	$-3-\sqrt{3}$	$-3-\sqrt{3}; -3+\sqrt{3}$
y''	< 0	0	> 0
график $y = f(x)$	выпуклый	точка перегиба $y \approx 0,93$	вогнутый

x	$-3+\sqrt{3}$	$-3+\sqrt{3};0$	0	$0;+\infty$
y''	0	<0	0	>0
график $y=f(x)$	точка перегиба $y\approx -0,57$	выпуклый	точка перегиба $y=0$	вогнутый

Аналогичным образом теперь решите самостоятельно следующие примеры из предыдущего практического занятия

Пример 21.6. $y = x^3 - 3x^2$.

Пример 21.7. $y = x(1+\sqrt{x})$.

Пример 21.8. $y = 1+\sqrt{x}$.

Пример 21.9. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Пример 21.10. $y = e^{\dfrac{1}{x}} - x$.

Пример 21.11. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Займемся теперь примерами на определение наибольших M и наименьших m значений функций на отрезке (глобальный экстремум).

Найти M и m функции $y = x^3e^x$ на $[a;b]$, которая имеет один минимум в точке $x=-3$.

Пример 21.12. $a=-2;\ b=2$.

Р е ш е н и е:

- На интервале (-2; 2) экстремумов у $f(x)$ нет.
- Находим значения функции на концах отрезка:

$$f(-2) = (-2)^3e^{-2} = -\frac{8}{e^2}; \qquad f(2) = 2^3e^2 = 8e^2.$$

- Поскольку экстремумов в интервале (-2;2) нет, наибольшее M и наименьшее m значения функции достигается при $x=-2$ и $x=2$:

$$M = f(2) = 8e^2, \quad m = f(-2) = -\frac{8}{e^2}.$$

Пример 21.13. $a=-4;\ b=2$.

Р е ш е н и е:

- На интервале (-4;2) есть минимум функции в точке $x = -3$, $y_{\min} = -\dfrac{27}{e^3}$.
- $f(-4) = (-4)^3 e^{-4} = -\dfrac{64}{e^4}$, $f(2) = 8e^2$.
- Выбираем наибольшее и наименьшее значения из
$$f(-4) = -\frac{64}{e^4},\ f(-3) = -\frac{27}{e^3},\ y(2) = 8e^2.$$
Очевидно, что $m = f(-3) = -\dfrac{27}{e^3}$ и $M = f(2) = 8e^2$.

Очевидно,что при всех $a < -4$ и $b > 2$ наименьшее значение $m = f(-3)$, а $M = f(b)$.

Самостоятельная работа

Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[a; b]$.

Пример 21.14. $a = -1$; $b = 1$.

Пример 21.15. $a = -2$; $b = 4$.

Лекция 22. Асимптоты и общая схема исследования функций

Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика. Применение теории экстремума к решению задач.

22.1. Асимптоты графика функции

При исследовании функций особый интерес представляет вид графика этой функции при неограниченном удалении его текущей точки от начала координат или, как говорят, при удалении её в бесконечность. Если при этом график функции неограниченно приближается к некоторой прямой линии L, то эта линия называется асимптотой графика функции. Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Определение 22.1. *Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.*

Пример 22.1. *Исследовать поведение функции* $y = \dfrac{1}{x-2}$ *и* $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ *в окрестности точки* $x_0 = 2$.

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2\pm 0} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 2$ является асимптотой как первой, так и второй функции. Но графики $y = f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 2$ имеют различный вид (рис.115 и 116).

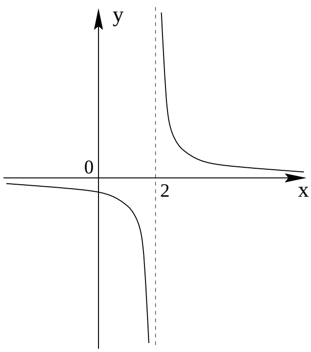


Рис. 115. *Поведение функции* $y = \dfrac{1}{x-2}$ *в окрестности точки* $x = 2$

Очевидно, что графики гипербол нечётной степени $y = \dfrac{1}{(x-2)^{2k-1}}$ в окрестности точки $x_0 = 2$ похожи на рис. 115, а гиперболы чётной степени $y = \dfrac{1}{(x-2)^{2k}}$ – на рис. 116.

Определение 22.2. *Прямая* $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *(или* $x \to -\infty$*), если*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{22.1}$$

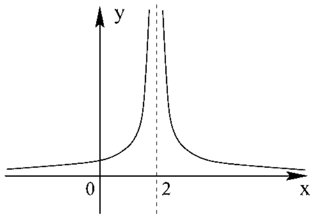


Рис. 116. *Поведение функции* $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ *в окрестности точки* $x = 2$

где $\alpha(x)$ *есть бесконечно малая величина при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, *т.е.*

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0 \quad \textit{или}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0.$$

Если $k = 0$, асимптота $y = b$ называется горизонтальной.

Теорема 22.1. *Для того чтобы график функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *(или* $x \to -\infty$*) имел наклонную асимптоту* $y = kx + b$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \quad \textit{или при } x \to -\infty. \tag{22.2}$$

Доказательство. Рассмотрим пределы при $x \to +\infty$ (аналогично рассматриваются пределы при $x \to -\infty$).

Необходимость.Пусть $f(x)$имеет наклонную асимптоту при$x\to+\infty$. Тогда по определению (22.2) функция $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Если пределы (22.2) существуют, тогда по определению предела $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то

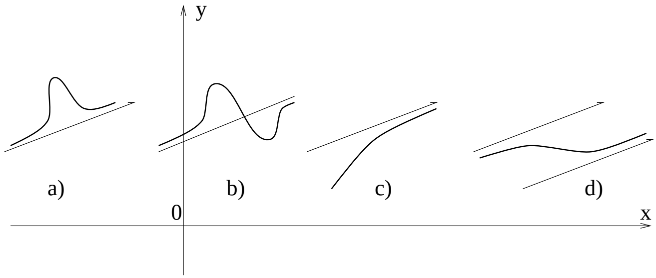


Рис. 117. *Взаимное расположение графиков и их наклонных асимптот*

есть $f(x) = kx + b + \alpha(x)$. И, следовательно, $y = kx + b$ есть асимптота кривой $y = f(x)$.

Если пределы (22.2) при x, стремящемся как к $-\infty$, так и к $+\infty$, равны, то наклонная асимптота одна, если разные – то две. В первом случае при вычислении пределов можно записывать, что $x \to +\infty$.

Если хотя бы один из пределов (22.2) не существует, то наклонной асимптоты у кривой нет. Асимптотическое поведение функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ может быть совершенно различным, кривая $y = f(x)$ может подходить к асимптоте с одной стороны при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (рис. 117, a), с разных сторон (рис. 117, b), может иметь асимптоту только при $x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ не иметь (рис. 117, c) или иметь разные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (рис. 117, d).

Пример 22.2. *Определить, при каких значениях m и n имеются наклонные асимптоты у графика дробно-рациональной функции*

$$y = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0}.$$

Решение: Используя правила нахождения пределов отношения многочленов (лекция 8), имеем:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{Q_m(x)}{x \cdot P_n(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x^1 + b_0}{(a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0)x} =$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если } m < n+1, \\ \dfrac{b_m}{a_n}, & \text{если } m = n+1, \\ +\infty, & \text{если } m > n+1. \end{cases}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} - kx\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 - k a_n x^{n+1}}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0} -$$

$$- \frac{k a_{n-1} x^n + \dots + k a_0 x}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0} =$$

$$= \begin{cases} 0, \ m < n, \ \text{т.к. при этом } m < n+1 \to k = 0, \\ \dfrac{b_m}{a_n}, \ m = n \to m < n+1 \text{ и } k = 0, \\ \dfrac{b_{m-1} - b_m \dfrac{a_{n-1}}{a_n}}{a_n}, \ m = n+1, \text{т.к. } k = \dfrac{b_m}{a_n}. \\ +\infty, \ m > n+1 \end{cases}$$

Таким образом, график функции $y = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ имеет асимптоты

$$\begin{aligned} &y = 0, \ \text{при } m < n, \\ &y = \frac{b_m}{a_n}, \ \text{при } m = n, \\ &y = \frac{b_m}{a_n}x + \frac{b_{m-1} - \dfrac{b_m a_{n-1}}{a_n}}{a_n}, \ \text{при } m = n+1. \end{aligned} \tag{22.3}$$

Наклонная асимптота не существует при $m > n+1$.

Пример 22.3. *Найти наклонную асимптоту кривой* $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Решение:

Так как в нашем примере $m = 2$, $n = 1$, $m = n + 1$, то согласно (22.3) наклонная асимптота существует и её уравнение $y = 2x + 1$, поскольку $a_n = 1$, $b_m = 2, b_{m-1} = -1$, $a_{n-1} = -1$.

Наклонные асимптоты графика дробно-рациональных функций можно находить, разделив числитель на знаменатель (например, уголком).

Так,

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

По определению (22.2) прямая $y = 2x + 1$ является наклонной асимптотой кривой

$$y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1},$$

так как $\alpha(x) = \dfrac{2}{x-1} \to 0$ при $x \to +\infty$. Отметим, что эта кривая имеет также и вертикальную асимптоту $x = 1$.

В предыдущих лекциях мы занимались исследованием функций $y = 3x^2 - 4x + 2$ и $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$, графики которых были приведены на рис. 110 и 111. Очевидно, что первая функция асимптот не имеет.

Пример 22.4. *Имеет ли асимптоту кривая* $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$?

Р е ш е н и е: По (22.2):

$$k = \lim_{x \to \pm+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm+\infty} (\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x) = \lim_{x \to \pm+\infty} \frac{x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x^2} = \frac{1}{3}.$$

Асимптота $y = -x + \dfrac{1}{3}$ и изображена на рис. 111. Асимптоту кривой $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ можно было также найти с помощью биномиального ряда (19.21):

$$y = (x^2 - x^3)^{1/3} = -x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3} = -x\left(1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$
$$= -x + \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

По определению (22.2) прямая $y = -x + \dfrac{1}{3}$ и есть искомая асимптота, что совпадает с результатом, полученным выше.

22.2. Общая схема исследования функции и построения её графика

На основании всего изложенного в лекциях 20 – 22 можно рекомендовать следующий план исследования функции и построения её графика.

1. Найти область определения функции. Установить, является ли функция чётной, нечётной или общего вида. Если функция периодическая, найти период. Определить интервалы непрерывности и точки разрыва. Построить вертикальные асимптоты.
2. Найти и нанести на график точки пересечения с осями.
3. Найти и нанести на график наклонные асимптоты.
4. Найти критические точки, точки максимума и минимума, интервалы монотонности.
5. Найти точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.
6. При необходимости найти значение $f(x)$ и $f'(x)$ в некоторых избранных точках.
7. Построить график.

Замечание 22.1.*Чтобы выполнить п.2, необходимо решить уравнение $f(x) = 0$, что часто возможно лишь численными методами. Этому вопросу будет посвящена следующая лекция.*

В наших лекциях мы подробно исследовали две функции $y = x^3 - 4x + 2$ и $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$, хотя и не в том порядке, как рекомендуем теперь. Это было связано с последовательностью введения новых понятий. На основе проведённых исследований по пунктам 1–5 целесообразно построить таблицы, аналогичные тем, что были построены для функции $y = x^3 - 4x + 2$ и функции $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ в лекциях 20 и 21.

Пример 22.5. *Проведем ещё полное исследование по предложенной схеме и построим график функции $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$, асимптоту которой мы нашли в примере 22.3.*

Решение:

- Функция определена и непрерывна при $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, функция общего вида, не периодическая, точка разрыва $x = 1$, вертикальная асимптота $x = 1$, $y(1-0) = -\infty$, $y(1+0) = +\infty$.
- Точки пересечения с осями: $y(0) = -1$, с осью x пересечения нет, т.к. $2x^2 - x + 1 \neq 0$.
- Наклонная асимптота $y = 2x + 1$.
- Находим $y' = \dfrac{(x-1)(4x-1) - (2x^2 - x + 1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$.

$y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$, $y'(1) = -\infty$. Следовательно, критические точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ На интервале $(-\infty, 0)$ производная функции $y' > 0$ – функция возрастает, на интервале $(0; 1)$ $y' < 0$ – убывает. Следовательно, $y(0) = -1$ – max. На интервале $(1; 2)$ производная функции $y' < 0$ – функция убывает, на интервале $(2; +\infty)$ $y' > 0$ — возрастает. Следовательно, $y(2) = 7$ – min.

- $y'' = 2\dfrac{(x-1)^2 \cdot 2(x-1) - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{4}{(x-1)^3}$. На интервале $(-\infty; 1)$ вторая производная функции $y'' < 0$ – кривая выпуклая, $y'' > 0$ на интервале $(1, +\infty)$ – кривая вогнутая. Точек перегиба нет. Для данной функции целесообразнее составлять одну общую таблицу.

x	$-\infty; 0$	0	$0; 1$	1	$1; 2$	2	$2; +\infty$
y'	> 0	0	< 0	$-\infty$	< 0	0	> 0
y	$\nearrow$ асимптота $y = 2x + 1$	-1	$\searrow$	$\mp + \infty$ асимптота $x = 1$	$\searrow$	7	$\nearrow$
y''	< 0	< 0	< 0	$\mp + \infty$	> 0	> 0	> 0
график y—f(x)	выпуклый	y—-1 max	выпуклый	$\mp + \infty$	вогнутый	y—7 min	вогнутый

График функции приведен на рис. 118.

В заключение рассмотрим применение дифференциального исчисления к решению текстовых задач.

22.3. Применение теории экстремума к решению текстовых задач

Изложенную в лекциях 20 и 21 теорию экстремума можно применить к решению некоторых геометрических, физических и технических задач. Как правило, в таких задачах нужно найти наибольшее и наименьшее значения искомой величины в зависимости от другой величины, изменяющейся в определённых пределах. Следовательно, эти задачи подобны задаче о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Рассмотрим два примера.

Пример 22.6. *Вписать в эллипс* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса (рис.119).*

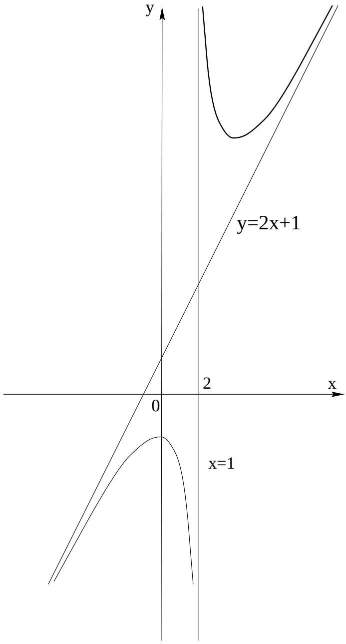


Рис. 118. *График функции* $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$

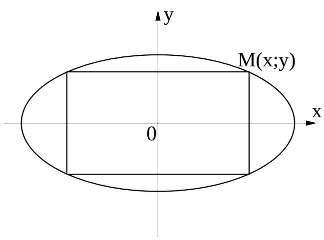


Рис. 119. *К примеру 22.6*

Р е ш е н и е: Искомая площадь прямоугольника $S = 4xy$, x и y не независимы, а связаны уравнением эллипса. Выразим из него

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и подставим в S. Тогда S будет функцией одного переменного x.

$S(x) = \frac{4b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$

Найдем производную

$$S'(x) = \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = \frac{4b(a^2 - 2x^2)}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Производная равна нулю в точке $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и не существует в точке $x = a$. Так как $S(0) = S(a) = 0$, то наибольшее значение достигается при $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Искомая площадь $S = 4\frac{ab}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2ab$.

Пример 22.7. *Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами A и B, расположенными на разных берегах реки, была бы наименьшей. Реку считать постоянной ширины h, расстояние от A до реки a, от B до реки – b, расстояние от A до B по прямой – d.*

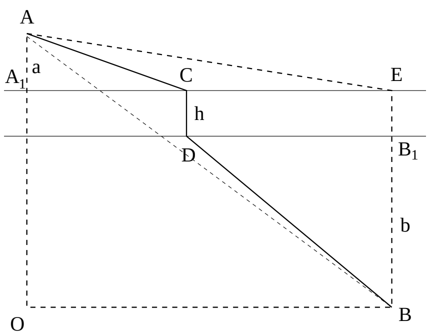


Рис. 120. *К примеру 22.7*

Р е ш е н и е: На схеме (рис. 120) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CD = h$, $AB = d$. Очевидно, что OB есть также величина постоянная, обозначим её буквой $c = \sqrt{d^2 - (a + h + b)^2}$. Длина дороги $L = AC + CD +$

$+\, DB$ зависит от расположения точки c. Введем переменную $x = A_1C, \quad 0 \leqslant x \leqslant c$, тогда $L = \sqrt{a^2+x^2} + h + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$. Следовательно, $L = L(x)$.

Определим $L'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \dfrac{x-c}{\sqrt{b^2+(x-c)^2}} =$

$$= \frac{x\sqrt{b^2+(x-c)^2} + (x-c)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+(x-c)^2)}}.$$

$L' = 0$ когда $x\sqrt{b^2+(x-c)^2} + (x-c)\sqrt{a^2+x^2} = 0$. Перенесем одно из слагаемых на другую сторону и обе части возведем в квадрат— $x^2(b^2+(x-c)^2) = (x-c)^2(a^2+x^2)$. Откуда $b^2x^2 = a^2(x-c)^2$. Решив это квадратное уравнение, получим $x_1 = \dfrac{ac}{a-b}$ и $x_2 = \dfrac{ac}{a+b}$. Первое значение x_1 не подходит, т.к. при $a > b$, $x_1 > c$ и при $a < b$, $x_1 < 0$. Точка x_2 расположена между A_1 и E, т.к. $\dfrac{a}{a+b} < 1$. Очевидно, что путь $ACDB$ короче AOB и AEB, поэтому длина дороги между пунктами A и B будет наименьшей, если построить мост, где расстояние $A_1C = \dfrac{ac}{a+b}$.

Практическое занятие 22. Общая схема исследования функций

Прежде всего на этом практическом занятии определим, имеют ли асимптоты графики функций примеров из двух предыдущих практических занятий. Тем самым, если мы найдем ещё пересечение графика функции $y = f(x)$ с осями координат, и, если это будет необходимо, значение $y = f(x)$ и $y' = f'(x)$ в некоторых точках, мы полностью завершим исследование этих функций и можем построить их графики.

Пример 22.1. $y = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$

Р е ш е н и е:

- Очевидно, что эта функция не содержит линейной части и поэтому не имеет наклонных асимптот, также нет и вертикальных асимптот.
- Определим пересечение графика функции $y = x^2 - x^3$ с осями координат: $y(0) = y(1) = 0$.
- Для более точного построения графика вычислим:

$$y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27};\ y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{9};\ y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{27} \text{ и } y'(1) = -1.$$

- Построим график функции $y = x^2 - x^3$ (рис. 121).

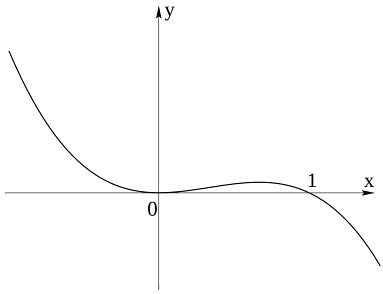


Рис. 121. *График функции* $y = x^2 - x^3$

Пример 22.2. $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$

Решение:

- Очевидно, что график этой функции также не имеет асимптот.
- Точки пересечения с осями $y(0) = 0$.
- Вычислим дополнительно:
  $y(1) = 2;\ y(2) \approx 4,38$ и $y'(0) = 1$.
- Построим график функции $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$ (рис. 122).

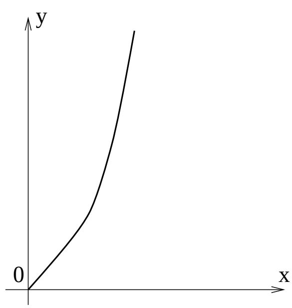


Рис. 122. *График функции* $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$

Пример 22.3. $y = 1 + \sqrt[4]{x}$

Р е ш е н и е:

- Очевидно, что график этой функции также не имеет асимптот.
- $y(0) = 1$, с осью x пересечений нет.
- Вычислим дополнительно
  $y'(+0) = +\infty;\quad y(1) = 2;\quad y(2) \approx 2{,}19; y(3) \approx 2{,}32;$
  $(0,5) \approx 1{,}89$
- Построим график функции $y = 1 + \sqrt[4]{x}$ (рис. 123).

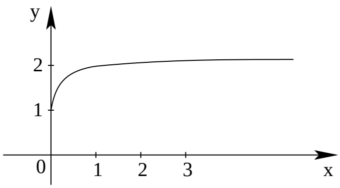


Рис. 123. *График функции* $y = 1 + \sqrt[4]{x}$

Пример 22.4. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Р е ш е н и е:

- Очевидно, что график этой функции также не имеет асимптот.
- Пересечение с осями. Запишем в виде $y = \sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x} - 3)$. Откуда получаем
$$y(0) = 0,\ 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0,\ \sqrt[3]{x} = \frac{3}{2},\ x = \frac{27}{8}.$$
- $y'(\mp 0) = \dfrac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x}} = \pm + \infty,\ y'\left(\dfrac{27}{8}\right) = \dfrac{2}{3},\ y(-1) = -5.$
- Построим график функции $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 124).

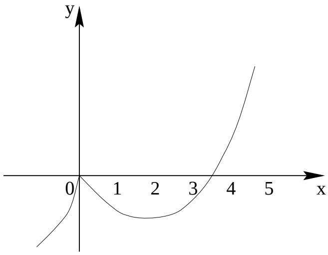


Рис. 124. *График функции* $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

Пример 22.5. $y = x^3 e^x$.

Р е ш е н и е:

- Вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^x = +\infty$ – асимптоты при $x \to +\infty$ нет.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} x^3 e^x = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0.$$

Таким образом, при $x \to -\infty$ имеется горизонтальная асимптота $y = 0$.
- Пересечение с осями $y(0) = 0$.
- $y(0,5) \approx 0,206; y(1) = e; y(-1) = \dfrac{1}{e}; y(-2) = -\dfrac{8}{e^2}; y(-4) \approx$ $\approx -1,17; y(-5) \approx -0,84 y(-8) \approx -0,17$
- Построим график функции $y = x^3 e^x$ (рис. 125).

В качестве примера полного исследования функций по схеме лекции 24 рассмотрим

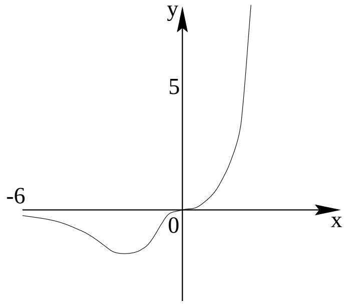


Рис. 125. *График функции $y = x^3e^x$*

Пример 22.6. *Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции
  $D(y) = (-\infty; -2)\bigcup(-2; 2)\bigcup(2; +\infty)$.
- Функция нечётная, т.к. $f(-x) = -f(x)$. Непериодическая.
- Точка пересечения с осями $x = 0,\ y = 0$.
- Точки разрыва : $x = -2$ и $x = 2$, прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами. При этом $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \\ = \pm + \infty$, и $\lim\limits_{x\to -2\pm 0} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \pm + \infty$.

  Наклонные асимптоты. Если поделить x^3 на $x^2 - 4$, получим $y = x - \dfrac{4x}{x^2-4}$. Т.к. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$, прямая, определяемая уравнением $y = x$, является наклонной асимптотой.
- Найдем производную

$$y' = f'(x) = (\frac{x^3}{x^2-4})' = \frac{(x^2-4)3x^2 - x^3 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

- Критические точки функции: $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$, $x = \pm 2$. Они разбивают область определения на интервалы :

$$(-\infty < x < -2\sqrt{3});\ (-2\sqrt{3} < x < -2);\ (-2 < x < 0);$$
$$(0 < x < 2);\ (2 < x < 2\sqrt{3}); (2\sqrt{3} < x < +\infty).$$

На интервале $-\infty < x < -2\sqrt{3}$ производная больше нуля – функция возрастает.

На интервале $-2\sqrt{3} < x < -2$ производная меньше нуля – функция убывает.

На интервале $-2 < x < 0$ производная меньше нуля – функция убывает.

При определении интервалов монотонности при $x > 0$ воспользуемся нечётностью функции.На интервалах $(0;2)$ и $(2;2\sqrt{3})$ функция убывает, на $(2\sqrt{3}; +\infty)$ – возрастает. Поведение функции в окрестности точек $x \pm 2$ исследовано ранее.

При переходе точки $x = 0$ производная $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума.

При переходе точки $x = 2\sqrt{3}$ знак производной меняется с минуса на плюс, следовательно, эта точка является точкой минимума.

В силу нечётности функции точка $x = -2\sqrt{3}$ является точкой максимума.

- Найдем вторую производную: $y'' = f''(x) = \left(\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}\right)' =$

$$= \frac{(x^2-4)^2(4x^3-24x)-(x^4-12x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{4x^5-24x^3-16x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$f''(x)$ обращается в нуль в точке $x = 0$ и не существует в точках $x = \pm 2$.

На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ вторая производная $f''(x) < 0$ – график функции выпуклый.

На интервалах $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ вторая производная $f''(x) > 0$ – график функции вогнутый.

При переходе точки $x = 0$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба

На основании проведённых исследований построим таблицы и график функции (рис. 126).

x	$-\infty; -2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}; -2$	-2	-2;0
y'	> 0	0	< 0	$-\infty$	< 0
y	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$ max	$\searrow$	точка разрыва	$\searrow$

0	0;2	2	$2; 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}; +\infty$
0	< 0	$-\infty$	< 0	0	> 0
экстремума нет	$\searrow$	точка разрыва	$\searrow$	$3\sqrt{3}$ min	$\nearrow$

x	$-\infty; -2$	-2	-2;0	0	0;2	2	$2; +\infty$
y”	< 0	$\mp + \infty$	> 0	0	< 0	$\mp + \infty$	> 0
график y=f(x)	выпук.	точка разрыва	вогн.	точка перегиба	выпук.	точка разрыва	вогн.

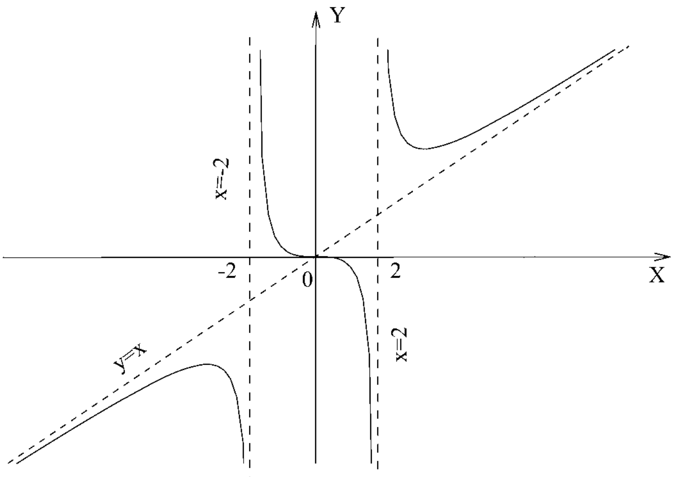


Рис. 126. *График функции* $y = x^3/(x^2 - 4)$

В заключение данного практического занятия рассмотрим один пример на решение экстремальной задачи с физическим содержанием.

Пример 22.7. *Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по дороге равна 20 км/ч.*

Р е ш е н и е: Построим схему (рис. 127).$AC \perp CB$

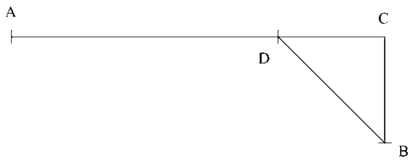


Рис. 127. *К примеру 22.7*

$AC = 285$км,$CB = 60$км, $DC = x$;$AD = 285 - x$;
$\vartheta_{\text{ж.д.}} = 52$км; $\vartheta_{\text{ш}} = 20$км/ч

$$t_{\text{ж.д.}} = \frac{AD}{\vartheta_{ж.д.}} = \frac{285 - x}{52};\ t_{\text{ш}} = \frac{DB}{\vartheta_{ш}} = \frac{\sqrt{DC^2 + CB^2}}{\vartheta_{ш}} = \frac{\sqrt{x^2 + 60^2}}{20}$$

Общее время $t = t_{\text{ж.д.}} + t_{\text{ш}} = \dfrac{285 - x}{52} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 60^2}}{20}$ должно быть минимальным, необходимым условием этого является равенство нулю производной $t'(x)$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{52} + \frac{x}{20\sqrt{x^2 + 60^2}} = \frac{-5\sqrt{x^2 + 60^2} + 13x}{260\sqrt{x^2 + 60^2}} = 0$$

$5\sqrt{x^2 + 60^2} = 13x;\ 25x^2 + 5^2 \cdot 60^2 = 169x^2;\ 144x^2 = 5^2 \cdot 60^2;\ x = 25.$

Ответ: $DC = 25$ км.

Самостоятельная работа

Исследуйте функции и постройте их графики.

Пример 22.8. $y = x^3 - 3x^2$.

Пример 22.9. $y = x(1 + \sqrt{x})$.

Пример 22.10. $y = 1 + \sqrt{x}$.

Пример 22.11. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Пример 22.12. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

Пример 22.13. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Пример 22.14. *Гонцу нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B, находящийся на другом. Зная, что скорость движения на берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом гонец должен пересечь реку для того, чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки – h, расстояние между A и B (вдоль берега) – d.*

Лекция 23. Решение нелинейных уравнений

Отделение корня. Оценка приближённого значения корня. Методы уточнения корня. Метод половинного деления. Метод Ньютона.

23.1. Корень уравнения

Определение 23.1. *Корнем уравнения*

$$f(x) = 0 \tag{23.1}$$

называется число ξ, которое, будучи подставлено вместо x в уравнение, обращает его в тождество.

Найти корни уравнения (23.1) в аналитическом виде представляется возможным лишь в исключительных случаях. Общими методами нахождения корней (23.1) являются численные методы последовательных приближений, которые распадаются на два этапа, первый – отделение корня и второй – уточнение значения корня. В дальнейшем будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале, где ищется корень уравнения, (23.1) и имеет первую, а иногда, это будет оговорено, и вторую производные.

23.2. Отделение корня

Если мы построим график функции $y = f(x)$, то корнями уравнения (23.1) будут точки пересечения этой функции с осью абсцисс, и, таким образом, мы можем найти приближённые значения корней уравнения, т.е. найти интервалы, на которых находится по одному корню. Так, на рис. 110 изображен график функции $y = x^3 - 4x + 2$, ясно, что $x^3 - 4x + 2 = 0$ в точках ξ_1, ξ_2, ξ_3. Грубо отделим корни $\xi_1 \in (-3; -2); \xi_2 \in (0; 1); \xi_3 \in (1; 2)$.

Графическое решение уравнения (23.1) может быть произведено ещё и следующим образом: представим уравнение (23.1) в эквивалентном виде

$$\varphi(x) = \psi(x), \tag{23.2}$$

тогда корнями (23.1) будут точки пересечения функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, (рис. 128).

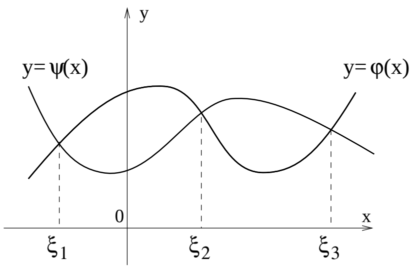


Рис. 128. *Корни уравнения* $\varphi(x) = \psi(x)$

Пример 23.1. *Найти графически корни уравнения* $x^3 - 4x + 2 = 0$.

Р е ш е н и е: Запишем уравнение $x^3 - 4x + 2 = 0$ в эквивалентном виде $x^3 = 4x - 2$, обозначим $y = \varphi(x) = x^3$ и $y = \psi(x) = 4x - 2$. Таким образом, корнями уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$ являются точки пересечения параболы $y = x^3$ и прямой $y = 4x - 2$. Из рис. 129 имеем $\xi_1 \in (-3; -2)$; $\xi_2 \in (0; 1)$; $\xi_3 \in (1; 2)$, что, естественно, соответствует результатам, полученным на основании рис. 110.

Пример 23.2. *Найти графически корни уравнений* $2^x - x^2 = 0$ *и* $2^x + x^2 = 0$.

Р е ш е н и е: Запишем первое уравнение $2^x - x^2 = 0$ в эквивалентном виде $2^x = x^2$ и положим $y = \varphi(x) = 2^x$ и $y = \psi(x) = x^2$. Таким образом, корни уравнения $2^x - x^2 = 0$ являются точками пересечения графика показательной функции $y = 2^x$ и параболы $y = x^2$.

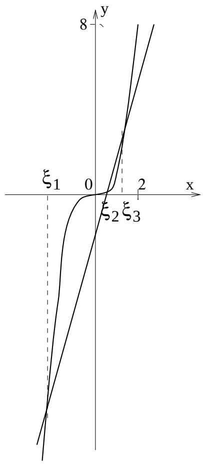


Рис. 129. *Корни уравнения* $x^3 = 4x - 2$

Из рис. 130 видно, что имеются три точки пересечения $\xi_1 \in (-1; 0)$; $\xi_2 = 2$; $\xi_3 = 4$. Очевидно, что при $x > 4$ пересечений кривых больше нет, т.к. при больших x показательная функция растет быстрее, чем степенная. Уравнение $2^x + x^2 = 0$, очевидно, не имеет корней, т.к графики функций $y = 2^x$ и $y = -x^2$ (пунктир на рис. 130) не пересекаются.

Перейдем теперь к анализу результатов графического отделения корней. Из приведённых выше рисунков очевидно, что, *если на интервале* (a, b) *производная* $f'(x)$ *не меняет знака, а на границах при* $x = a$ *и* $x = b$ *функция* $f(x)$ *принимает значения разных знаков, то на этом интервале имеется один корень. Это и есть правило отделения корней.*

Следовательно, мы можем определить, сколько и на каких интервалах имеется корней у уравнения $f(x) = 0$, не прибегая к построению графиков. Достаточно определить интервалы монотонности функции и ее значения в некоторых избранных точках. Рассмотрим уравнение $x^3 - 4x + 2 = 0$.

Пример 23.3. *Определить аналитически число корней уравнения* $x^3 - 4x + 2 = 0$ *и отделить их.*

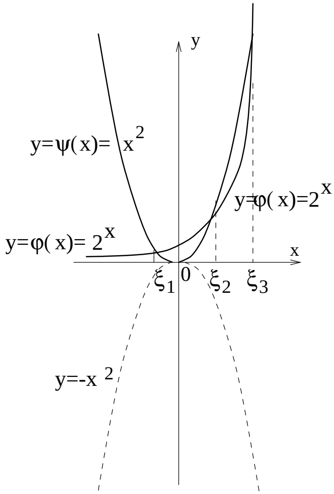


Рис. 130. *Корни уравнения* $x^2 = 2^x$

Интервалы монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 4x + 2$ приведены в соответствующей таблице лекции 20, откуда, учитывая, что $y \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$, делаем вывод, что уравнение $x^3 - 4x + 2 = 0$ имеет три корня: $\xi_1 \in (-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{3}})$; $\xi_2 \in (-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}})$ и $\xi_3 \in (\dfrac{2}{\sqrt{3}}; +\infty)$. В дальнейшем мы можем уменьшить эти интервалы, выбирая точки на каждом из них, знак функции в которых разный. Например, для первого интервала $f(-3) = -13 < 0$, $f(-2) = 2 > 0$, для второго $f(0) = 2 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, для третьего $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2 > 0$. Следовательно, $\xi_1 \in (-3; -2)$; $\xi_2 \in (0; 1)$; $\xi_3 \in (1; 2)$.

23.3. Оценка приближённого значения корня

Пусть корень уравнения (23.1) отделен и находится в интервале $(a; b)$. Положим, что его приближённое значение равно $\bar{x} \in (a; b)$. Пусть точное значение этого корня равно $\xi \in (a; b)$, тогда, применяя формулу Лагранжа (17.4) к отрезку $[\xi; \bar{x}]$, имеем

$$|f(\xi) - f(\bar{x})| = |f'(\zeta)||\xi - \bar{x}|,$$

где $\zeta \in (\xi, \bar{x})$. Поскольку ξ – точный корень уравнения, следовательно, $f(\xi) = 0$, и

$$|f(\bar{x})| = |f'(\zeta)||\xi - \bar{x}|.$$

Пусть m_1 есть наименьшее значение модуля производной $f'(x)$ на $[a;b]$, тогда $|f(\bar{x})| \geqslant m_1|\xi - \bar{x}|$ и, следовательно,

$$|\xi - \bar{x}| \leqslant \frac{f(\bar{x})}{m_1}. \tag{23.3}$$

Формула (23.3) и даёт оценку отличия приближённого значения корня $\bar{x}$ от точного значения ξ.

Пример 23.4. *Оценить ошибку приближённого значения корня $\bar{x} = 0,5$ уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$.*

Р е ш е н и е: $\bar{x} \in (0;1)$, на котором, как мы определили ранее, например, в предыдущем примере 23.3, имеется корень ξ_2. Определим

$$f(\bar{x}) = f(0{,}5) = 0,125,$$

производная $f'(x) = 3x^2 - 4$ принимает значения $f'(0) = -4$, $f'(1) = -1$, $m_1 =$ наим.знач$|f'(x)|$ на $[0;1] = 1$. Подставляя полученные величины в (23.3), получим $|\xi - 0{,}5| \leqslant 0{,}125$. Следовательно, приближённое значение корня $\bar{x} = 0,5$ отличается от точного ξ не более, чем на 0,125, а это значит $0,375 \leqslant \xi \leqslant 0{,}625$

23.4. Методы уточнения корня

Все методы, решающие эту задачу, являются методами последовательных приближений или, как их иначе называют, итерационными методами. В принципе, эти методы, при некоторых условиях, специфичных для каждого метода, позволяют найти решение уравнения (23.1) с любой заданной наперед точностью. Поэтому их часто называют точными методами определения корней уравнения (23.1). Мы остановимся на двух методах: первый – это метод половинного деления, второй – метод Ньютона (или метод касательных).

Метод половинного деления

Метод относится к числу простых и абсолютно надежных методов. Пусть корень уравнения (23.1) отделен и находится в интервале $(a;b)$. Положим для определённости $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам и вычислим $f(a+\dfrac{b-a}{2})$. Если это значение равно нулю, то $\xi = a + \dfrac{b-a}{2}$, если $f(a+\dfrac{b-a}{2}) > 0$, то $\xi \in (a; a+\dfrac{b-a}{2})$; если $f(a+\dfrac{b-a}{2}) < 0$, то $\xi \in (a+\dfrac{b-a}{2}; b)$. Выбираем соответствующий отрезок, где находится корень, и повторяем процедуру. И так до тех пор, пока не достигнем заданной точности. Поскольку в каждой итерации (в каждом последовательном приближении) отрезок, содержащий корень делится пополам, точность метода может быть оценена по формуле

$$|x_n - \xi| < \frac{|b-a|}{2^n}, \tag{23.4}$$

где n— номер итерации, а x_n – значения корня в n-ной итерации. Из формулы (23.4) следует: чтобы ошибка в значении приближённого корня уменьшалась в 10 раз необходимо произвести четыре итерации, т.к $2^3 = 8$ и лишь $2^4 = 16 > 10$.

Пример 23.5. *Применить метод половинного деления для уточнения корня уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$, находящегося в интервале* $(0;1)$.

Р е ш е н и е: Этот корень мы обозначили ранее ξ_2, $f(0) = 2 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, положим приближённое значение корня $x_1 = 0,5$, $f(0,5) = 0,125 > 0 \Rightarrow \xi_2 \in (0,5; 1,0)$. Следующее приближённое значение корня положим $x_2 = 0,75$, $f(0,75) = 0,75^3 - 3 + 2 < 0 \Rightarrow \xi_2 \in (0,5; 0,75)$. Отметим, что в промежуточных действиях нам не обязательно точно вычислять $f(x_n)$, достаточно определить знак. Далее $x_3 = 0,625$; $f(0,625) = 0,625^3 - 2,5 + 2 < 0 \Rightarrow \xi_3 \in (0,5; 0,625)$. Определим $x_4 = 0,5625$ и т.д.

Ошибка в определении ξ по x_4 согласно (23.4) не превышает $\dfrac{1}{16} = 0,0625$.

Метод половинного деления абсолютно надежен, но очень медленно сходится, т.е. ошибка $|x_n - \xi|$ уменьшается медленно.

Метод Ньютона (или метод касательных)

Этот метод относится к наиболее быстро сходящимся методам. Однако условия его сходимости более жёсткие. Будем считать, что корень уравнения (23.1) отделен и находится на интервале $(a;b)$, и на этом интервале $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знаки. Представим функцию $y = f(x)$ в окрестности точки ξ по формуле Тейлора (19.6), положив $h = \xi - x_n$, где x_n – n-ное приближение корня

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)h + O(h^2) = 0, \qquad (23.5)$$

это выражение равно нулю, т.к. ξ- точный корень уравнения (23.1) Отбросим в (23.5) величину $O(h^2)$, заменив h на $h_n = x_{n+1} - x_n$, где x_{n+1} следующее приближение к корню ξ :

$$f(x_n) + f'(x_n)h_n = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Откуда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \qquad (23.6)$$

Это и есть формула метода Ньютона.

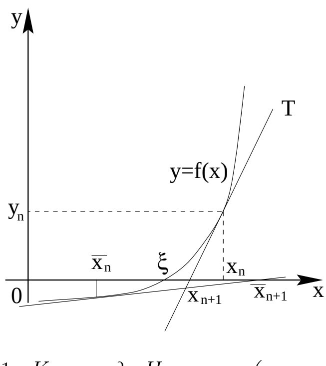


Рис. 131. *К методу Ньютона (касательных)*

Рассмотрим рис. 131. Проведем из точки $(x_n; y_n)$ касательную T к кривой $y = f(x)$:

$$y_T = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Её пересечение с осью абсцисс и даст значение следующего приближения x_{n+1}, т.к. $y_T(x_{n+1}) = 0$. Поэтому метод Ньютона ещё и называют методом касательных. Мы подходим к корню ξ заменяя кривую $y = f(x)$ касательной к ней в точке $(x_n; y_n)$

Теорема 23.1. *Достаточное условие сходимости метода Ньютона. Если $f''(x)$ на $[a; b]$ сохраняет знак и в точке приближённого значения корня x_n имеет тот же знак, что $f(x_n)$, то следующее приближение x_{n+1}, определяемое по (23.6) будет ближе к точному корню ξ.*

Дадим геометрическое доказательство этой теоремы. В точке x_n значение функции $f(x_n) > 0$, а для вогнутой функции, как на рис. 131, $f''(x) > 0$ и, как видно, x_{n+1} ближе к корню ξ. Если бы мы взяли за приближение корня точку $\bar{x}_n$, в которой $f(\bar{x}_n) < 0$, то касательная к кривой, проведённой к $y = f(x)$ в точке $\bar{x}_n$ может пересечь ось абсцисс в точке $\bar{x}_{n+1}$, расположенной дальше от точки ξ, чем x_n, а там кривая может быть такой, что следующее приближение $\bar{x}_{n+1}$ будет ещё дальше и итерации, как говорят, разойдутся.

Оценим ошибку приближённого решения уравнения $f(x) = 0$ по методу Ньютона.

Пусть $\bar{x} = x_{n+1}$ в формуле (23.3)

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{|f(x_{n+1})|}{m_1}.$$

Запишем формулу Тейлора (19.2) для точки x_{n+1} при $n = 2$

$$f(x_{n+1}) = \underline{f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)} + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2,$$

где $\zeta \in (x_n, x_{n+1})$ Подчеркнутое выражение равно нулю, согласно (23.6). Тогда

$$|f(x_{n+1})| = \frac{|f''(\zeta)|}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \leqslant \frac{M_2}{2}(x_{n+1} - x_n)^2,$$

где M_2 равно наибольшему значению $|f''(x)|$ на $[a; b]$, и следовательно,

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_{n+1} - x_n)^2. \tag{23.7}$$

Формула (23.7) показывает, что отличие приближённого значения от точного в методе Ньютона уменьшается пропорционально квадрату разности двух последовательных приближений.

Пример 23.6. *Уточнить корень уравнения* $x^3 - 4x + 2 = 0$, *находящийся в интервале* $(0; 1)$ *по методу Ньютона.*

Решение: Запишем формулу (23.6) для $f(x) = x^3 - 4x + 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 4x_n + 2}{3x_n^2 - 4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{23.8}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4; \; f''(x) = 6x.$$

$$f(0) = 2; \; f''(0) = 6; \quad f(1) = -1; \; f''(1) = 6.$$

С точки $x = 1$ начинать итерации не рекомендуется, т.к. это противоречило бы теореме 23.1 и процесс итерации мог бы не сойтись. Поэтому в качестве начального приближения возьмём точку $x_0 = 0$, тогда по (23.8)

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 4x_0 + 2}{3x_0^2 - 4} = 0 - \frac{0 - 0 + 2}{0 - 4} = 0,5,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 4x_1 + 2}{3x_1^2 - 4} = 0,5 - \frac{0,125 - 2 + 2}{0,75 - 4} = 0,5385,$$
$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 4x_2 + 2}{3x_2^2 - 4} = 0,5 - \frac{0,5385^3 - 4 \cdot 0,5385 + 2}{3 \cdot 0,53850^2 - 4} = 0,53923.$$

Проведем оценку отличия x_3 от точного значения ξ_2. На отрезке $[0, 1]$, как мы уже определили в примере (23.4), $m_1 = 1$, а $f''(x) = 6$, следовательно, $M_2 = 6$, тогда по (23.7):

$$|x_3 - \xi_2| \leqslant \frac{6}{2}(0,53923 - 0,5385)^2 \approx 10^{-6}.$$

Таким образом все пять знаков в $x_3 = 0,53923$ являются точными.

В следующем примере найдем два других корня.

Пример 23.7. *Найти по методу Ньютона с точностью* 10^{-3} *корни уравнения* $x^3 - 4x + 2 = 0$, *принадлежащие интервалам* $(-3; -2)$ *и* $(1; 2)$.

Решение: Найдем сначала корень $\xi_1 \in (-3; -2)$.

$$f(x) = x^3 - 4x + 2, \; f'(x) = 3x^2 - 4, \; f''(x) = 6x.$$

Определим значения $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ в точках $x = -3$ и $x = -2$:

$$f(-3) = -13, \; f'(-3) = 23, \; f''(-3) = -18,$$

$$f(-2) = -2, \; f'(-2) = -12, \; f''(-2) = 8.$$

Согласно теореме 23.1 за начальное приближение возьмём $x_0 = -3$, тогда по формуле (23.6) последовательно определяем:

$$x_1 = -3 - \frac{13}{23} = -2,4348,$$

$$x_2 = -2,4348 - \frac{(-2,4348)^3 + 4 \cdot 2,4348 + 2}{3 \cdot (-2,4348)^2 - 4} = -2,2415,$$

$$x_3 = -2,2415 - \frac{(-2,2415)^3 + 4 \cdot 2,2415 + 2}{3 \cdot (-2,2415)^2 - 4} = -2,2151.$$

Оценку точности проведем по формуле (23.7):

$$|x_3 - \xi_1| \leqslant \frac{18}{2 \cdot 8}(2,2415 - 2,2151)^2 < 10^{-3}.$$

Следовательно, с точностью до 10^{-3} корень $\xi_1 = -2,215$.

Аналогично найдем корень $\xi_3 \in (1;2)$:

$$f(1) = -1, \; f'(1) = -1, \; f''(1) = 6,$$

$$f(2) = 2, \; f'(2) = 8, \; f''(2) = 12.$$

Возьмём $x_0 = 2$. Тогда:

$$x_1 = 2 - \frac{2}{8} = 1,75,$$

$$x_2 = 1,75 - \frac{1,75^3 - 4 \cdot 1,75 + 2}{3 \cdot 1,75^2 - 4} = 1,6811,$$

$$x_3 = 1,6811 - \frac{1.6811^3 - 4 \cdot 1,6811 + 2}{3 \cdot 1,6811^2 - 4} = 1,675.$$

Поскольку первая производная на отрезке $(1;2)$ меняет знак, для оценки корня по формуле (23.7) возьмём отрезок $[1,5;2]$. На этом отрезке:

$$M_2 = f''(2) = 12, \; m_1 = f'(1,5) = 2,75.$$

Итак,

$$|x_3 - \xi| \leqslant 2\frac{12}{2 \cdot 2,75}(1,681 - 1,675)^2 < 10^{-3}.$$

Следовательно, с точностью до 10^{-3} корень $\xi_3 = 1,675$.

Применим теперь метод Ньютона к решению уравнения $f(x) = x^m - a = 0$, т.е. к вычислению корней $x = \sqrt[m]{a}$. Формула (23.6) в этом случае примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-1}} = \frac{1}{m}((m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}), n = 0, 1, 2, \dots \quad (23.9)$$

Для вычисления квадратных корней $x = \sqrt{a}$, $m = 2$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}),\ n = 0, 1, 2, \dots \quad (23.10)$$

Пример 23.8. *Найти $\sqrt{5}$ по методу Ньютона с точностью до* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: В этом случае $a = 5$ и по (23.10), положив $x_0 = 2$ имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = \frac{1}{2}(2 + \frac{5}{2}) = 2,25,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) = \frac{1}{2}(2,25 + \frac{5}{2,25}) = 2,23611,$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2}) = \frac{1}{2}(2,23611 + \frac{5}{2,2361}) = 2,23607.$$

Следовательно, $x_3 = 2,2361$ даёт решение нашей задачи. Оценка ошибки по (23.7) даёт величину меньше 10^{-4}.

Практическое занятие 23.
Контрольная работа по материалу лекций 20–22

Рассмотрим один из вариантов контрольной работы на исследование функций, построение графиков и решение задач на экстремум.

Пример 23.1. *Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и построить её график.*

Пример 23.2. *Исследовать функцию $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$ и построить её график.*

Пример 23.3. *Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ и построить её график.*

Пример 23.4. *Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ на отрезках* $[-1; 1]$, $[-2; 0]$, $[-2; 2]$.

ПРИМЕР 23.5. *В данный шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшим объёмом.*

Решение примеров варианта контрольной работы

ПРИМЕР 23.1. *Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$
- Функция общего вида, т.е. ни чётная, ни нечётная.
- Точки пересечения с осью $Oy: x = 0$, $y = 1$, с осью $Ox: y = 0$, $x = 1$.
- Точек разрыва нет, следовательно, вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты с использованием формул Маклорена:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}) = -\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x^3})^{1/3} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x\to+\infty}(-x(1 - \frac{1}{x^3})^{1/3} + x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-x + \frac{1}{3}\frac{x}{x^3} + x\cdot O\left(\frac{1}{x^6}\right) + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right) = 0.$$

Следовательно, существует наклонная асимптота $y = -x$

- Находим производную

$$y' = \frac{1}{3}\frac{(-3x^2)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

Критические точки $x = 0$ и $x = 1$. Вторая производная

$$y'' = -\frac{\sqrt[3]{(1-x^3)^2 2x - \dfrac{x^2 2(-3x^2)}{3\sqrt[3]{1-x^3}}}}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}} =$$

$$= -\frac{(1-x^3)2x + 2x^4}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

имеет те же самые критические точки.

- Составим общую таблицу результатов исследования функции 1-ой и 2-ой производной.

x	$-\infty;0$	0	$0;1$	1	$1;+\infty$
y'	<0	0	<0	$-\infty$	<0
y''	>0	0	<0	$\pm+\infty$	>0
y	$\searrow$ $\cup$	Экстремума нет Точка перегиба $y=1$	$\searrow$ $\cap$	Экстремума нет Точка перегиба $y=0$	$\searrow$ $\cup$

- На основании проведённых исследований строим график функции 132.

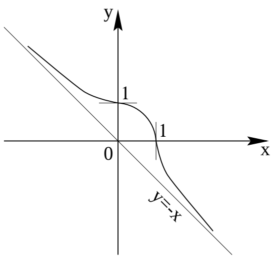


Рис. 132. *График функции* $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

Пример 23.2. *Исследовать функцию* $\dfrac{1-x^3}{x^2}$ *и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
- Функция общего вида.
- Пересечение с осью Oy : $x=0, y=+\infty$, с осью Ox : $y=0$,$x=1$.
- Точка разрыва $x=0$, следовательно, существует вертикальная асимптота $x=0$.
- Из следующего представления функции $y=\dfrac{1}{x^2}-x\Rightarrow y=-x$ является наклонной асимптотой.
- $$y'=\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'=\left(\frac{1}{x^2}-x\right)'=-1-\frac{2}{x^3};\quad y''=\frac{6}{x^4}.$$

- Критические точки по первой производной $x = -\sqrt[3]{2}$ и $x = 0$, по второй производной $x = 0$.
- Составляем общую таблицу результатов исследования функции по производным:

x	$-\infty; -\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}; 0$	0	$0; +\infty$
y'	< 0	0	> 0	$\pm + \infty$	< 0
y''	> 0	> 0	> 0	$+\infty$	> 0
y	$\searrow$ $\cup$	min $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$ $\cup$	Точка разрыва $+\infty$	$\searrow$ $\cup$

- На основании проведённых исследований строим график функции (рис. 133)

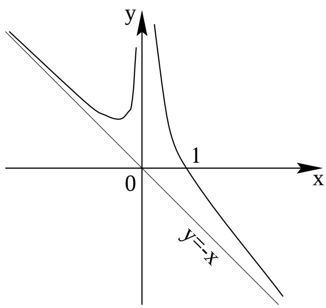


Рис. 133. *График функции* $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

Пример 23.3. *Исследовать функцию* $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ *и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечётная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Точка пересечения с осями только начало координат $(0; 0)$.
- Вертикальных асимптот нет.
- Наклонные асимптоты определим с помощью формул Маклорена

$$y = x^{2/3}(1 + \frac{1}{x})^{2/3} - x^{2/3}(1 - \frac{1}{x})^{2/3} = x^{2/3}\left(1 + \frac{2}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \right.$$

$$-1+\frac{2}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}+O\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right)\Rightarrow \pm 0 \text{ при } x\to\pm\infty.$$

Следовательно, существует горизонтальная асимптота $y=0$, к которой график функции приближается при $x\to+\infty$ сверху, а при $x\to-\infty$ снизу.

•
$$y'=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Поскольку $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}\neq 0$, критические точки $x=-1$ и $x=1$.

•
$$y''=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)=\frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

Числитель равен нулю при $x=0$. Таким образом, критические точки по 2-ой производной $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

• Составляем общую таблицу исследования функции по производным:

x	$-\infty;-1$	-1	$-1;0$	0	$0;1$	1	$1;+\infty$
y'	<0	$\pm+\infty$	>0	$\frac{4}{3}$	>0	$\pm+\infty$	<0
y''	<0	$\pm+\infty$	<0	0	>0	$+\infty$	>0
y	$\searrow$ $\cap$	min $-\sqrt[3]{4}$ Перегиба нет	$\nearrow$ $\cap$	Наклон $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ Точка перегиба $y=0$	$\nearrow$ $\cup$	max $\sqrt[3]{4}$ Перегиба нет	$\searrow$ $\cup$

• На основании проведённых исследований строим график функции (рис. 134)

В зависимости от уровня студентов в контрольную могут быть включены дополнительно или вместо одного из примеров исследования функции задача на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке $[a;b]$ и текстовая задача на экстремум.

Пример 23.4. *Найти наибольшее M и наименьшее значения функции $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ на отрезках* $[-1;1]$, $[-2;0]$, $[-2;2]$,

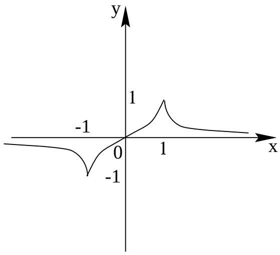


Рис. 134. *График функции* $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Р е ш е н и е:

- В интервале $(-1;1)$ экстремумов заданная функция не имеет, следовательно, она достигает своего наименьшего и наибольшего значения в граничных точках $y(-1) = -\sqrt[3]{4} = m$, $y(+1) = \sqrt[3]{4} = M$.
- В интервале $(-2;0)$ функция достигает минимума в точке $x=-1$. Значение функции в граничных точках равны $y(-2) = 1 - \sqrt[3]{9}$ и $y(0) = 0$. Следовательно, на отрезке $[-2;0]$ наименьшее значение достигается в точке минимума функции $m = y(-1) = -\sqrt[3]{4}$, наибольшее на границе $M = y(0) = 0$.
- В интервале $(-2;2)$ функция достигает максимума и минимума $y_{max} = y(1) = \sqrt[4]{3}$, $y_{min} = y(-1) = -\sqrt[3]{4}$. Из сравнения этих значений функции $y(-2) = 1 - \sqrt[3]{9}$; $y(2) = \sqrt[3]{9} - 1$. Находим $m = y_{min} = y(-1) = -\sqrt[3]{4}$, $M = y_{max} = y(1) = \sqrt[3]{4}$

Пример 23.5. *В данный шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объёма.*

Р е ш е н и е: Пусть радиус искомого цилиндра равен r, а высота – h. Сечение, проходящее через ось цилиндра, изображено на рис. 135. Объём цилиндра $V = \pi r^2 h$. Поскольку $r^2 + \dfrac{h^2}{4} = R^2$, находим $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$. Подставляя это значение r^2 в формулу для V, получаем $V = \pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)h$. Так как мы ищем цилиндр наибольшего объёма $\dfrac{dV}{dh} = \pi\left(R^2 - \dfrac{3h^2}{4}\right) = 0$, следовательно, $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ и $r = \sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}} =$

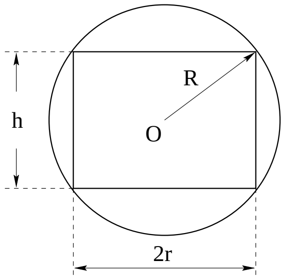


Рис. 135. *К примеру 23.5*

$= R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Ясно, что при этих значениях объём цилиндра будет наибольшим, так как наименьшее значение $V = 0$ получается при $h = 0$, соответственно $r = R$, или $h = 2R$, $r = 0$.

Ответ: $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}; r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Самостоятельная работа

Пример 23.6. *Исследовать функцию* $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 8}$ *и построить её график.*

Пример 23.7. *Исследовать функцию* $y = x^2 e^{-x}$ *и построить её график.*

Пример 23.8. *Исследовать функцию* $x + \operatorname{arctg} x$ *и построить её график.*

Пример 23.9. *Найти наибольшее* M *и наименьшее* m *значения функции* $y = x^2 e^{-x}$ *на отрезках* $[0; 1]$, $[0; 3]$, $[-1; 2]$

Пример 23.10. *Данное положительно число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.*

ГЛАВА V

Элементы векторной и линейной алгебры

Лекция 24. Матрицы и определители

Матрицы, действия над матрицами, определители второго порядка и их свойства, определители высших порядков.

24.1. Матрицы

Определение 24.1. *Прямоугольная таблица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{24.1}$$

составленная из $m \times n$ *чисел* a_{ij}, *называется матрицей размером* $m \times n$.

Числа a_{ij}, входящие в матрицу, называются элементами матрицы. Горизонтальный ряд чисел называется строкой, а вертикальный – столбцом матрицы. Первый индекс i – номер строки $(i = 1, 2, ..., m)$, второй j – номер столбца $(j = 1, 2, ..., n)$. Матрицу принято обозначать заглавными буквами, например A, B и т.д.

Приведем основную терминологию матриц, которую будем использовать в дальнейшем.

- Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов $(m \neq n)$, называется прямоугольной.
- Матрица, в которой число строк равно числу столбцов $(m = n)$, называется квадратной. Причём число её строк или столбцов называется порядком матрицы.

  Например, матрица

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

  является квадратной матрицей 2-го порядка.

- Последовательность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами ($i = j$) называется главной диагональю матрицы ($a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$).
- Если в квадратной матрице все недиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то матрица называется диагональной

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Квадратная диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется треугольной.
- Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей.
- Матрица, состоящая только из одной строки, называется матрицей-строкой

$$A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

- Матрица, состоящая только из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Матрица B называется транспонированной по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Например, по отношению к матрице
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ транспонированной будет
$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

24.2. Действия над матрицами

Определение 24.2. *(Равенство матриц.) Две матрицы A и B называются равными ($A = B$), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны, $a_{ij} = b_{ij}$.*

Определение 24.3. *(Сложение матриц.) Суммой двух матриц A и B одинакового размера ($m \times n$) называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:*

$$A + B = C, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{24.2}$$

Пример 24.1. *Сложить матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:
$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел:
$$A + 0 = A.$$

Определение 24.4. *Произведением матрицы A на число α называется матрица B:*

$$B = A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}). \tag{24.3}$$

Пример 24.2. *Умножить матрицу* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ *на число 3.*

Решение:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 3 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Определение 24.5. *Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на матрицу $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij}) = A \cdot B$, каждый элемент которой определяется выражением*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Как видно из определения произведения двух матриц, перемножить можно лишь матрицы, у которых число столбцов матрицы сомножителя A равно числу строк матрицы сомножителя B.

Например, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, то

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

В результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица множитель.

Рассмотрим ещё примеры умножения матриц.

Пример 24.3.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Эти примеры показывают, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$AB \neq BA.$$

Определение 24.6. *Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются коммутативными.*

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону

$$A(BC) = (AC)B$$

и распределительному закону

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Замечание 24.1. *Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь место, т. е. произведение двух не нулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.*

Пример 24.4. *Умножить матрицу* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *на матрицу* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Р е ш е н и е:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

24.3. Определители второго порядка и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 24.7. *Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число* $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. *Определитель обозначают символом*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{24.4}$$

Таким образом, определитель второго порядка можно вычислить (раскрыть) по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{24.5}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.

Пример 24.5. *Вычислить определитель матрицы* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$$

Приведем свойства определителя второго порядка.

- Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

- Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.

- Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$
- Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
- Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Все перечисленные свойства доказываются непосредственно раскрытием определителя.

24.4. Определители высших порядков

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{24.6}$$

Определение 24.8. *Определителем (или детерминантом) n-го порядка, соответствующим данной квадратной матрице, называют число, получаемое из элементов матрицы A по определённому закону – закону раскрытия определителя.*

Это число обозначается

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{24.7}$$

Прежде, чем формулировать закон раскрытия определителей высшего порядка, введем понятие минора и алгебраического дополнения.

Определение 24.9. *Минором, соответствующим данному элементу определителя n-го порядка, называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.*

Миноры будем обозначать заглавными буквами M_{ij} с двумя индексами. Так, например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя (24.7), есть определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Он получается, если вычеркнуть в определителе n-го порядка первую строку и второй столбец.

Определение 24.10. *Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, чётна, и со знаком минус, если эта сумма нечётна.*

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается через A_{ij}. Здесь i означает номер строки, а j-номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором выражается следующим равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{24.8}$$

Например: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$.

В этом случае закон раскрытия определителей можно записать следующим образом:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{для любых} \quad i \tag{24.9}$$

или

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{для любых} \quad j. \tag{24.10}$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Определитель n-го порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Так как согласно определениям 24.9 и 24.10, алгебраическое дополнение любого элемента определителя n – го порядка является определителем $n-1$-го порядка, из формул (24.9) и (24.10) следует, что любой *определитель n-го порядка сводится к сумме n определителей $n-1$-го порядка.*

В качестве примера использования формул (24.9) и (24.10) приведем формулы разложения определителя третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{24.11}$$

по элементам первой строки $|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$, и элементам второго столбца $|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$.

Замечание 24.2. *Для определителя 2-го порядка* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, *алгебраическим дополнением, согласно (24.8),* $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$. *И раскрывая* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *по (24.9) или (24.10) получим формулу (24.5).*

Пример 24.6. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{24.12}$$

Решение: Воспользуемся формулой (24.9) и раскроем определитель (24.12), например, по элементам третьей строки $(i = 3)$:

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \tag{24.13}$$

Предварительно вычислим алгебраические дополнения, входящие в формулу (24.13)

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 1\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = (-2)10 - 9(-10) = -20 + 90 = 70;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -1\begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -[(-1)10 - 1(-10)] = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)9 - 1(-2) = -9 + 2 = -7.$$

Подставим полученные числовые значения алгебраических дополнений в формулу (24.13) и вычислим определитель

$$|A| = 1 \cdot 70 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 70.$$

Замечание 24.3. *Рекомендуется раскрывать определители по элементам той строки или того столбца, которые содержат нулевые элементы, т.к. это значительно сокращает процесс вычислений.*

Все свойства определителя 2-го порядка, приведенные в п. 24.3, без всяких изменений переносятся и на определители n-го порядка.

Кроме них и правила раскрытия определителя укажем ещё одно важное свойство определителя.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю.

Так, для определителя третьего порядка можно записать

$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0;$

$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0.$

Проверим, например, первое равенство. Используя связь между алгебраическими дополнениями и минорами и определение минора элемента определителя, можем написать:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}(-M_{21}) + a_{12}M_{22} + a_{13}(-M_{23}) =$$

$$= -a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} -$$

$$-a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0.$$

Свойства определителя могут быть использованы для того, чтобы в какой-либо строке (или столбце) все элементы, кроме одного, сделать равными нулю.

Покажем это на примере вычисления определителя (24.12): $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ из примера 24.6.

Р е ш е н и е: Прибавим к элементам первой строки элементы третьей строки и вычтем из элементов второй строки элементы третьей строки

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь раскроем полученный определитель по элементам первого столбца и получим результат, известный из решения примера 24.6.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 70.$$

Таким образом, мы можем сформулировать общее *правило*, согласно которому *любой определитель n-го порядка может быть сведен к одному определителю $n-1$-го порядка.* И, следовательно, применяя последовательно это правило, мы можем свести определитель n-го порядка к числу. Вычисление определителей часто удобнее и быстрее проводить, пользуясь этим правилом.

Практическое занятие 24. Матрицы и определители

Пример 24.1. *Найти сумму матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Для того чтобы найти сумму матриц, необходимо сложить элементы этих матриц с одинаковыми индексами: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 5+2 & 3+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ -1+4 & 2+0 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 24.2. *Найти матрицу D=2A+5B, если*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Имеем $C = \alpha \cdot A \Rightarrow c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, 5B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$D = 2A + 5B = \begin{pmatrix} 0+5 & 10+15 \\ 8+10 & 2-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}.$$

Пример 24.3. *Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Как показано выше в лекции, элемент матрицы-произведения, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки первой матрицы-сомножителя и элементов j-го столбца второй матрицы-сомножителя.

1) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot2+4\cdot1+0\cdot3 & 2\cdot1+4\cdot(-1)+0\cdot2 & 2\cdot0+4\cdot2+0\cdot1 \\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0\cdot(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 8 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2) $$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot4+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot4+0\cdot3 \\ 1\cdot2+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot4+(-1)\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot0+(-1)\cdot4+2\cdot3 \\ 3\cdot2+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot4+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot0+2\cdot4+1\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 11 & 14 & 11 \end{pmatrix}.$$

В результате мы ещё раз убедились, что произведение матриц не подчиняется переместительному закону, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 24.4. *Найти произведение матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Напомним, что о произведении двух прямоугольных матриц можно говорить только в случае, когда число столбцов первой матрицы, стоящей в произведении, равно числу строк второй матрицы. В данном примере это условие выполняется: число столбцов матрицы А равно 4, число строк матрицы В также 4. Выполним умножение матриц:

$$A \cdot B = \Bigg(\begin{matrix} 2\cdot(-2)-1\cdot(-1)+3\cdot4+5\cdot3 & 2\cdot1+(-1)\cdot5+3\cdot0+ \\ 4\cdot(-2)+0\cdot(-1)+1\cdot4+2\cdot3 & 4\cdot1+0\cdot5+1\cdot0+ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5\cdot 1+2\cdot 0+(-1)\cdot(-2)+3\cdot 1+5\cdot(-1) \\ 2\cdot 1+4\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot(-1) \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 24 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, число строк матрицы-произведения равно числу строк матрицы-множимого, а число столбцов матрицы-произведения равно числу столбцов матрицы-множителя. Легко убедиться в том, что найти произведение $B \cdot A$ в данном случае невозможно.

Пример 24.5. *Найти миноры M_{13}, M_{32} и алгебраические дополнения A_{13}, A_{32} матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Минор с соответствующим номером ij является определителем, получающимся из данной матрицы путём вычёркивания i-й строки и j-го столбца. Алгебраическое дополнение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -1 - 8 = -9.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \cdot (-9) = -9.$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 0 = 6.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot 6 = -6.$$

Пример 24.6. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Целесообразно раскрывать данный определитель по элементам второй строки, т.е.

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} =$$

$$= -0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 25 - 21 = 4.$$

Пример 24.7. *Вычислить определитель четвёртого порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Данный определитель целесообразно раскрыть по элементам третьего столбца, т.е.

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} =$$

$$= A_{13} + 2A_{33} = M_{13} + 2M_{33}.$$

Вычислим миноры M_{13} и M_{33}, раскрывая определители по элементам первой строки:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 2(-2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) + 3(-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3)) = -5 - 10 + 15 = 0.$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 2(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 4(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2)) = -32 + 16 + 32 = 16.$$

В итоге $|A| = M_{13} + 2M_{33} = 0 + 2 \cdot 16 = 32$.

Вычислим теперь данный определитель по правилу, сформулированному в конце лекции.

- Прибавим к элементам третьей строки соответствующие элементы первой строки, умноженные на -2 :

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -10 & -7 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

- Раскроем этот определитель по элементам третьего столбца:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -10 & -7 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -10 & -7 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

- В полученном определителе прибавим к элементам второго и третьего столбцов элементы первого столбца, умноженные соответственно на 2 и -3 :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & -27 & 23 \\ 3 & 8 & -8 \end{vmatrix}.$$

- Раскроем полученный определитель по элементам первой строки:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -27 & 23 \\ 8 & -8 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -27 & 23 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8(27-23) = 32.$$

Пример 24.8. *Решить уравнение*

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ x & x & 8 \end{vmatrix} = 12.$$

Р е ш е н и е: Разложим определитель по элементам первой строки и получим уравнение первого порядка относительно x, решая которое можно найти неизвестное x.

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ x & 8 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ x & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & x \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow 24 - 7x + 5(3x - 4x) = 12$$

$$\Rightarrow 24 - 12x = 12 \Rightarrow x = 1.$$

Самостоятельная работа

Пример 24.9. *Найти сумму матриц:*
$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 24.10. *Дана матрица* $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. *Какую матрицу B нужно прибавить к матрице A, чтобы получить единичную матрицу третьего порядка?*

Пример 24.11. *Найти матрицу $D = 3A + 5E$, если E - единичная матрица третьего порядка,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 24.12. *Найти* A^2, *если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 24.13. *Найти произведение матриц* $A \cdot B$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Пример 24.14. *Найти миноры* M_{12}, M_{22} *и алгебраические дополнения* A_{12}, A_{22} *матрицы*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 24.15. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Пример 24.16. *Вычислить определитель четвёртого порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Пример 24.17. *Решить уравнение*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & x & 6 \\ 3x & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Лекция 25. Обратная матрица. Ранг матрицы

Обратная матрица. Ранг матрицы, элементарные преобразования матриц.

25.1. Обратная матрица

Рассмотрим так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Определение 25.1. *Если A – квадратная матрица, то обратной для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию*

$$AA^{-1} = E. \tag{25.1}$$

Можно доказать, что матрицы A и A^{-1} являются коммутативными:

$$A^{-1}A = E.$$

Приведем теперь следующую основную теорему.

Теорема 25.1. (об обратной матрице)*: Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.*

Доказательство Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Покажем, что в этом случае матрица A должна быть невырожденной, т.е. её определитель $|A| \neq 0$. Действительно, если бы $|A| = 0$, то определитель произведения

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 0.$$

Но это невозможно в силу того, что $|AA^{-1}| = |E| = 1$.

Достаточность. Для простоты проведем доказательство для случая матрицы третьего порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица, т.е. её определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае существует обратная матрица.

В самом деле, пусть A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. Матрица A^{-1}, обратная матрице A, получается следующим образом.

- Составим матрицу B, заменяя в матрице A каждый её элемент a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij}, делённым на определитель $|A|$ матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

- Образуем матрицу B^T, транспонированную по отношению к матрице B. Имеем

$$B^T = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрица B^T, является обратной матрице A. Для этого составим произведение

$$AB^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

т.к. числители элементов на главной диагонали равны $|A|$ (раскрытие определителя по элементам строки), а числители всех остальных элементов равны нулю (сумма произведений элементов одной строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю).

Таким образом, $AB^T = E$, откуда $B^T = A^{-1}$. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Обобщая доказательства на матрицы n-го порядка получим, что при $|A| \neq 0$ обратная матрица существует и вычисляется по формуле.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{25.2}$$

Пример 25.1. *Дана матрица* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Найти обратную матрицу.*

Р е ш е н и е: Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{5} & \dfrac{-2}{5} & \dfrac{-4}{5} \\[2ex] \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{-1}{5} \\[2ex] \dfrac{-12}{5} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

25.2. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (25.3)$$

имеющую m строк и n столбцов. Выделим в этой матрице произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k.

Напомним, что минором k-го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов.

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

имеющей три строки и четыре столбца, одним из миноров третьего порядка является определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, полученный выделением первой, второй и третьей строк и первого, второго и третьего столбцов матрицы A. Минором второго порядка является, например, определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$. Сами элементы матрицы можно рассматривать как миноры первого порядка. Некоторые из миноров матрицы могут быть равны нулю, другие – отличны от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25.2. *Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля её миноров.*

Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единственный минор четвёртого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

как определитель, все элементы одной из строк которого равны нулю. Один из миноров третьего порядка отличен от нуля, например $M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Следовательно, ранг данной матрицы равен 3, т.е. $r(A) = 3$.

25.3. Элементарные преобразования матриц

При определении ранга матрицы, как правило, приходится вычислять большое число определителей. Чтобы облегчить этот процесс, применяют специальные приемы. Прежде чем излагать эти приемы, введем понятие об *элементарных преобразованиях матрицы.*

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и тоже число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;

- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными.* Эквивалентные матрицы, вообще говоря, не равны друг другу, но, как можно доказать, *ранги эквивалентных матриц равны.* Этим обстоятельством пользуются при вычислении ранга матрицы.

Пример 25.2. *Вычислить ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Вычтем из 2-ой строчки 1-ую и результат поставим в 1-ую строчку

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из второй и третьей строк матрицы A_1 первую строку, умноженную соответственно на 3 и 5, получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_2 вторую строку, получим матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасывая в матрице A_3 строку, состоящую из нулей, получаем матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

ранг которой равен, очевидно, двум. Следовательно, ранг данной матрицы A также равен двум, т.е. $r(A) = 2$.

Здесь для преобразования матриц мы использовали метод Гаусса, который более подробно будет рассмотрен в следующей лекции.

Практическое занятие 25. Обратная матрица. Ранг матрицы

Пример 25.1. *Определить ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Все миноры второго и третьего порядка данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен $r(A) = 1$.

Пример 25.2. *Определить ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Совершим элементарные преобразования матрицы. Элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга, но существенно сокращают объем вычислений. Цель использования элементарных преобразований – получить строку (столбец) матрицы, целиком состоящую из нулей. Для дальнейших исследований такую строку (столбец) можно вычеркнуть.

- Сложим соответствующие элементы 1-й и 3-й строк, поместив результат в первую строку:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3+1 & 5+3 & 7+5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Разделим на 4 (умножим на $\frac{1}{4}$) элементы 1-й строки

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Из элементов 1–й строки вычтем соответствующие элементы 2–й строки и результат поместим в первой строке:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Вычеркнем первую строку, содержащую элементы, все равные нулю

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например, минор
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Следовательно, и ранг исходной матрицы равен 2.

Пример 25.3. *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Совершим элементарные преобразования матрицы.

- Переставим первую и вторую строки матрицы местами:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- В левом верхнем углу матрицы теперь стоит единица. С её помощью легко обратить в нуль все элементы первого столбца ниже главной диагонали. Для этого, прибавим последовательно, ко 2-й строке 1-ю, умноженную на (-2), к четвертой первую, умноженную на (-4). В результате получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Переставим вторую и третью строки последней матрицы местами

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Проделаем с последней матрицей элементарные преобразования, аналогичные второму пункту, чтобы образовать нули во втором столбце ниже главной диагонали. Для этого из четвертой строки этой матрицы вычтем вторую.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Из четвертой строки вычитаем третью и вычеркиваем четвертую нулевую строку

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Ранг последней матрицы равен 3, т.к. больше трёх он быть не может, а отличный от нуля минор 3-го порядка существует, например, минор, составленный из трёх первых столбцов:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, ранг исходной матрицы также будет равен 3.

Пример 25.4. *Найти матрицу, обратную матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Определитель этой матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A–невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица.

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Составляем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} -3/9 & 6/9 & -3/9 \\ 4/9 & -2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Меняем местами строки и столбцы в этой матрице, получим матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа

Пример 25.5. *Определить ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Пример 25.6. *Определить ранг матрицы*
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 25.7. *Определить ранг матрицы*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 25.8. *Определить ранг матрицы*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 25.9. *Найти матрицу, обратную данной*
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 25.10. *Найти матрицу, обратную данной*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лекция 26. Системы линейных уравнений

Система линейных уравнений, теорема Кронекера–Капелли, решение системы уравнений матричным способом, формулы Крамера, метод Гаусса.

26.1. Система линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = c_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array} \right. \tag{26.1}$$

Здесь первый индекс в обозначении коэффициента a_{ij} означает номер уравнения, а второй номер неизвестного. Каждая неизвестная обозначена одной буквой x с индексом, означающим её номер.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система линейных уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределённой, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две совместные системы уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое решение второй системы является решением первой.

Можно доказать, что следующие преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей:

- перемена местами двух любых уравнений;
- умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
- перемена слагаемых, содержащих разные неизвестные, местами;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Эти преобразования, по аналогии с элементарными преобразованиями матриц, будем называть элементарными.

Возможно, что после нескольких таких преобразований в системе появится уравнение, все коэффициенты которого и свободный член равны нулю. Поскольку такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, оно может быть отброшено. В этом случае мы получим систему, равносильную данной и содержащую на одно уравнение меньше, чем данная система.

Если в результате применения элементарных преобразований в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это указывает на то, что уравнение не удовлетворяет никаким значениям неизвестных и, следовательно, полученная система несовместна. Поэтому несовместной является и первоначальная система.

Если обозначить через A матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных (26.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{26.2}$$

Через X – матрицу-столбец, составленную из неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{26.3}$$

Через C – матрицу-столбец, составленную из свободных членов

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{26.4}$$

Произведение $A \cdot X$ есть матрица–столбец

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{26.5}$$

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$A \cdot X = C. \tag{26.6}$$

26.2. Теорема Кронекера–Капелли. (Теорема существования решения системы линейных уравнений)

Ответ на вопрос о совместности или несовместности системы линейных алгебраических уравнений без решения системы даёт следующая теорема (приводится без доказательства).

Теорема 26.1. *(Теорема Кронекера–Капелли)*
Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{26.7}$$

был равен рангу её расширенной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}\ c_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}\ c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn}c_m \end{pmatrix}, \tag{26.8}$$

т.е. $r(A) = r(B)$.

Расширенная матрица получается из матрицы системы добавлением столбца, состоящего из свободных членов уравнений системы.

Если ранги матриц A и B равны числу неизвестных, т.е. $r(A) = r(B) = n$ система уравнений имеет единственное решение.

Если же ранги матрицы равны между собой и меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) = r(B) < n$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.

26.3. Решение системы линейных уравнений матричным методом

Если число неизвестных системы равно числу уравнений и матрица A системы невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, то уравнение $A \cdot X = C$ решается следующим образом:

- Умножаем обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A :

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C.$$

- Используя сочетательный закон умножения матриц, можно записать:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C.$$

- Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение матричного уравнения получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot C. \tag{26.9}$$

Пример 26.1. *Решить матричным способом систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: В матричной форме эта система запишется в виде $AX = C$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Матрица A^{-1} найдена нами в примере 25.1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы записываем в виде

$$X = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда на основании определения равенства матриц следует, что $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

26.4. Формулы Крамера

Рассмотрим ещё раз систему n уравнений с n неизвестными $A \cdot X = C$, для которой $|A| \neq 0$. Запишем матричное равенство (26.9) в следующем виде:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \frac{A_{21}}{|A|} \cdots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} \frac{A_{22}}{|A|} \cdots \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \frac{A_{2n}}{|A|} \cdots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot\cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \ldots A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot\cdot \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \cdots + A_{n1}c_n \\ A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \cdots + A_{n2}c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}c_1 + A_{2n}c_2 + \cdots + A_{nn}c_n \end{pmatrix}.$$

Вспомним, что две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{|A|}(A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \cdots + A_{n1}c_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{|A|}(A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \cdots + A_{n2}c_n) \\ \dotfill \\ x_n = \dfrac{1}{|A|}(A_{1n}c_1 + A_{2n}c_2 + \cdots + A_{nn}c_n) \end{cases} \tag{26.10}$$

Обратим внимание на то, что выражения в круглых скобках равенств (26.10) представляют собой определители, полученные из определителя системы $|A|$ заменой соответствующего номеру неизвестного столбца столбцом свободных членов данной системы уравнений (26.1). Обозначим их следующим образом:

$$\Delta_{x_1} = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \cdots + A_{n1}c_n = \begin{vmatrix} c_1 a_{12} \ldots a_{1n} \\ c_2 a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \cdots + A_{n2}c_n = \begin{vmatrix} a_{11} c_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} c_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} c_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и т.д.

С учётом этих обозначений формулы (26.10) можно переписать в виде:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{|A|}. \tag{26.11}$$

Формулы (26.11) называются формулами Крамера[11] и являются следствием формулы (26.9).

Пример 26.2. *Решить систему уравнений методом Крамера*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

[11] Г.Крамер (1704–1752) – швейцарский математик.

Р е ш е н и е: Ранее определитель системы

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

уже был вычислен: $|A|$=5. Вычислим определители неизвестных:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10.$$

Используя формулы Крамера, найдем:$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{|A|} = \dfrac{5}{5} = 1$;
$x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{|A|} = \dfrac{-5}{5} = -1$; $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{|A|} = \dfrac{10}{5} = 2$.

26.5. Метод Гаусса для систем линейных уравнений (метод последовательного исключения)

Метод Гаусса – метод решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений $(m = n)$, либо отлично от него.

Метод Гаусса заключается в следующем. Допустим, что в системе (26.1) коэффициент при первом неизвестном $a_{11} \neq 0$.

Если $a_{11} = 0$, то всегда можно перенумеровать неизвестные так, чтобы коэффициент при первом неизвестном стал отличен от нуля.

Исключим сначала неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого прежде всего разделим обе части первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$; тогда получим новую систему, равносильную данной:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \dfrac{c_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = c_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array}\right. \tag{26.12}$$

Умножим теперь первое уравнение системы (26.12) на a_{21} и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. В результате получим новую систему, также равносильную данной:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1k}x_k + \cdots + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = c'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{ik}x_k + \cdots + a'_{in}x_n = c'_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mk}x_k + \cdots + a'_{mn}x_n = c'_m. \end{array}\right. \tag{26.13}$$

Здесь введены обозначения:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}; \qquad i = 2, 3, \ldots, n;$$

$$c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}}, \quad c'_i = c_i - \frac{c_1}{a_{11}}a_{i1}; \qquad i = 2, 3, \ldots, m.$$

Разделим теперь второе уравнение системы (26.13) на коэффициент a'_{22}, предполагая, что он отличен от нуля; затем умножим второе уравнение полученной системы последовательно на $a'_{32}, \ldots, a'_{i2}, \ldots, a'_{m2}$ и вычтем поочередно из соответствующих уравнений системы, кроме первого и второго.

Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то эта система несовместна. Ранг матрицы A системы (26.12) не равен рангу расширенной матрицы B.

$$r(A) \neq r(B).$$

В том случае, когда система совместна, мы придем либо к системе

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1k}x_k + \cdots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad x_2 + \cdots + b_{2k}x_k + \cdots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + \cdots + b_{rn}x_n = B_r. \end{cases} \tag{26.14}$$

(причём r < n), либо к системе

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1k}x_k + \cdots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad x_2 + \cdots + b_{2k}x_k + \cdots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_k + \cdots + b_{kn}x_n = B_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = B_n. \end{cases} \tag{26.15}$$

Система вида(26.14)называется ступенчатой,а системавида(26.15)–треугольной.

В случае треугольной системы из последнего уравнения находим $x_n = B_n$; затем подставляя значения x_n в предыдущее уравнение, находим x_{n-1} и т.д.

Таким образом, если данная система уравнений (26.1) после выполнения ряда элементарных преобразований приводит к треугольной системе (26.15), то это означает, что система (26.1) является совместной и определённой.

Ранг матрицы A системы (26.12) равен рангу расширенной матрицы B и равен числу неизвестных n.

$$r(A) = r(B) = r = n.$$

Если же данная система (26.1) после элементарных преобразований приводится к ступенчатой системе (26.14), то система (26.1) совместна и неопределённа.

$$r(A) = r(B) = r < n.$$

В самом деле, перенося в каждом из уравнений системы (26.14) члены с неизвестными $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть, получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1p}x_p = B_1 - b_{1,p+1}X_{p+1} - \cdots - b_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \cdots + b_{2p}x_p = B_2 - b_{2,p+1}X_{p+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r = B_r - b_{r,r+1}X_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придавая неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$, которые называются свободными, произвольные значения $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные
$x_1, x_2, \ldots, x_r$, которые называются базисными. Так как числа $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ могут иметь различные значения, то исходная система (26.1) имеет бесчисленное множество решений.

Замечание 26.1. *Часто при преобразованиях системы по Гауссу целесообразно переставлять строки и столбцы с неизвестными.*

Пример 26.3. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Совершим элементарные преобразования, которые каждый раз будут приводить нас к равносильной исходной системе уравнений.

- Переставим местами первое и второе уравнения системы для удобства дальнейших преобразований:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

- Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из второго, умножим первое уравнение на 5 и вычтем из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -7x_2 - x_3 = 5, \\ -12x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

- Поменяем члены, содержащие x_2 и x_3 местами,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ x_3 + 7x_2 = -5, \\ -x_3 - 12x_2 = 10. \end{cases}$$

- Сложим второе и третье уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ \quad x_3 + 7x_2 = -5, \\ \qquad -5x_2 = -5. \end{cases}$$

Полученная треугольная система является совместной, определённой и равносильной исходной. Из этой системы последовательно находим:

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = -5 - 7x_2 = 2$$

$$x_1 = -3x_2 - x_3 = (-3)(-1) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Прежде, чем перейти к решению других примеров по методу Гаусса, заметим, что *нет необходимости каждый раз переписывать системы уравнений. Все преобразования можно проводить над расширенной матрицей системы (26.8).*

Пример 26.4. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу системы и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Выше вертикальной прямой отделен столбец свободных членов от столбцов коэффициентов при неизвестных, так как его, в отличие от других столбцов, нельзя переставлять.

Отсюда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(B) = 2$, а количество неизвестных равно 4. Следовательно, система уравнений имеет бесчисленное множество решений. Последняя матрица в преобразованиях есть расширенная матрица системы.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ \quad 11x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Если в качестве базисных неизвестных выбрать, например, x_1 и x_2, тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4 после элементарных преобразований следует

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}x_3 + \dfrac{2}{11}x_4, \\ \\ x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}x_3 - \dfrac{7}{11}x_4. \end{cases}$$

Полагая, например, $x_3 = 1, x_4 = 1$, получим $x_1 = -1, x_2 = -1$, т.е. некоторое частное решение системы уравнений.

Пример 26.5. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составляем расширенную матрицу и выполняем над её строками элементарные преобразования. Поскольку при применении метода Гаусса к данной системе целесообразно менять местами слагаемые, содержащие неизвестные, будем указывать их над соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -22 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\left\{\begin{aligned} x_2 + 2x_1 + x_3 - x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 &= 12, \\ x_4 &= 0, \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= -22. \end{aligned}\right.$$

Так как последнее уравнение этой системы противоречиво, то она является несовместной. Следовательно, несовместна и равносильная ей исходная система уравнений, т.е. она не имеет решения.

Практическое занятие 26. Системы линейных уравнений

Пример 26.1. *Решить матричным способом систему уравнений*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Для данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица вычисляется по соответствующему правилу, рассмотренному в предыдущем разделе:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

Пример 26.2. *Решить систему уравнений методом Крамера*

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Здесь

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

По формулам Крамера находим:

$$x = \frac{-8}{-8} = 1, \; y = \frac{-16}{-8} = 2, \; z = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Пример 26.3. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3=1, \\ x_1-x_2+2x_3=5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу и проведем над ней элементарные преобразования по Гауссу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -10 & -18 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{полученная матрица} \\ \text{соответствует} \\ \text{системе} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \qquad x_2 - 2x_3 = -4, \\ \qquad\qquad x_3 = 3, \end{cases}$$

из которой последовательно находим

$$x_3 = 3,\ x_2 = -4 + 6 = 2,\ x_1 = 5 + x_2 - 2x_3 = 1.$$

Итак, решение треугольной системы, а следовательно, и равносильной ей первоначальной, таково: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Данная система является совместной и определённой.

Пример 26.4. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 7, \\ \qquad 2x_1 + x_3 + x_5 = 4, \\ \qquad x_2 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 7 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 10 & 3 & 14 \end{array}\right).$$

Здесь мы последовательно провели следующие преобразования:

- умножили первую строку на 2 и вычли из второй;
- переставили вторую и третью строку;
- к третьей строке прибавили вторую, умноженную на 4.

Последней матрице соответствует ступенчатая система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 7, \\ \qquad x_2 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ \qquad -7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 14, \end{cases}$$

равносильная данной. Перепишем полученную систему следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 + x_4 + 3x_5, \\ \qquad x_2 = 6 - 2x_4 + x_5, \\ \qquad -7x_3 = 14 - 10x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Мы видим, что неизвестные x_1, x_2 и x_3 можно выразить через x_4 и x_5:

$$\begin{cases} x_3 = & -2 + \dfrac{10}{7}x_4 + \dfrac{3}{7}x_5, \\ x_2 = & 6 - 2x_4 + x_5, \\ x_1 = & 3 - \dfrac{5}{7}x_4 - \dfrac{5}{7}x_5. \end{cases}$$

Придавая x_4 и x_5 произвольные значения, получим соответствующие значения x_1, x_2 и x_3. Неизвестные x_4 и x_5 в этом случае являются свободными неизвестными, а x_1, x_2 и x_3 – базисными.

Таким образом, данная система – совместная и неопределённая. Её решениями, например, служат $x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = -2$, $x_2 = 6$, $x_1 = 3$ или $x_5 = 7$, $x_4 = 7$, $x_3 = 11$, $x_2 = -1$, $x_1 = -7$ и т. д..

Пример 26.5. *Исследовать систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x - y - z = 5, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ x - 4y - 6z = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу и выполним преобразования, рекомендуемые в методе Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Мы провели последовательно следующие операции:

- Умножили 1-ую строку на -2 и сложили со 2-ой, результат поставили во 2-ую строку.
- Вычли из 3-ей строки первую, результат поместили в 3-ю строку.
- Сложили полученные 2-ую и 3-ю строки уравнений.

Полученной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x - y - z = 5, \\ 3y + 5z = -7, \\ 0x + 0y + 0z = -5. \end{cases}$$

Так как последнее уравнение этой системы противоречиво, система несовместна, и, следовательно, решений не имеет.

Самостоятельная работа

Пример 26.6. *Решить матричным способом систему уравнений*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

Пример 26.7. *Решить систему уравнений методом Крамера*

$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Пример 26.8. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Пример 26.9. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Лекция 27. Векторная алгебра. Основные понятия

Векторы, основные определения, линейные операции, проекция и составляющая вектора по оси.

27.1. Основные определения

При изучении физики, химии и технических наук встречаются величины, которые полностью определяются заданием их численных значений — действительных чисел. Такие величины называются скалярными. Скалярными величинами являются длина, площадь, объём, масса, температура, валентность и др.

Наряду со скалярными, встречаются величины, для определения которых необходимо знать их направление в пространстве, например, сила, скорость, ускорение и т.д. Такие величины называются векторными, они описываются с помощью векторов.

Определение 27.1. *Вектором называется направленный отрезок.*

Вектор характеризуется длиной и направлением. Одна из ограничивающих его точек принимается за начало, вторая – за конец, который на рисунке показывается стрелкой (рис. 136).

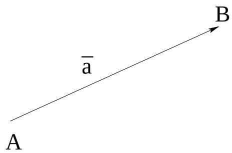


Рис. 136. *Вектор $\overline{a}$*

Если даны начало вектора (точка A) и его конец (точка B), то вектор обозначается $\overline{AB}$. Будем также обозначать векторы малыми латинскими буквами с черточкой наверху: $\overline{a}$, или жирным шрифтом: $\mathbf{a}$.

Определение 27.2. *Модулем вектора $\overline{a}$ называется его длина. Модуль вектора обозначается $|\overline{a}|$.*

Определение 27.3. *Нуль-вектором называется вектор, у которого конец совпадает с началом, он обозначается: $\overline{0}$ или $\mathbf{0}$.*

Очевидно, что $|\overline{0}| = 0$. Направление нуль-вектора не определено. Можно считать, что нуль-вектор имеет любое желаемое в данный момент направление.

Определение 27.4. *Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой. Будем записывать в этом случае $\overline{a} \parallel \overline{b}$.*

Определение 27.5. *Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются сонаправленными, если они коллинеарны и направлены в одну сторону. Будем обозначать это так: $\overline{a} \upuparrows \overline{b}$.*

Определение 27.6. *Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются противонаправленными, если они коллинеарны и направлены в разные стороны. Будем обозначать это так: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.*

Определение 27.7. *Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Будем записывать это так: $\overline{a} = \overline{b}$.*

Из последнего определения следует, что вектор можно переносить параллельно в любую точку пространства, и он от этого не изменится.

Пример 27.1. *Для прямоугольника, изображённого на рис. 137,* $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$.

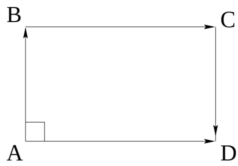


Рис. 137. *Коллинеарные векторы*

27.2. Линейные операции над векторами

Линейными называются операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на число.

Определение 27.8. *Суммой двух векторов* $\overline{a}+\overline{b}$ *называется вектор, полученный по правилу «треугольника»: второй вектор* $\overline{b}$ *откладывается так, чтобы его начало совпадало с концом первого вектора* $\overline{a}$ *(рис. 138).*

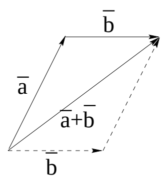


Рис. 138. *Сумма векторов*

Суммой будет являться «замыкающий» вектор $\overline{a} + \overline{b}$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\overline{a}$, а конец – с концом второго вектора $\overline{b}$.

Ту же самую сумму можно получить по правилу «параллелограмма»: второй вектор $\overline{b}$ откладывается из начала первого вектора $\overline{a}$, на этих векторах строится параллелограмм (рис. 138) и суммой $\overline{a} + \overline{b}$ в этом случае является диагональ этого параллелограмма.

Докажите самостоятельно, что сумма двух данных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, полученная по правилу треугольника, совпадает с суммой, полученной по правилу параллелограмма.

27.3. Свойства сложения векторов

1. Коммутативный закон сложения: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. Ассоциативный закон сложения: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Доказательство 1-го свойства следует из рис.138, а 2-го – из рис.139. В силу того, что три вектора можно складывать в любом порядке, эту сумму записывают без скобок: $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$. Суммой нескольких векторов будет являться «замыкающий» вектор: если слагаемые векторы расположить один за другим (конец одного является началом следующего), то суммой будет вектор с началом в начале первого слагаемого и с концом – в конце последнего (рис. 139). Третье свойство докажите

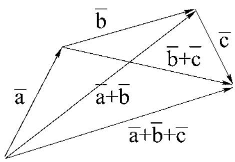


Рис. 139. *Ассоциативный закон сложения векторов*

самостоятельно.

Определение 27.9. *Противоположным к вектору $\overline{a}$ называется такой вектор, что его сумма с $\overline{a}$ равна нуль-вектору.*

Противоположный к $\overline{a}$ вектор обозначается $-\overline{a}$: $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$. Одним из векторов $-\overline{a}$ будет, например, такой, что его начало совпадает с концом вектора $\overline{a}$, а конец – с началом $\overline{a}$.

Определение 27.10. *Разностью двух векторов $\overline{a}-\overline{b}$ называется сумма векторов $\overline{a}$ и противоположного к $\overline{b}$: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$.*

Очевидно, что $(\overline{a}-\overline{b})+\overline{b}=\overline{a}$, т.к. $(\overline{a}-\overline{b})+\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})+\overline{b}=$
$=\overline{a}+((-\overline{b})+\overline{b})=\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Таким образом, если $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$, то $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$.

Из определения вытекает правило построения разности векторов $\overline{a}-\overline{b}$: строим противоположный к $\overline{b}$ вектор, «переворачивая» его в противоположную сторону (изменяя его направление на противоположное) и, откладывая его от конца вектора $\overline{a}$, строим сумму векторов $\overline{a}$ и $(-\overline{b})$ (рис. 140). Если на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, отложенных из общей

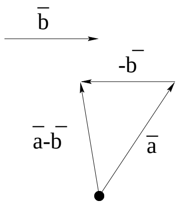


Рис. 140. *Вычитание векторов*

точки O, построить параллелограмм $OACB$ (рис. 141), то вектор $\overline{OC}$, совпадающий с одной диагональю, равен сумме $\overline{a}+\overline{b}$, а вектор $\overline{BA}$, совпадающий с другой диагональю, равен разности $\overline{a}-\overline{b}$.

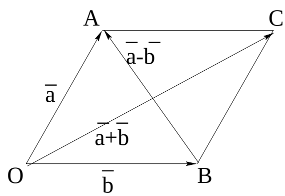


Рис. 141. *Сумма и разность векторов*

Определение 27.11. *Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ называется вектор $\overline{c}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину $|\overline{c}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$ и сонаправленный с $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противонаправленный с $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.*

Пример 27.2. *$2\overline{a}$ есть вектор, сонаправленный с $\overline{a}$ и имеющий длину в два раза больше, чем $\overline{a}$, $-\dfrac{1}{2}\overline{a}$ есть вектор, противонаправленный с $\overline{a}$ и имеющий длину вдвое меньшую, чем $\overline{a}$.*

Противоположный вектор $-\overline{a}$ можно рассматривать как результат умножения вектора $\overline{a}$ на число $\lambda = -1$: $-\overline{a} = (-1)\overline{a}$.

27.4. Свойства умножения вектора на число

1. Коммутативный закон: $\lambda\overline{a} = \overline{a}\lambda$.
2. Ассоциативный закон: $\lambda_1(\lambda_2\overline{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\overline{a}$.
3. Дистрибутивный закон: $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.

Доказательства, очевидно, вытекают из определения операций. Попробуйте провести их самостоятельно.

Теорема 27.1. *Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ или $\overline{a} = \lambda\overline{b}$.*

Доказательство. Если $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ или $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, то $\overline{b} \parallel \overline{a}$ по определению умножения вектора на число.

Если $\overline{b} \parallel \overline{a}$ и $\overline{a} \neq 0$, то $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ (по тому же определению). Даже в случае $\overline{b} = \overline{0}$, получаем $\overline{0} = 0 \cdot \overline{a}$. Если $\overline{a} = \overline{0}$, то можно записать, что $\overline{a} = \overline{0} = 0 \cdot \overline{b}$.

Определение 27.12. *Единичным называется вектор, длина которого равна единице.*

Пусть дан вектор $\overline{a}$. Обозначим через $\overline{e}_a$ единичный вектор, сонаправленный с $\overline{a}$. Из определения умножения вектора на число следует, что: $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{e}_a$, или

$$\overline{e}_a = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}. \tag{27.1}$$

Заметим, что для каждой числовой оси l определен единичный вектор $\overline{e}_l$ с началом в точке O и концом в точке с координатой 1 (рис. 142).

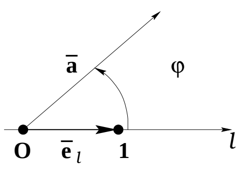


Рис. 142. *Угол вектора с осью*

Определение 27.13. *Углом между ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть один из них до совпадения с другим, если эти векторы отложены из одной точки (рис. 143).*

Если один из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ нулевой, то угол между ними считается неопределённым.

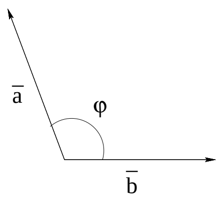


Рис. 143. *Угол между векторами*

Из определения ясно, что угол φ между векторами находится в пределах: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Определение 27.14. *Углом между вектором $\overline{a}$ и осью l называется угол между вектором $\overline{a}$ и единичным вектором оси $\overline{e}_l$ (рис. 142).*

Определение 27.15. *Проекцией точки A на ось l называется точка пересечения плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно l, с осью l (рис. 144). Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, равное разности координат проекций конца и начала:*

$$Пр_l\overline{AB} = x_2 - x_1. \tag{27.2}$$

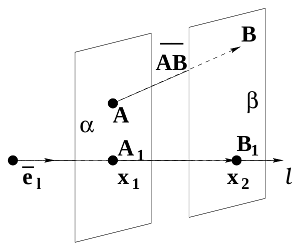


Рис. 144. *Проекция и составляющая вектора по оси*

Заметим, что если угол φ между вектором $\overline{AB}$ и осью l острый, как на рис. 144, то $x_2 > x_1$ и $\text{Пр}_l\overline{AB}$ положительна. Если угол φ тупой, то $\text{Пр}_l\overline{AB}$ отрицательна. Если $\overline{AB} \perp l$ ($\varphi = 90°$), то $\text{Пр}_l\overline{AB} = 0$.

Определение 27.16. *Составляющей вектора $\overline{AB}$ по оси l называется произведение проекции вектора $\overline{AB}$ на ось l на единичный вектор этой оси $\overline{e}_l$.*

Составляющая вектора $\overline{AB}$ по оси l есть вектор, соединяющий проекцию начала и проекцию конца вектора (рис. 144):

$$\text{Сост}_l\overline{AB} = \text{Пр}_l\overline{AB}\cdot\overline{e}_l = \overline{A_1B_1}. \tag{27.3}$$

27.5. Свойства проекции вектора на ось

1. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна модулю вектора $\overline{a}$, умноженному на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{Пр}_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi. \tag{27.4}$$

Доказательство.

Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l не изменится при любом его параллельном переносе, поэтому рассмотрим случай, когда вектор $\overline{a}$ отложен от точки O (рис. 145).

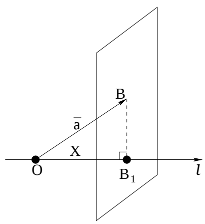


Рис. 145. *Проекция вектора на ось*

В соответствии с формулой (27.2) $\text{Пр}_l\overline{a} = x-0 = x$. Из прямоугольного $\triangle OBB_1 : \cos\varphi = \dfrac{x}{|\overline{a}|}$, откуда $x = |\overline{a}|\cos\varphi$, т.е. $\text{Пр}_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$.

2. Проекция суммы равна сумме проекций:

$$\text{Пр}_l(\overline{a}+\overline{b}) = \text{Пр}_l\overline{a} + \text{Пр}_l\overline{b}. \tag{27.5}$$

Доказательство.

Пусть $\overline{AC} = \overline{AB}+\overline{BC}$ (рис. 146). Тогда $\text{Пр}_l\overline{AB} = x_2-x_1$, $\text{Пр}_l\overline{BC} = x_3 - x_2$, $\text{Пр}_l\overline{AC} = x_3 - x_1$. Запишем последнюю проекцию в виде: $\text{Пр}_l\overline{AC} = x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = \text{Пр}_l\overline{AB} + \text{Пр}_l\overline{BC}$.

Теорема верна для любого числа слагаемых.

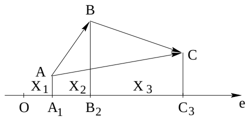


Рис. 146. *Проекция суммы равна сумме проекций*

3. Если вектор умножить на число, то проекция умножается на то же число, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак проекции:

$$\text{Пр}_l(\lambda\overline{a}) = \lambda\text{Пр}_l\overline{a}. \tag{27.6}$$

Доказательство.

Заметим, что если $\lambda > 0$ и вектор $\overline{a}$ составляет с осью l угол φ, то вектор $\lambda\overline{a}$ также составляет с осью l угол φ. Если же $\lambda < 0$, то вектор $\lambda\overline{a}$ составит с осью l угол $\pi - \varphi$.

Для первого случая ($\lambda > 0$) получаем: $\text{Пр}_l(\lambda\overline{a}) = |\lambda\overline{a}|\cos\varphi =$
$= |\lambda||\overline{a}|\cos\varphi = \lambda\text{Пр}_l\overline{a}$.

Для второго случая ($\lambda < 0$) получаем:

$\text{Пр}_l(\lambda\overline{a}) = |\lambda\overline{a}|\cos(\pi-\varphi) = |\lambda||\overline{a}|\cos(\pi-\varphi) = -\lambda|\overline{a}|(-\cos\varphi) =$
$= \lambda|\overline{a}|\cos\varphi = \lambda\text{Пр}_l\overline{a}$.

4. Проекция разности равна разности проекций.

Действительно: $\text{Пр}_l(\overline{a}-\overline{b}) = \text{Пр}_l(\overline{a}+(-1)\overline{b}) = \text{Пр}_l\overline{a} + \text{Пр}_l(-1)\overline{b} =$
$= \text{Пр}_l\overline{a} + (-1)\text{Пр}_l\overline{b} = \text{Пр}_l\overline{a} - \text{Пр}_l\overline{b}$.

Практическое занятие 27. Контрольная работа по исследованию и решению систем линейных уравнений

Рассмотрим один из возможных вариантов контрольной работы

Пример 27.1. *Решить систему уравнений а) матричным способом и б) методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Пример 27.2. *Исследовать по методу Гаусса является ли система уравнений совместной и, если система совместна, то решить* *её:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

ПРИМЕР 27.3. *Исследовать по методу Гаусса является ли система уравнений совместной и, если система совместна, то решить её:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение примеров варианта контрольной работы

ПРИМЕР 27.1. *Решить систему уравнений а) матричным способом и б) методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов при неизвестных, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов.

а) Решение матричным методом $X = A^{-1}B$. Найдем матрицу A^{-1}, обратную матрице A.

Определитель системы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 14 - 3 \cdot 10 + 2 \cdot (-2) = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Алгебраические дополнения всех элементов:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

Отсюда $A^{-1} = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$

$= -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ 18+14+16 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

б) Решение методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 28 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 27 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 6 & 8 & 2 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & -12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

- вторая строка умножена на 2,

- из второй строки вычтем первую,
- первую строку умножим на 3, а последнюю на 2,
- из третьей строки вычтем первую и первую строку разделим на 3,
- сложим третью строку со второй.

Последней матрице соответствует ступенчатая система уравнений

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = 9, \\ & x_2 & -8x_3 & = 19, \\ & & -12x_3 & = 24, \end{array}\right. \quad \text{равносильная исходной}$$

Из этой системы последовательно находим:

$x_3 = -2$, $x_2 = 19 + 8x_3 = 19 - 16 = 3$, $x_1 = \dfrac{9 - 3x_2 - 2x_3}{2} = \dfrac{9 - 9 + 4}{2} = 2$.

Пример 27.2. *Исследовать по методу Гаусса, является ли система уравнений совместной и, если система совместна, то решить её.*

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & -3 & 8 & 13 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & x_5 & \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & x_5 & \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = 0.$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

- перестановка элементов строки;
- умножение первой строки последовательно на 2, 4, 1 и вычитания из 2, 3 и 4 строк полученных значений;
- умножение 3 строки на (-1);
- удаление нулевой строки;
- перестановка элементов строки;
- сложение второй строки с третьей.

Если в качестве базисных неизвестных выбрать x_2, x_3 и x_4, то x_1 и x_5 будут свободными неизвестными, следовательно:

$x_2 = 1 + 2x_1 - x_5$, $x_3 = 2 + x_2 - 2x_1 - 3x_5 = 3 - 4x_5$.

При $x_n = x_5 = 0$ получим базисное решение

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 27.3. *Исследовать по методу Гаусса, является ли система уравнений совместной и, если система совместна, то решить её.*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

- переставляем первую и вторую строки;
- умножая последовательно первую строку на 2, 3 и 4, вычитаем полученный результат из 2, 3 и 4 строк;
- удаляем нулевую строку;
- из последней строки вычтем вторую.

Так как последнее уравнение системы $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$ противоречиво, данная система уравнений является несовместной, т.е. она не имеет решения.

Самостоятельная работа

Пример 27.4. *Решить систему уравнений а) матричным способом и б) методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Пример 27.5. *Исследовать по методу Гаусса, является ли система уравнений совместной и, если система совместна, то решить её*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Пример 27.6. *Исследовать по методу Гаусса, является ли система уравнений совместной и, если система совместна, то решить её*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Лекция 28. Векторная алгебра (продолжение)

Разложение вектора на составляющие, координаты вектора. Деление отрезка в заданном отношении. Направляющие косинусы вектора. Условие коллинеарности векторов. Скалярное произведение векторов.

28.1. Разложение вектора на составляющие по осям координат

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве $Oxyz$ (рис. 147). На каждой из осей выберем единичный вектор с началом в точке O и концом в точке с координатой 1. Обозначим $\bar{i}$ – единичный вектор по оси Ox, $\bar{j}$ – по оси Oy, $\bar{k}$ – по оси Oz, так что $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$.

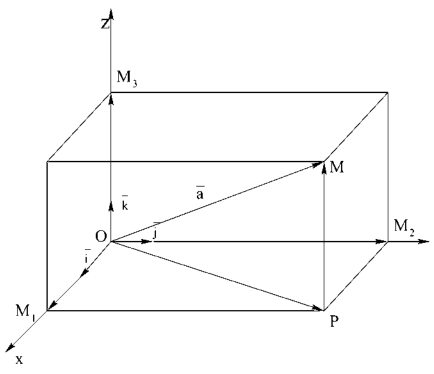


Рис. 147. *Разложение вектора на составляющие по осям координат*

Эти три единичных вектора называются ортами, они образуют декартов ортогональный базис. Рассмотрим вектор $\overline{a}$ в пространстве. Отложим его из начала координат O (рис. 147). Через его конец проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Получим прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является вектор $\overline{a}$.

Из рис. 147 ясно, что
$\overline{a} = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + \overline{OM_3} = (\overline{OM_1} + \overline{OM_2}) + \overline{OM_3}$.

Векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$ являются составляющими вектора $\overline{a}$ по осям координат. В соответствии с формулой (27.3) имеем: $\overline{OM_1} = \text{Пр}_{Ox}\overline{a}\cdot\overline{i}$, $\overline{OM_2} = \text{Пр}_{Oy}\overline{a}\cdot\overline{j}$, $\overline{OM_3} = \text{Пр}_{Oz}\overline{a}\cdot\overline{k}$. Обозначив $\text{Пр}_{Ox}\overline{a} = a_x$, $\text{Пр}_{Oy}\overline{a} = a_y$, $\text{Пр}_{Oz}\overline{a} = a_z$, получаем:

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}. \tag{28.1}$$

Формула (28.1) называется разложением вектора на составляющие по осям координат, a_x, a_y, a_z называются прямоугольными декартовыми координатами вектора $\overline{a}$. Вектор будем также записывать в виде: $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Определение 28.1. *Радиус-вектором $\overline{r_M}$ точки $M(a_1; a_2; a_3)$ называется вектор $\overline{OM}$ с началом в начале координат и концом в данной точке.*

В соответствии с формулой 28.1 координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки $\overline{r_M} = \overline{OM} = (a_1; a_2; a_3)$.

Рассмотрим теперь вектор $\overline{AB}$, начало которого имеет координаты $A(x_1; y_1; z_1)$, а конец – $B(x_2; y_2; z_2)$. Из определения проекции вектора на ось следует, что $\text{Пр}_{Ox}\overline{AB} = x_2 - x_1$, $\text{Пр}_{Oy}\overline{AB} = y_2 - y_1$, $\text{Пр}_{Oz}\overline{AB} = z_2 - z_1$. Поэтому координаты вектора $\overline{AB}$ равны: $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, а разложение на составляющие по осям координат принимает вид:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \overline{i} + (y_2 - y_1) \cdot \overline{j} + (z_2 - z_1) \cdot \overline{k}. \tag{28.2}$$

Заметим,что любой вектор $\overline{AB}$ выражается через радиус-векторы его начала и конца по формуле :

$$\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A}. \tag{28.3}$$

Действительно, на основании определения операции вычитания (рис. 141) следует: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$.

Если известны координаты вектора, то линейные операции над векторами можно заменить соответствующими арифметическими действиями над координатами:

$$\lambda\overline{a} = \lambda a_x \cdot \overline{i} + \lambda a_y \cdot \overline{j} + \lambda a_z \cdot \overline{k}. \tag{28.4}$$

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x)\overline{i} + (a_y \pm b_y)\overline{j} + (a_z \pm b_z)\overline{k}.$$

Если $\overline{a} = \overline{b}$, то $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$ и наоборот.

Вывод формул (28.4) вытекает из разложения (28.1) и свойств операций над векторами (коммутативность, ассоциативность и т.д.). Проведите доказательство самостоятельно.

Зная координаты вектора $\overline{a}$ можно вычислить модуль вектора. Из рис. 147 в соответствии с теоремой о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда, получаем: $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_1}|^2 + |\overline{OM_2}|^2 + |\overline{OM_3}|^2$, $|\overline{OM_1}|^2 = a_x^2$, $|\overline{OM_2}|^2 = a_y^2$, $|\overline{OM_3}|^2 = a_z^2$, поэтому: $|\overline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ или:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{28.5}$$

Пример 28.1. *Даны векторы $\overline{a} = (1; 2; 3)$, $\overline{b} = (2; -1; 0)$. Найти их модули и координаты вектора $\overline{a} - 2\overline{b}$.*

Решение: $|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, $|\overline{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$,
$\overline{a} - 2\overline{b} = (1 - 2 \cdot 2)\overline{i} + (2 - 2(-1))\overline{j} + (3 - 2 \cdot 0)\overline{k} = -3\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$.

Замечание. Если вектор $\overline{AB}$ определен координатами начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$, то его модуль в соответствии с формулами (28.2) и (28.5) равен:

$$|\overline{AB}| = |\overline{r_B} - \overline{r_A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{28.6}$$

Это выражение совпадает с формулой (2.5) для расстояния между двумя точками A и B.

28.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть отрезок M_1M_2 определен своими концами $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и задано положительное число λ. Поставим задачу найти такую точку M отрезка M_1M_2, чтобы $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ (рис. 148).

Обозначим x, y, z – искомые координаты точки M. Так как $\dfrac{M_1M}{MM_2} =$

$= \dfrac{|\overline{M_1M}|}{|\overline{MM_2}|}$, то $\dfrac{|\overline{M_1M}|}{|\overline{MM_2}|} = \lambda$ и, следовательно: $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$ или $(x-x_1)\overline{i} + (y-y_1)\overline{j} + (z-z_1)\overline{k} = \lambda((x_2-x)\overline{i} + (y_2-y)\overline{j} + (z_2-z)\overline{k})$.

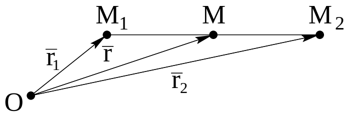


Рис. 148. *Деление отрезка в заданном отношении*

Из равенства векторов следует равенство их координат: $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, откуда находим x, y и z:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{28.7}$$

Соответствующие формулы для отрезка M_1M_2, расположенного на плоскости Oxy были получены в п.2.6 лекции 2.

Пример 28.2. *Даны точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;1;1)$. Найти координаты точки M — середины отрезка M_1M_2.*

Р е ш е н и е: Для середины отрезка M_1M_2: $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = 1$, поэтому:

$x = \dfrac{1+2}{2} = 1,5$; $y = \dfrac{2+1}{2} = 1,5$; $z = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

Ответ: $M(1,5; 1,5; 2)$.

28.3. Направляющие косинусы вектора

Как говорилось в начале лекции 27, вектор характеризуется длиной и направлением. Длина вектора (его модуль) вычисляется по формуле (28.5). Направление ненулевого вектора в пространстве можно задать углами α, β и γ, которые составляет вектор с осями координат (рис. 149). Косинусы этих углов $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора.

Пусть дан вектор $\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$. Тогда: $a_x = \text{Пр}_{Ox}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha$; $a_y = \text{Пр}_{Oy}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\beta$; $a_z = \text{Пр}_{Oz}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\gamma$, откуда:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \tag{28.8}$$

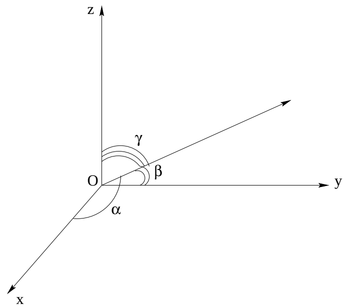


Рис. 149. *Направляюшие косинусы вектора*

Подставляя в формулы (28.8) выражение (28.5) для $|\overline{a}|$, получим:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \tag{28.9}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Возводя каждое из выражений (28.9) в квадрат и складывая, получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{28.10}$$

Таким образом, среди трёх углов α, β, γ независимыми являются только два, а третий определяется из соотношения (28.10).

Замечание. Легко видеть, что координаты любого единичного вектора $\overline{e}_a$ равны его направляющим косинусам, и значит, его разложение по осям имеет вид:

$$\overline{e}_a = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k}. \tag{28.11}$$

Такие же направляющие косинусы имеет вектор $\overline{a}$, связанный с единичным вектором соотношением (27.1).

Вектор в трёхмерном пространстве задаётся тремя скалярными величинами. Это могут быть три координаты или два угла и модуль (длина) вектора и т.д.. Аналогично этому вектор в двумерном пространстве определяется двумя скалярными величинами: двумя координатами или углом и модулем и т.д.

Пример 28.3. *Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(1;2;-2)$, $B(2;-1;0)$.*

Р е ш е н и е: Найдем координаты единичного вектора, сонаправленного с $\overline{AB}$. $\overline{AB} = (2-1)\overline{i} + (-1-2)\overline{j} + (0-(-2))\overline{k} = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$. $|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$; $\overline{e}_{AB} = \dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\overline{i} - \dfrac{3}{\sqrt{14}}\overline{j} + \dfrac{2}{\sqrt{14}}\overline{k}$.

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta = -\dfrac{3}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

28.4. Условия коллинеарности векторов

Пусть ненулевые векторы $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ и $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ коллинеарны. В соответствии с теоремой 27.1 $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ или $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, что означает для координат выполнение следующих соотношений: $b_x = \lambda a_x$, $b_y = \lambda a_y$, $b_z = \lambda a_z$ или $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$.

Выразив λ из этих равенств и приравняв, получим:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{28.12}$$

Таким образом, для того, чтобы два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

Пример 28.4. *Установить, коллинеарны ли векторы $\overline{a} = (1; 3; 5)$ и $\overline{b} = (2; 6; 0)$.*

Р е ш е н и е: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{5}{0}$. Последнее неравенство следует понимать так, что равенство $5 = \lambda \cdot 0$ не выполняется при $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

Пример 28.5. *Установить, коллинеарны ли векторы $\overline{a} = (1; 3; 0)$ и $\overline{b} = (2; 6; 0)$.*

Р е ш е н и е: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{0}{0}$. Последнее неравенство верно, т.к. $0 = \lambda\cdot 0$ при любом λ.

Ответ: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

28.5. Скалярное произведение

Выше было определено произведение вектора на число. Далее мы определим несколько операций умножения вектора на вектор.

Определение 28.2. *Скалярным произведением ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:*

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (28.13)$$

Если один из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ нулевой, то скалярное произведение $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по определению равно нулю.

Замечание 28.1. *Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается либо центральной точкой между векторами: $\overline{a}\cdot\overline{b}$, либо с помощью круглых скобок: $(\overline{a},\overline{b})$.*

В соответствии с формулой (27.4) $\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}=|\overline{b}|\cos\varphi$, поэтому подставив это выражение в формулу (28.13), получим: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}$, откуда:

$$\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}. \qquad (28.14)$$

28.6. Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ (коммутативный закон)

Действительно: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=|\overline{b}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos\varphi=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

2. $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b})$ (ассоциативный закон).

Действительно, например, при $\lambda>0$: $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=\lambda|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=$ $=|\lambda\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

3. $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ (дистрибутивный закон).

Действительно, используя формулу (28.14) и свойства проекций, получаем: $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=|\overline{a}|\cdot\text{Пр}_{\overline{a}}(\overline{b}+\overline{c})=|\overline{a}|(\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}+\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{c})=|\overline{a}|\cdot\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}+$ $+|\overline{a}|\cdot\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.

4. Для того чтобы два ненулевых вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю:

$$\overline{a}\perp\overline{b},\quad |\overline{a}|\neq|0,\quad |\overline{b}|\neq 0\quad\Longleftrightarrow\quad \overline{a}\cdot\overline{b}=0. \qquad (28.15)$$

Действительно, если $\overline{a}\perp\overline{b}$, то угол $\varphi=\widehat{(\overline{a};\overline{b})}=90^\circ\Longrightarrow\cos\varphi=0$ и $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=0$. Наоборот, если $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, то $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=0\Longrightarrow$ один из сомножителей равен нулю. Так как $|\overline{a}|\neq|0$ и $|\overline{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0\Longrightarrow\varphi=90^\circ$ и $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Заметим, что из формулы (28.13) следует, что: $\overline{a}\cdot\overline{b}>0 \Longleftrightarrow \widehat{(\overline{a};\overline{b})}$ – острый, $\overline{a}\cdot\overline{b}<0 \Longleftrightarrow \widehat{(\overline{a};\overline{b})}$ – тупой.

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2. \tag{28.16}$$

Действительно: $\overline{a}^2=\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\overline{a}|^2$. Из формулы (28.16) следует, что

$$\sqrt{\overline{a}^2}=|\overline{a}|. \tag{28.17}$$

Это справедливо и для действительных чисел: $\sqrt{x^2}=|x|$.

Пример 28.6. *Найти* $(\overline{a}-2\overline{b})^2$, *если* $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, $\widehat{(\overline{a};\overline{b})}=60^\circ$.

Р е ш е н и е: $(\overline{a}-2\overline{b})^2=\overline{a}^2-4\overline{a}\cdot\overline{b}+4\overline{b}^2=|\overline{a}|^2-4|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 60^\circ+4|\overline{b}|^2=$ $=1-4\cdot 1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}+4\cdot 4=13.$

Ответ: $(\overline{a}-2\overline{b})^2=13$.

Для получения выражения для скалярного произведения двух векторов через их координаты, заметим, что: $\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1$, $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=$ $=\overline{j}\cdot\overline{k}=0$.

Если $\overline{a}=a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k}$, $\overline{b}=b_x\cdot\overline{i}+b_y\cdot\overline{j}+b_z\cdot\overline{k}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=$ $=(a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k})(b_x\cdot\overline{i}+b_y\cdot\overline{j}+b_z\cdot\overline{k})=a_x\cdot b_x\cdot\overline{i}^2+a_y\cdot b_y\cdot\overline{j}^2+$ $+a_z\cdot b_z\cdot\overline{k}^2+a_x\cdot b_y\cdot\overline{i}\cdot\overline{j}+\ldots+a_y\cdot b_z\cdot\overline{j}\cdot\overline{k}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$

Окончательно имеем:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \tag{28.18}$$

Пример 28.7. *Установить – острый или тупой угол между векторами* $\overline{a}=(1;0;2)$ *и* $\overline{b}=(-2;1;3)$.

Р е ш е н и е: $\overline{a}\cdot\overline{b}=1\cdot(-2)+0\cdot 1+2\cdot 3=4>0 \Longrightarrow$ угол $\widehat{(\overline{a};\overline{b})}$ острый.

Учитывая формулу (28.18) и свойство 4 скалярного произведения, получаем, что для перпендикулярности двух векторов необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0. \tag{28.19}$$

Пример 28.8. *При каком значении* m *вектор* $\overline{a}=(1;-3;m)$ *будет перпендикулярен вектору* $\overline{b}=(2;1;4)$?

Р е ш е н и е: $\overline{a} \perp \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\overline{a} \perp \overline{b}$ при $m = \dfrac{1}{4}$.

Для получения выражения для косинуса угла между двумя ненулевыми векторами подставим выражения (28.18) и (28.5) в формулу (28.13). Получим:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{28.20}$$

Заметим, что знак $\cos\varphi$ зависит только от знака числителя дроби (28.20), т.е., как уже отмечалось, перпендикулярность векторов, острый или тупой угол между векторами – все это определяется знаком скалярного произведения.

Пример 28.9. *Найти угол между векторами* $\overline{a} = (1; 2; 3)$ *и* $\overline{b} = (-2; -1; -1)$.

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой (28.20):

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{7}{2\sqrt{21}}.$$

Принципиально задача решена, т.к. угол между векторами однозначно определяется значением $\cos\varphi (0 \le \varphi \le \pi)$. В данном случае угол тупой, т.к. $\cos\varphi < 0$.

При необходимости найти приближённое значение φ с помощью калькулятора, производим приближённые вычисления:

$\cos\varphi = -\dfrac{7}{2\sqrt{21}} \approx -0,764 \Longrightarrow \varphi \approx 2,44$ радиан.

Ответ: $\cos\varphi = -\dfrac{7}{2\sqrt{21}}, \quad \varphi \approx 2,44$ радиан.

Практическое занятие 28. Векторная алгебра. Основные понятия

Пример 28.1. *В параллелограмме $ABCD$ точка O – пересечение диагоналей $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$. (рис. 150) Выразите через эти векторы следующие: $\overline{CD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CO}$, $\overline{BD}$.*

Решение: $\overline{CD} = -\overline{a}$, т.к. $|\overline{CD}| = |\overline{AB}| = |\overline{a}|$ и $\overline{CD} \uparrow\downarrow \overline{a}$; $\overline{CB} = -\overline{b}$ аналогично; $\overline{CO} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}(-\overline{AC}) = -\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$, т.к. $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, а точка O – середина диагоналей и $\overline{CA} = -\overline{AC}$; $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CD} = \overline{b} - \overline{a}$.

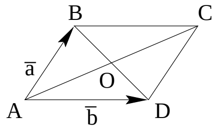


Рис. 150. *Пример 28.1*

Пример 28.2. *В $\triangle\ ABC$ точка O – пересечение медиан, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$ (рис. 151). Выразите через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ следующие векторы: $\overline{BC}$, $\overline{AN}$, $\overline{KO}$.*

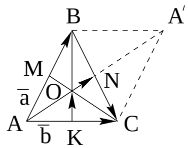


Рис. 151. *Пример 28.2*

Решение: $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = -\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} - \overline{a}$. $\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{a} + \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}) = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} - \frac{1}{2}\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$. Этот же результат можно получить достроив $\triangle\ ABC$ до параллелограмма $ABA'C$, в котором $\overline{AN} = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$. Для нахождения $\overline{KO}$ напомним, что медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $\overline{KO} = \frac{1}{3}|\overline{KB}|$. $\overline{KO} = \frac{1}{3}\overline{KB} = \frac{1}{3}(\overline{KA} + \overline{AB}) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}\overline{AC} + \overline{a}) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}\overline{b} + \overline{a}) = \frac{1}{3}(\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}) = \frac{1}{3}\overline{a} - \frac{1}{6}\overline{b}$.

Самостоятельно найдите векторы $\overline{CN}, \overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{OM}$.

Ответ: $\overline{CN} = \dfrac{\overline{a} - \overline{b}}{2}$, $\overline{BO} = \dfrac{\overline{b} - 2\overline{a}}{3}$, $\overline{CO} = \dfrac{\overline{a} - 2\overline{b}}{3}$, $\overline{OM} = \dfrac{\overline{a} - 2\overline{b}}{6}$.

Пример 28.3. *В правильном шестиугольнике точка O – пересечение диагоналей, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AF} = \overline{b}$. (рис. 152) Самостоятельно выразите через эти векторы следующие: $\overline{DE}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CF}$. Учтите при этом, что все треугольники на рис. 152 – правильные.*

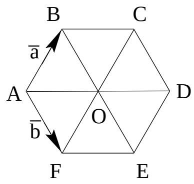


Рис. 152. *Пример 28.3*

Ответ: $\overline{DE} = -\overline{a}$, $\overline{OB} = -\overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{a}$, $\overline{AD} = 2(\overline{a} + \overline{b})$, $\overline{BC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{CF} = -2\overline{a}$.

Пример 28.4. *В $\triangle ABC$ $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$, точки M и N делят сторону AB на три равные части. Найдите вектор $\overline{CM}$ (рис. 153).*

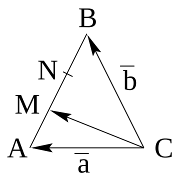


Рис. 153. *Пример 28.4*

Решение: $\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$, $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a})$, $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM} =$
$= \overline{a} + \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}) = \frac{2\overline{a} + \overline{b}}{3}$.

Пример 28.5. *В $\triangle ABC$ AM – биссектриса (рис. 154), $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. Найдите вектор $\overline{AM}$.*

Р е ш е н и е: Вспомним, что биссектриса угла в треугольнике делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон:

$$\frac{|\overline{BM}|}{|\overline{MC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{c}|} \Rightarrow \frac{|\overline{BM}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{b}| + |\overline{c}|},$$

так как $|\overline{BC}| = |\overline{BM}| + |\overline{MC}|$.

С учётом того, что $\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b}$, получаем:

$$\overline{BM} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{b}| + |\overline{c}|}(\overline{c} - \overline{b}) \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{b} + \frac{|\overline{b}|}{|\overline{b}| + |\overline{c}|}(\overline{c} - \overline{b}) = \frac{|\overline{b}| \cdot \overline{c} + |\overline{c}| \cdot \overline{b}}{|\overline{b}| + |\overline{c}|}.$$

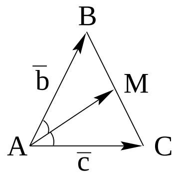


Рис. 154. *Пример 28.5*

Пример 28.6. *Даны радиус-векторы вершин $\triangle\ ABC$: $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$, $\overline{r_3}$. Найти радиус-вектор $\overline{r}$ точки M – пересечения медиан (рис. 155, где точка O – начало координат).*

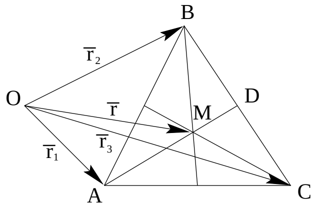


Рис. 155. *Пример 28.6*

Р е ш е н и е: $\overline{BC} = \overline{r}_3 - \overline{r}_2$, $\overline{BD} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \dfrac{1}{2}(\overline{r}_3 - \overline{r}_2)$ как середина BC, $\overline{AB} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$, $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \dfrac{\overline{r}_3 - \overline{r}_2}{2} + \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \dfrac{1}{2}(\overline{r}_3 + \overline{r}_2 - 2\overline{r}_1)$, $\overline{AM} = \dfrac{2}{3}\overline{AD} = \dfrac{1}{3}(\overline{r}_3 + \overline{r}_2 - 2\overline{r}_1) \Rightarrow \overline{r} = \overline{OM} = \overline{r}_1 + \overline{AM} = \overline{r}_1 + \dfrac{1}{3}(\overline{r}_3 + \overline{r}_2 - {}$ $- 2\overline{r}_1) = \dfrac{1}{3}(\overline{r}_1 + \overline{r}_2 + \overline{r}_3)$.

Пример 28.7. *Найдите длину и направляющие косинусы вектора* $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k}$.

Р е ш е н и е: В соответствии с формулами (28.5), (28.19) получаем:

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}; \quad \cos\beta = \frac{4\sqrt{2}}{10}; \quad \cos\gamma = \frac{5\sqrt{2}}{10}.$$

Пример 28.8. *Докажите, что $ABCD$ – трапеция, если вершины имеют координаты:* $A(3; 2; -2)$, $B(4; 4; 1)$, $C(-1; 2; 0)$, $D(-3; -2; -6)$.

Р е ш е н и е: Сделайте эту задачу самостоятельно, проверив коллинеарность одной из пар векторов на противоположных сторонах. Используйте условие коллинеарности векторов (28.12).

Пример 28.9. *Найдите единичный вектор, противонаправленный вектору* $\overline{a} = \overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$.

Р е ш е н и е: $|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$. В соответствии с формулой (28.9) единичный вектор того же направления (сонаправленный) с вектором $\overline{a}$ имеет координаты:

$$\overline{e}_a = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{11}}\overline{i} + \frac{3}{\sqrt{11}}\overline{j} - \frac{1}{\sqrt{11}}\overline{k}.$$

Искомый единичный вектор противонаправленный вектору $\overline{a}$, равен $-\overline{e}_a$:

$$-\overline{e}_a = -\frac{1}{\sqrt{11}}\overline{i} - \frac{3}{\sqrt{11}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\overline{k}.$$

Пример 28.10. *Найдите скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, если* $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$.

Р е ш е н и е: По формуле (28.18) получаем:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 3 = -2.$$

Т.к. $\overline{a}\cdot\overline{b} < 0$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ тупой.

Пример 28.11. *Найдите проекцию разности $\overline{a} - \overline{b}$ на ось l, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, углы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с осью l равны $\pi/3$ и $\pi/4$ соответственно.*

Р е ш е н и е: $\text{Пр}_l\overline{a} = |\overline{a}|\cdot\cos(\pi/3) = 2\cdot(1/2) = 1$, $\text{Пр}_l\overline{b} = |\overline{b}|\cdot$ $\cdot\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\text{Пр}_l(\overline{a} - \overline{b}) = \text{Пр}_l\overline{a} - \text{Пр}_l\overline{b} = 1 - \sqrt{2}/2$.

Пример 28.12. *При каком значении параметра m векторы $\overline{a}(2;3;5)$ и $\overline{b}(-2;1;m)$ перпендикулярны?*

Р е ш е н и е: Условие перпендикулярности двух векторов даётся формулой (28.19):

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Rightarrow 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 5\cdot m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{5}.$$

Пример 28.13. *Найдите $(3\overline{a} - 2\overline{b})\cdot(2\overline{a} + 3\overline{b})$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $\overline{a}\perp\overline{b}$.*

Р е ш е н и е: $\overline{a}\perp\overline{b} \Rightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = 1$, $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2 = 4$, поэтому:

$$(3\overline{a} - 2\overline{b})(2\overline{a} + 3\overline{b}) = 6\overline{a}^2 - 6\overline{b}^2 + 9\overline{a}\overline{b} - 4\overline{a}\overline{b} = 6\cdot 1 - 6\cdot 4 = -18.$$

Пример 28.14. *Найдите угол между векторами $\overline{a} = (-1;0;3)$ и $\overline{b} = (2;1;0)$.*

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой (28.20):

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{-1\cdot 2 + 0 + 0}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}\sqrt{2^2 + 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{5} \quad \text{(угол тупой)}.$$

Пример 28.15. *Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$ и $(2\overline{a} - \overline{b}) \perp (\overline{a} + 2\overline{b})$.*

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой (28.15) имеем:

$$0 = (2\overline{a} - \overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b}) = 2\overline{a}^2 - 2\overline{b}^2 + 3\overline{a}\overline{b} = 2|\overline{a}|^2 - 2|\overline{b}|^2 + 3|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{5}{9} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{5}{9}.$$

Пример 28.16. *Найдите проекцию* $Пр_{2\overline{a}+\overline{b}}\overline{a}$, *если* $\overline{a} = (1;2;3)$, $\overline{b} = (-2;1;0)$.

Р е ш е н и е: $2\overline{a} + \overline{b} = (2 \cdot 1 + 2)\overline{i} + (2 \cdot 2 + 1)\overline{j} + (2 \cdot 3 + 0)\overline{k} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 6\overline{k}$, $|2\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$. В соответствии с формулой (28.14), получаем:

$$\text{Пр}_{2\overline{a}+\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}(2\overline{a} + \overline{b})}{|2\overline{a} + \overline{b}|} = \frac{1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{\sqrt{61}} = \frac{32}{\sqrt{61}}.$$

Пример 28.17. *Найдите внутренний угол* $A \ \triangle\, ABC$, *если* $A(1;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;1)$.

Р е ш е н и е: Внутренний угол $A \ \ \triangle\ ABC$ равен углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем их координаты, вычитая из координат конца координаты начала вектора: $\overline{AB}(0;1;2)$, $\overline{AC}(-2;1;0)$.

$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle A = \arccos\frac{1}{5}.$$

Пример 28.18. *Векторы* $\overline{p}$ *и* $\overline{q}$ *образуют угол* $45°$, $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, *найдите длину вектора* $2\overline{p} - \overline{q}$.

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой (28.17):

$$|2\overline{p} - \overline{q}| = \sqrt{(2\overline{p} - \overline{q})^2} = \sqrt{4\overline{p} - 4\overline{pq} + \overline{q}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\overline{p}|^2 - 4|\overline{p}| \cdot |\overline{q}| \cos\widehat{\overline{p}\,\overline{q}} + |\overline{q}|^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9} = \sqrt{25 - 12\sqrt{2}}.$$

Самостоятельная работа

Пример 28.19. *В $\triangle ABC$ точка M делит сторону BC в отношении 1:5, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. Найдите вектор $\overline{AM}$.*

Пример 28.20. *Даны радиус-векторы вершин $\triangle ABC$: $\overline{r}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{r}_2 = 3\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{r}_3 = \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}$ (рис. 28.6). Докажите, что $\triangle ABC$ – правильный.*

Пример 28.21. *Даны координаты точки $A(1; -5; 3)$. Найдите координаты точки B, если вектор $\overline{AB} = \overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$.*

Пример 28.22. *Найти проекции и составляющие по осям координат вектора $2\overline{a} - 3\overline{b}$, если $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$.*

Пример 28.23. *Найдите направляющие косинусы и координаты единичных векторов, параллельных вектору $\overline{AB}$, если $A(2; -3; 1)$, $B(1; -1; -1)$.*

Пример 28.24. *Докажите, что если O – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, то $\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO} = \overline{0}$.*

Пример 28.25. *Найдите проекцию вектора $2\overline{a} - 3\overline{b}$, на ось l, если a и b – единичные векторы, образующие с осью l углы $2\pi/3$ и $3\pi/4$ соответственно.*

Пример 28.26. *Найдите проекцию $Пр_{\overline{b}}(3\overline{a} - 2\overline{b})$, если $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{j} - \overline{k}$. Используйте свойства проекций и формулу (28.14).*

Пример 28.27. *Определите – острый или тупой угол составляют векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если $A(1; 2; 1)$, $B(-2; 0; 2)$, $C(-3; 1; 2)$, $D(2; 5; 0)$.*

Пример 28.28. *Найдите $Пр_{\overline{a}+\overline{b}}(2\overline{a} - 3\overline{b})$, если $\overline{a} = (1; -2; -3)$, $\overline{b} = (-3; 2; 1)$.*

Пример 28.29. *При каком значении параметра s вектор $(2\overline{a} - \overline{b}) \perp (\overline{a} + \overline{b})$, если $\overline{a} = (0{,}5; 2; 5)$, $\overline{b} = (s; 2; -1)$.*

Пример 28.30. *Найдите угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, для данных в примере 28.21 точек A, B, C, D.*

Пример 28.31. *Найдите внутренний угол B $\triangle ABC$ для данных в примере 28.27 точек A, B, C.*

Лекция 29. Векторное и смешанное произведения векторов

Векторное, смешанное произведение векторов, двойное векторное произведение

29.1. Векторное произведение

Перейдем теперь к определению второго вида произведения векторов.

Введем вначале понятие правой и левой тройки векторов.

Определение 29.1. *Векторы, параллельные одной плоскости, называются компланарными. В противном случае векторы называются некомпланарными.*

Замечание 29.1. *Очевидно, что два вектора всегда компланарны.*

Определение 29.2. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется правой, если при совмещении начал векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ для наблюдателя, находящегося на конце вектора $\overline{c}$, направление вектора $\overline{b}$ может быть получено из направления вектора $\overline{a}$ поворотом на кратчайший угол против часовой стрелки.*

В противном случае (поворот вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ происходит по часовой стрелке) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют левую тройку.

Определение связано с правой рукой человека, откуда и берётся название.

Определение 29.3. *Тройка некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, взятых в указанном порядке называется правой, если эти векторы, отложенные от одной точки, располагаются так, как расположены соответственно указательный, средний и большой пальцы правой руки.*

Определение 29.4. *Векторным произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на ненулевой вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, такой, что:*

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен обоим перемножаемым векторам: $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

2) модуль вектора $\overline{c}$ определяется формулой:

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\widehat{(\overline{a}; \overline{b})}; \tag{29.1}$$

3) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку векторов.

Если один из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ нулевой, то их векторное произведение по определению равно нулевому вектору.

Векторное произведение будем обозначать $\overline{a} \times \overline{b}$.

Замечание 29.2. *Иногда векторное произведение обозначают с помощью квадратных скобок:* $[\overline{a}, \overline{b}]$.

Если на рис. 156 считать, что вектор $\overline{a}$ направлен направо, а вектор $\overline{b}$ – вверх в плоскости страницы, то вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярен плоскости листа и направлен к читателю.

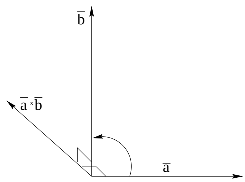


Рис. 156. *Векторное произведение*

29.2. Свойства векторного произведения

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (антикоммутативность).

Действительно, из определения следует, что векторы $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b} \times \overline{a}$ имеют одинаковую длину: $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \widehat{(\overline{a}; \overline{b})} = |\overline{b}| \cdot |\overline{a}| \cdot \sin \widehat{(\overline{b}; \overline{a})}$ и противоположные направления.

2. $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b}$ (ассоциативность).

Докажем это свойство для $\lambda > 0$: вектор $\lambda(\overline{a} \times \overline{b})$ имеет то же направление, что и вектор $\overline{a} \times \overline{b}$. Вектор $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b}$ при $\lambda > 0$ имеет то же направление. Длины этих векторов также совпадают: $|\lambda(\overline{a} \times \overline{b})| = |\lambda| \cdot |\overline{a} \times \overline{b}| = \lambda \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \widehat{(\overline{a}; \overline{b})}$, $|(\lambda\overline{a}) \times \overline{b}| = |\lambda\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \widehat{(\overline{a}; \overline{b})} = \lambda|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \widehat{(\overline{a}; \overline{b})}$.

Аналогично проводится доказательство для случая $\lambda < 0$.

3. $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$ (дистрибутивность).

Это свойство оставим без доказательства.

4. Условие коллинеарности векторов.

Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулевому вектору:

$$\overline{a} \parallel \overline{b}, \quad |\overline{a}| \neq |0, \quad |\overline{b}| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}. \tag{29.2}$$

Действительно, если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\varphi = \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 0^\circ \Longrightarrow \sin\varphi = 0$ и $\overline{a}\times\overline{b} = 0$, $|\overline{a}\times\overline{b}| = 0$. Наоборот, если $\overline{a}\times\overline{b} = \overline{0}$, то $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 0 \Longrightarrow$ один из сомножителей равен нулю. Поскольку $|\overline{a}| \neq |0$ и $|\overline{b}| \neq 0$, то $\sin\widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 0$, и либо $\widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 0$, либо $\widehat{(\overline{a};\overline{b})} = \pi$ и значит $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

5. Векторный квадрат равен нулевому вектору: $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$.

Это свойство является следствием свойства 4.

6. Геометрический смысл векторного произведения:

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах (рис. 157).

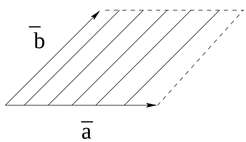


Рис. 157. *Геометрический смысл векторного произведения*

Действительно, $|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\widehat{(\overline{a};\overline{b})}$, что совпадает с формулой площади параллелограмма, известной из курса средней школы.

Пример 29.1. *Упростить выражение:* $(2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})\times\overline{j}-\overline{i}\times(\overline{j}-2\overline{k})$.

Р е ш е н и е: Пользуясь свойствами векторного произведения, получим: $(2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})\times\overline{j}-\overline{i}\times(\overline{j}-2\overline{k}) = 2\overline{i}\times\overline{j}+\overline{j}\times\overline{j}-\overline{k}\times\overline{j}-\overline{i}\times\overline{j}+2\overline{i}\times\overline{k} = \overline{i}\times\overline{j}+2\overline{i}\times\overline{k}+\overline{j}\times\overline{k}$.

Для нахождения $\overline{i}\times\overline{j}$ заметим, что $|\overline{i}\times\overline{j}| = |\overline{i}|\cdot|\overline{j}|\cdot\sin 90^\circ = 1$, а направление совпадает с вектором $\overline{k}$ (рис. 158), т.е. $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}$. Аналогично убедитесь, что $\overline{i}\times\overline{k} = -\overline{j}$, $\overline{j}\times\overline{k} = \overline{i}$, поэтому окончательно: $\overline{i}\times\overline{j}+2\overline{i}\times\overline{k}+\overline{j}\times\overline{k} = \overline{k}-2\overline{j}+\overline{i} = \overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$.

Ответ: $\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$.

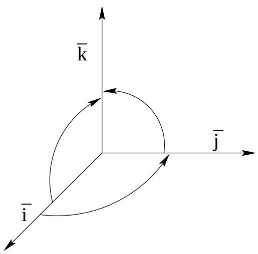


Рис. 158. *Векторное произведение координатных ортов*

Для получения выражения для векторного произведения двух векторов через их координаты найдем все парные векторные произведения единичных векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{j}$ так, как это было сделано в предыдущем примере:

$$\begin{aligned}
&\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=0\\
&\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k},\quad \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i},\quad \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j},\\
&\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k},\quad \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i},\quad \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}.
\end{aligned}$$

Аналогично тому, как это делалось при решении примера 29.1, найдем произведение:

$$\begin{aligned}
&\overline{a}\times\overline{b}=(a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k})\times(b_x\cdot\overline{i}+b_y\cdot\overline{j}+b_z\cdot\overline{k})=\\
&=a_xb_y\cdot\overline{i}\times\overline{j}+a_xb_z\cdot\overline{i}\times\overline{k}+a_yb_x\cdot\overline{j}\times\overline{i}+a_yb_z\cdot\overline{j}\times\overline{k}+\\
&+a_zb_x\cdot\overline{k}\times\overline{i}+a_zb_y\cdot\overline{k}\times\overline{j}=a_xb_y\cdot\overline{k}-a_xb_z\cdot\overline{j}-a_yb_x\cdot\overline{k}+\\
&+a_yb_z\cdot\overline{i}+a_zb_x\cdot\overline{j}-a_zb_y\cdot\overline{i}=(a_yb_z-a_zb_y)\overline{i}-\\
&-(a_xb_z-a_zb_x)\overline{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\overline{k}.
\end{aligned}$$

Разности, стоящие в скобках, равны определителям второго порядка:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\overline{k}. \qquad (29.3)$$

Полученное выражение есть разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{29.4}$$

Формулы для координат векторного произведения (29.3) удобнее запоминать в виде символического определителя (29.4), раскладывая его по первой строке.

Нужно отметить, что ранее определитель вводился как число, вычисляемое по некоторому правилу исходя из его элементов.

Здесь мы используем это правило для получения разложения (29.3) вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ на составляющие. Таким образом, (29.4) не является определителем, но такая запись облегчает запоминание формулы (29.3).

Пример 29.2. *Найти векторное произведение векторов* $\overline{a}=(1;2;3)$ *и* $\overline{b}=(2;0;-1)$.

Решение: $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\overline{j}+$

$+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\overline{k}=(-2-0)\overline{i}-(-1-6)\overline{j}+(0-4)\overline{k}=-2\overline{i}+7\overline{j}-4\overline{k}.$

Ответ: $\overline{a}\times\overline{b}=-2\overline{i}+7\overline{j}-4\overline{k}$.

29.3. Смешанное произведение

Определение 29.5. *Смешанным произведением трёх векторов* $\overline{a}$, $\overline{b}$ *и* $\overline{c}$ *называется число, равное* $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$, *т.е. скалярному произведению векторного произведения первых двух на третий вектор.*

Замечание 29.3. *Другие обозначения смешанного произведения имеют вид:* $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ *или* $(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})$.

Найдем выражение для смешанного произведения трёх векторов через их координаты, для чего запишем скалярное произведение вектора (29.3) на вектор $\overline{c}=c_x\cdot\overline{i}+c_y\cdot\overline{j}+c_z\cdot\overline{k}$:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты перемножаемых векторов.

Пользуясь свойствами определителя, докажем, что: $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$.

Действительно, аналогично выводу предыдущей формулы, получаем:

$$\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot \overline{k},$$

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot a_\times - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot a_y + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot a_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Мы получили тот же определитель, что и в формуле для $((\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c})$. Таким образом доказано, что знаки скалярного и векторного произведения «$\cdot$» и «$\times$» в смешанном произведении можно переставлять. Поэтому смешанное произведение и принято обозначать $(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c})$, как было указано выше:

$$(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{29.5}$$

ПРИМЕР 29.3. *Найти смешанное произведение* $(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c})$, *если* $\overline{a} = (1; 2; 3)$, $\overline{b} = (-2; 1; 0)$, $\overline{c} = (1; -1; 2)$.

Р е ш е н и е: Раскладывая определитель по последнему столбцу, получаем:

$$(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(2-1) + 2(1+4) = 13.$$

Ответ: 13.

29.4. Свойства смешанного произведения

1. $(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}) = (\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{b}) = (\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{a}) = -(\overline{b}\ \overline{a}\ \overline{c}) = -(\overline{a}\ \overline{c}\ \overline{b}) = -(\overline{c}\ \overline{b}\ \overline{a})$.

Доказательство этих соотношений проводится аналогично выводу формулы (29.4). Чтобы их запомнить, заметим, что при «циклической перестановке» векторов (вектор передвигается на следующее место, а последний – на первое) знак не меняется, а при перестановке двух соседних векторов знак меняется.

2. Геометрический смысл смешанного произведения.

Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах (рис. 159).

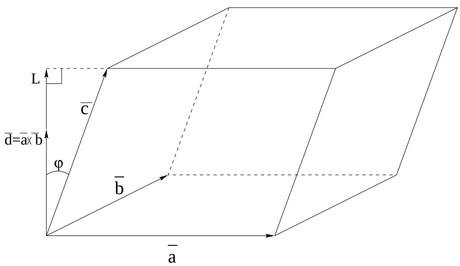


Рис. 159. *Геометрический смысл смешанного произведения*

Для доказательства этого построим вектор $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$, длина которого в соответствии с геометрическим смыслом векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. площади основания параллелепипеда: $|\overline{a} \times \overline{b}| = S$. Из определения смешанного произведения $(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = |\overline{a} \times \overline{b}| \cdot |\overline{c}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{d}$ и $\overline{c}$. На рис. 159 изображен случай $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Для этого случая получим, что высота параллелепипеда $h = |\overline{c}| \cos\varphi$. Окончательно: $(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}) = |\overline{a} \times \overline{b}| \cdot |\overline{c}| \cdot \cos\varphi = S \cdot h = V$ – объёму параллелепипеда, изображённого на рис. 159. В случае $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$ получим $h = -|\overline{c}| \cdot \cos\varphi$ (т.к. $\cos\varphi < 0$) и $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -V$. Окончательно получаем: $V = |(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c})|$.

Пример 29.4. *Вычислить объём пирамиды с вершинами $A(2; -1; -1)$, $B(5; -1; 2)$, $C(3; 0; 3)$ и $D(6; 0; -1)$.*

Р е ш е н и е: Рассмотрим векторы $\overline{DA} = (-4; -1; 0)$, $\overline{DB} = (-1; -1; 3)$, $\overline{DC} = (-3; 0; -2)$. Из школьного курса геометрии известно, что объём пирамиды, построенной на ребрах DA, DB, DC, в шесть раз меньше объёма параллелепипеда, построенного на этих ребрах:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|(\overline{DA} \quad \overline{DB} \quad \overline{DC})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |-4 \cdot 2 + 1(2+9)| = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{2}$.

3. Условие компланарности векторов.

Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство.

Если три вектора компланарны, можно считать, что они лежат в одной плоскости и тогда, конечно, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю, т.е. смешанное произведение равно нулю.

Если наоборот, смешанное произведение равно нулю, то объём параллелепипеда равен нулю и, значит, все векторы параллельны одной плоскости (компланарны) или хотя бы один из них равен нулю, что тоже означает компланарность всех трёх векторов.

Другими словами, необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \tag{29.6}$$

Пример 29.5. *Установить, будут ли компланарны векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$, если даны координаты точек:* $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$.

Решение: Найдем координаты векторов, вычитая из координат конца координаты начала: $\overline{AB} = (-1;-1;6)$, $\overline{BC} = (-1;1;-4)$, $\overline{CD} = (3;-1;2)$. Вычислим значение определителя и проверим выполнение условия (29.6)

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-4)+1(-2+12)+6(1-3) = 2+10-12 = 0.$$

Ответ: векторы компланарны.

29.5. Двойное векторное произведение

Наряду со смешанным произведением, для трёх векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ можно найти так называемое двойное векторное произведение: $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$, которое будет вектором. Легко видеть, что: $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}$, $\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c} = \overline{c}\times\overline{a}\times\overline{b} = \overline{b}\times\overline{c}\times\overline{a}$, $\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c} = -\overline{b}\times\overline{a}\times\overline{c} = -\overline{c}\times\overline{b}\times\overline{a} = -\overline{a}\times\overline{c}\times\overline{b} =$ (докажите это самостоятельно)

Вычислим, например, $\overline{i}\times\overline{j}\times\overline{k}$. Учитывая, что $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}$ (см. пример 29.1), получаем: $\overline{i}\times\overline{j}\times\overline{k} = 0$. Аналогичным образом можно определить тройное векторное произведение: $\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}\times\overline{d}$, которое будет вектором и т.д.

В дальнейших лекциях рассматриваются приложения векторной алгебры к аналитической геометрии в пространстве.

Практическое занятие 29. Векторное и смешанное произведение векторов

Пример 29.1. *Найдите векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ для векторов $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$.*

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой (29.4):

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(-9-1) - \overline{j}(6+1) + \overline{k}(2-3) = -10\overline{i} - 7\overline{j} - \overline{k}.$$

Пример 29.2. *Упростите выражение (вычислите):*

$$\overline{j}\times\overline{i} + 3\overline{j}\times\overline{k} - 5\overline{k}\times\overline{i} + (3\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k})\times(\overline{i} - 6\overline{j} + 5\overline{k}).$$

Р е ш е н и е: На основании определения и свойств векторного произведения (п. п. 29.1, 29.2) получаем: $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}$, $\overline{i}\times\overline{k} = -\overline{j}$, $\overline{j}\times\overline{k} = \overline{i}$, поэтому искомое выражение равно:

$$-\overline{i}\times\overline{j} + 3\overline{j}\times\overline{k} + 5\overline{i}\times\overline{k} + 3\overline{i}\times\overline{i} - 18\overline{i}\times\overline{j} + 15\overline{i}\times\overline{k} + 5\overline{j}\times\overline{i} - 30\overline{j}\times\overline{j} +$$

$$+25\overline{j}\times\overline{k} - \overline{k}\times\overline{i} + 6\overline{k}\cdot\overline{j} - 5\overline{k}\cdot\overline{k} = -\overline{k} + 3\overline{i} - 5\overline{j} + 3\cdot\overline{0} - 18\overline{k} - 15\overline{j} - 5\overline{k} -$$

$$-30\cdot\overline{0} + 25\overline{i} - \overline{j} - 6\overline{i} - 5\cdot\overline{0} = 22\overline{i} - 21\overline{j} - 24\overline{k}.$$

Пример 29.3. *Вычислите площадь треугольника* $\triangle\ ABC$, *если* $A(1;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;1)$.

Р е ш е н и е: Площадь $\triangle\ ABC$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, которая в соответствии с п. 29.2 равна модулю векторного произведения этих векторов:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и их векторное произведение:

$$\overline{AB}(0;1;2), \quad \overline{AC}(-2;1;0),$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}.$$

Вычисляем модуль этого вектора по формуле (28.6):

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Окончательно: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

Пример 29.4. *Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{p} - \overline{q}$ *и* $2\overline{p} + \overline{q}$, *если* $\overline{p}$ *и* $\overline{q}$ *– единичные векторы, образующие угол* $60°$.

Р е ш е н и е: Найдем сначала векторное произведение:

$$(\overline{p} - \overline{q}) \times (2\overline{p} + \overline{q}) = 2\overline{p} \times \overline{p} + \overline{p} \times \overline{q} - 2\overline{q} \times \overline{p} - \overline{q} \times \overline{q} =$$

$$= 2 \cdot \overline{0} + \overline{p} \times \overline{q} + 2\overline{p} \times \overline{q} - \overline{0} = 3\overline{p} \times \overline{q}.$$

Используя геометрический смысл и определение векторного произведения, получаем:

$$S = |3\overline{p} \times \overline{q}| = 3|\overline{p}| \cdot |\overline{q}| \cdot \sin 60° = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 29.5. *Найдите высоту* CD ΔABC *из примера 29.3.*

Р е ш е н и е: Высоту $CD = h$ на сторону AB найдем используя формулу для площади треугольника: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\overline{AB}| \cdot h$, которую мы нашли через векторное произведение в примере 29.3: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{6}$. Зная координаты вектора $\overline{AB} = (0; 1; 2)$, найденные ранее, определим длину основания треугольника:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

из уравнения $\sqrt{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}h$ находим:

$$h = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}.$$

Пример 29.6. *Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам* $\overline{a} = (2; -1; 5)$ *и* $\overline{b} = (-2; 3; 0)$.

Р е ш е н и е: В качестве вектора, перпендикулярного как вектору $\overline{a}$, так и $\overline{b}$, выберем их векторное произведение:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -15\overline{i} - 10\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Теперь найдем вектор, сонаправленный этому и единичной длины:

$$\overline{e} = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{|\overline{a} \times \overline{b}|} = \frac{-15\overline{i} - 10\overline{j} + 4\overline{k}}{\sqrt{15^2 + 10^2 + 4^2}} = -\frac{15}{\sqrt{341}}\overline{i} - \frac{10}{\sqrt{341}}\overline{j} + \frac{4}{\sqrt{341}}\overline{k}.$$

Заметим, что наряду с вектором $\overline{e}$, искомым вектором может быть также вектор $-\overline{e}$.

Пример 29.7. *Найдите смешанное произведение векторов* $\overline{a} = (1; -1; 2)$, $\overline{b} = (0; 1; 2)$, $\overline{c} = (2; 0; 1)$.

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой (29.5) находим:

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 4 - 4 = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 29.8. *Найдите объём треугольной пирамиды с вершинами* $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$, $D(5;5;6)$.

Решение: Нетрудно показать, что объём треугольной пирамиды $V_{пир}$ с вершиной в точке A в 6 раз меньше объёма параллелепипеда $V_{пар}$, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Действительно: $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{пир}H$, $V_{пар} = S_{пар}H$, где $S_{пир}$, $S_{пар}$, H – соответственно площадь основания пирамиды, параллелепипеда и их общая высота. Если учесть, что $S_{пир} = \frac{1}{2}S_{пар}$ (площадь треугольника равна половине от площади параллелограмма), то получим: $V_{пир} = \frac{1}{6}V_{пар}$. Вычислим координаты перечисленных векторов: $\overline{AB} = (2;1;1)$, $\overline{AC} = (2;3;2)$, $\overline{AD} = (3;3,\ 4)$. Найдем смешанное произведение:

$$(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 2\cdot 6 - 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = 7.$

Окончательно: $V_{пир} = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{1}{6}|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{CD}| = \frac{7}{6}$.

Пример 29.9. *Найдите высоту треугольной пирамиды из примера 29.8, опущенной из вершины A.*

Решение: Так как высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, найдем H из формулы $V_{пар} = S_{пар}H$. Для нахождения $S_{пар}$ площади основания параллелепипеда вычислим векторное произведение $\overline{BC}\times\overline{BD}$. Вычитая из координат конца координаты начала, получим $\overline{BC} = (0;2;1)$, $\overline{BD} = (1;2;3)$,

$$\overline{BC}\times\overline{BD} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \overline{j}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \overline{k}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$$

$S_{пар} = |\overline{BC}\times\overline{BD}| = \sqrt{4^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{21}$. Из уравнения: $7 = \sqrt{21}H$ получаем $H = \frac{7}{\sqrt{21}}$.

Пример 29.10. *Проверьте компланарность векторов* $\overline{a} = 2\overline{i}+5\overline{j}+$ $+7\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$.

Р е ш е н и е: Найдем смешанное произведение

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - 15 + 7 = 0.$$

Пример 29.11. *Проверьте, лежат ли четыре точки* $A(1;1;3)$ $B(-1;-1;-1)$, $C(2;0;3)$, $D(0;1;2)$ *в одной плоскости?*

Р е ш е н и е: Данные четыре точки будут лежать в одной плоскости, очевидно, тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ будут компланарны. Проверим это: $\overline{AB} = (-2;-2;-4)$, $\overline{AC} = (1;-1;0)$, $\overline{AD} = (-1;0;-1)$.

$$(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 + 2\cdot(-1) + 4 = 0.$$

Так как смешанное произведение равно нулю, векторы компланарны и точки лежат в одной плоскости.

Самостоятельная работа

Пример 29.12. *Найдите векторное произведение* $\overline{a}\times\overline{b}$, *для векторов* $\overline{a} = -4\overline{i}+6\overline{j}-2\overline{k}$ *и* $\overline{b} = \overline{i}-\overline{j}-3\overline{k}$

Пример 29.13. *Вычислите* $((\overline{p}+2\overline{q})\times(2\overline{p}-\overline{q}))^2$, *если* $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $(\widehat{\overline{p}\overline{q}}) = 120^0$.

Пример 29.14. *Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{a} = \overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$ *и* $\overline{b} = \overline{i}+2\overline{j}$.

Пример 29.15. *Найдите два вектора, перпендикулярные векторам* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$, *если* $A(1;2;3)$, $B(2;1;4)$, $C(2;1;3)$, $D(3;3;3)$.

Пример 29.16. *Найдите высоты* ΔABC, *если* $A(-1;1;5)$, $B(0;-1;-3)$, $C(2;1;-2)$.

Пример 29.17. *Найдите смешанное произведение* $(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$, *если* $\overline{a} = (1;-2;1)$, $\overline{b} = (0;-2;3)$, $\overline{c} = (-3;1;2)$.

Пример 29.18. *Найдите смешанное произведение* $(\overline{b}\overline{a}\overline{c})$ *для векторов из примера 29.17.*

Пример 29.19. *Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\overline{a} = -3\overline{i} - 4\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = -2\overline{j} - 5\overline{k}$.

Пример 29.20. *Проверьте компланарность векторов* $\overline{a}=(2;-6;-4)$, $\overline{b} = (-2;6;8)$, $\overline{c} = (6;-24;-12)$.

Пример 29.21. *Лежат ли в одной плоскости точки* $A(1;0;1)$, $B(2;1;1)$, $C(-1;-4;-1)$, $D(0;0;2)$*?*

Пример 29.22. *Найдите объём треугольной пирамиды с вершинами в точках* $A(-2;1;1)$, $B(-5;1;-2)$, $C(-3;0;3)$, $D(-6;0;1)$.

Пример 29.23. *Найдите высоту пирамиды с вершинами в точках* $A(-2;-3;-1)$, $B(-4;-1;2)$, $C(-6;-3;-7)$, $D(5;4;-8)$, *опущенную из вершины* D.

Лекция 30. Плоскость

Плоскость, нормальный вектор. Связка плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

Аналитическая геометрия в пространстве изучает взаимное расположение и свойства линий и поверхностей, позволяет решать методами алгебры геометрические задачи. Применим методы векторной алгебры для решения задач аналитической геометрии.

30.1. Уравнение плоскости

Положение плоскости в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащей этой плоскости,и вектором $\overline{N}=(A;B;C)$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 160).

Вектор $\overline{N}$, *перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.*

Выведем уравнение плоскости, задаваемой нормальным вектором $\overline{N}$ и проходящей через данную точку M_0. Рассмотрим произвольную точку $M(x;y;z)$, принадлежащую плоскости. Вектор $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$, поэтому $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$. Найдя координаты вектора $\overline{M_0M} = (x-x_0)\overline{i}+(y-$

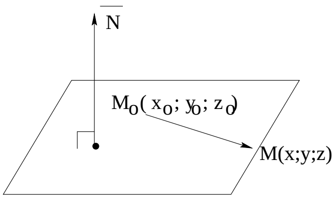


Рис. 160. *Нормальный вектор плоскости*

$-y_0)\overline{\jmath}+(z-z_0)\overline{k}$, приравняем к нулю скалярное произведение. Обозначив $\overline{r}=\overline{OM}$ и $\overline{r_0}=\overline{OM_0}$ радиус-векторы точек M и M_0 соответственно, по формуле (28.3) получим: $\overline{M_0M}=\overline{r}-\overline{r_0}$ и далее, на основании условия (28.4) приравняв к нулю скалярное произведение, получим *векторное уравнение плоскости*:

$$(\overline{r}-\overline{r_0})\cdot\overline{N}=0. \tag{30.1}$$

Записав это уравнение в координатной форме, получаем уравнение плоскости, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{30.2}$$

Координаты любой точки M плоскости удовлетворяют уравнению (30.2), а точки, не принадлежащие плоскости, не удовлетворяют, т.к. в этом случае $\overline{M_0M}\not\perp\overline{N}$.

Пример 30.1. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(1;2;3)$ *перпендикулярно вектору* $\overline{N}=(2;-1;1)$.

Решение: Здесь $A=2$, $B=-1$, $C=1$. На основании формулы (30.2) получаем:

$2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0$ или $2x-y+z-3=0$

Ответ. $2x-y+z-3=0$.

Если в уравнении (30.1) раскрыть скобки, получится векторное уравнение плоскости в виде:

$$\overline{r}\cdot\overline{N}+D=0, \tag{30.3}$$

где $D=-\overline{r_0}\cdot\overline{N}$.

Записав далее это уравнение с помощью формулы (28.18) в координатах, получим следующее уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{30.4}$$

Легко показать, что всякое уравнение первой степени вида (30.4) является уравнением некоторой плоскости, если хоть один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Действительно, если, например, $A \neq 0$, то уравнение (30.4) можно записать в виде (30.2):

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Т.е. уравнение (30.4) есть уравнение плоскости с нормальным вектором $\overline{N} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_0\left(-\dfrac{D}{A}; 0; 0\right)$.

Определение 30.1. *Уравнение (30.4) называется общим уравнением плоскости, уравнение (30.2) – уравнением плоскости, проходящей через данную точку, уравнения (30.1) и (30.3) – соответствующими уравнениями в векторной форме.*

Выведем уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ (рис. 161).

Обозначим $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r}$ – радиус-векторы этих точек и текущей точки плоскости $M(x; y; z)$ соответственно.

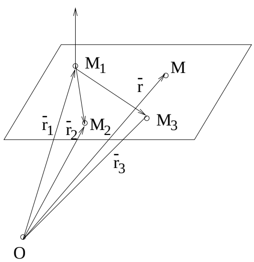


Рис. 161. *Плоскость через три точки*

В качестве нормального вектора плоскости выберем вектор $\overline{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$, очевидно, перпендикулярный плоскости. В соответствии с (30.1) получаем векторное уравнение:

$$(\overline{r} - \overline{r_1})((\overline{r_2} - \overline{r_1}) \times (\overline{r_3} - \overline{r_1})) = 0.$$

Поскольку в соответствии с определением 29.5 левая часть этого уравнения есть смешанное произведение, векторное уравнение плоскости через три точки принимает вид:

$$((\overline{r}-\overline{r_1})(\overline{r_3}-\overline{r_1})(\overline{r_2}-\overline{r_1}))=0. \tag{30.5}$$

Записав это уравнение с помощью формулы (29.5) в координатах, получим уравнение плоскости через три точки в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{30.6}$$

Определение 30.2. *Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей.*

Уравнение (30.2), в котором коэффициенты A, B и C могут принимать любые значения, является уравнением связки плоскостей.

30.2. Особые случаи расположения плоскости

Если коэффициент $D=0$, то плоскость проходит через начало координат, т.к. координаты точки $O(0;0;0)$ удовлетворяют уравнению

$$Ax+By+Cz=0.$$

Если коэффициент $A=0$, то нормальный вектор плоскости перпендикулярен оси Ox (проверьте самостоятельно перпендикулярность векторов $\overline{N}=(0;B;C;)$ и $\overline{i}=(1;0;0)$) и, следовательно, данная плоскость $By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox.

Если коэффициенты $A=0$ и $D=0$, то плоскость $By+Cz=0$ проходит через ось Ox, т.к. она параллельна оси Ox и проходит через начало координат.

Если коэффициенты $A=0$ и $B=0$, то нормальный вектор плоскости параллелен оси Oz (проверьте самостоятельно коллинеарность векторов $\overline{N}=(0;0;C)$ и $\overline{k}=(0;0;1)$ и, следовательно, данная плоскость $Cz+D=0$ параллельна плоскости Oxy и перпендикулярна оси Oz.

Если коэффициенты $A=B=D=0$, то данная плоскость $z=0$ является координатной плоскостью Oxy (параллельна плоскости Oxy и проходит через начало координат).

30.3. Угол между плоскостями

Двугранный угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами (рис. 162).

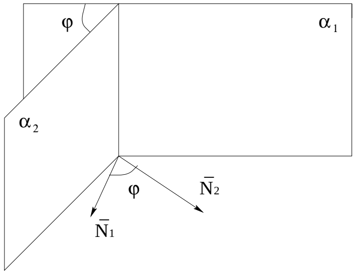


Рис. 162. *Угол между плоскостями*

Если даны две плоскости

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \alpha_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned} \tag{30.7}$$

то угол между ними вычисляется как угол между их нормальными векторами $\overline{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{30.8}$$

Пример 30.2. *Определить угол между плоскостями* $2x + y - z + 1 = 0$ *и* $x - y + 3z = 0$.

Р е ш е н и е: По формуле (30.8) получаем:

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = -\frac{2}{\sqrt{66}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi - \arccos(\frac{2}{\sqrt{66}}) \approx 1,82.$$

Ответ: $\cos\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{66}}$.

30.4. Параллельность и перпендикулярность плоскостей

Две плоскости будут параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы параллельны и плоскости не совпадают. Т.е. необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей (30.7) является условие (30.9):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{30.9}$$

при условии, что плоскости не совпадают. Последнее условие легко проверяется приравниванием левых частей уравнений (30.7).

Аналогично, две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны. Т.е. необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей (30.7) является условие (30.10):

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \tag{30.10}$$

Пример 30.3. *При каком значении m две плоскости $2x-3y+5=0$ и $mx+7y-6=0$ будут параллельны?*

Р е ш е н и е: Проверим выполнение условия (30.9): $\dfrac{2}{m} = \dfrac{-3}{7} = \dfrac{0}{0}$.

Решаем первое уравнение $\dfrac{2}{m} = \dfrac{-3}{7} \Longrightarrow m = -\dfrac{14}{3}$. При этом плоскости $2x-3y+5=0$ и $-\dfrac{14}{3}x+7y-6=0$, очевидно, различны, т.к. равенство $2x-3y+5 = -\dfrac{14}{3}x+7y-6$ не является тождеством.

Ответ: $m = -\dfrac{14}{3}$.

30.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость $\alpha : Ax+By+Cz+ +D=0$. Докажем, что расстояние d от точки M_0 до плоскости α, т.е. длина перпендикуляра M_0M_1 на плоскость α (рис. 163), вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{30.11}$$

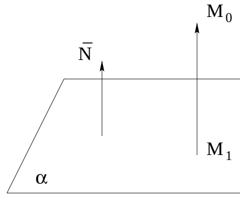


Рис. 163. *Расстояние от точки до плоскости*

Р е ш е н и е: Обозначим $\overline{N}$ – нормальный вектор плоскости $\alpha : \overline{N} = (A; B; C)$, координаты точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$. $d = \left|\overline{M_1M_0}\right|$, где вектор $\overline{M_1M_0}$ имеет координаты: $\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\overline{\imath} + (y_0 - y_1)\overline{\jmath} + (z_0 - -z_1)\overline{k}$. Поскольку $\overline{N} \parallel \overline{M_1M_0}$ ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$), имеем по определению скалярного произведения:

$$\overline{N} \cdot \overline{M_1M_0} = \left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right| \cdot \cos\varphi = \pm\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right|. \tag{30.12}$$

С другой стороны, в соответствии с формулой (28.18):

$$\overline{N} \cdot \overline{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1). \tag{30.13}$$

Но точка $M_1 \in \alpha$, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \Longrightarrow -Ax_1 - - By_1 - Cz_1 = D$ и $\overline{N} \cdot \overline{M_1M_0} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ Учитывая, что $\left|\overline{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $\left|\overline{M_1M_0}\right| = d$, из формул (30.12), (30.13) получаем:

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot d = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D,$$

откуда

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

и, т.к. $d \geq 0$, получаем формулу (30.11). В векторной форме формула расстояния от точки до плоскости получается с учётом (30.3) в виде:

$$d = \frac{\left|\overline{r_0} \cdot \overline{N} + D\right|}{|\overline{N}|}. \tag{30.14}$$

Аналогично общему уравнению плоскости в пространстве (30.4), на плоскости уравнение (4.7)

$$Ax + By + C = 0, \qquad \text{при} \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

задаёт прямую и называется общим уравнением прямой на плоскости.

Можно доказать, что вектор $\overline{N} = (A; B)$ будет перпендикулярен этой прямой; он называется нормальным вектором прямой и задаёт её направление.

Угол между двумя прямыми $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,. \tag{30.15}$$

Необходимым и достаточным условием параллельности двух различных прямых является условие $\overline{N_1} \| \overline{N_2}$, но прямые не совпадают:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{30.16}$$

а условие их перпендикулярности условие $\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{30.17}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ на плоскости Oxy определяется по формуле (30.18):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{30.18}$$

Доказательство этих формул повторяет приведённые выше для соответствующих уравнений в пространстве.

Практическое занятие 30. Плоскость

Пример 30.1. *Проверьте, проходит ли плоскость* α : $2x - 3y + z - 1 = 0$ *через точки* $M_1(1, 0, -1)$ *и* $M_2(1, 1, 1)$*?*

Р е ш е н и е: Подставив координаты точки M_1 в уравнение плоскости, получим: $2 - 1 - 1 = 0$, т.е. точка $M_1 \in \alpha$. Для точки M_2 аналогично получаем: $2 - 3 + 1 - 1 \neq 0$, т.е. $M_2 \notin \alpha$.

Пример 30.2. *Найдите расстояние от точки* M_2 *до плоскости* α *в примере 30.1.*

Р е ш е н и е: По формуле (30.11) получаем:

$$d = \frac{|2 - 3 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Пример 30.3. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;1;1)$ параллельно плоскости $2x-2y+2z+1=0$.*

Решение: Используем уравнение (30.2) плоскости, проходящей через заданную точку M_0. В качестве нормального вектора возьмём нормальный вектор заданной плоскости $\overline{N}=(2,-2,2)$, т.к. они параллельны. Получим:

$$2(x-2)-2(y-2)+2(z-1)=0.$$

или после упрощения: $x-y+z-2=0$.

Пример 30.4. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;0;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;2;-2)$.*

Решение: Используя формулу (30.2), получаем $2(x-2)+2(y-0)-2(z-3)=0$. Упрощая, находим: $x+y-z+1=0$.

Пример 30.5. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через три точки: $O(0;0;0)$, $M_1(-4;2;-1)$, $M_2(-2;-4;3)$.*

Решение: Используя формулу (30.6), получаем:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -4-0 & 2-0 & -1-0 \\ -2-0 & -4-0 & 3-0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}-y\cdot\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x(6-4)-y(-12-2)+z(16+4)=0 \Leftrightarrow x+7y+10z=0.$

Пример 30.6. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;0;-1)$ и $M_2(1;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$.*

Решение: Используем формулу (30.2) уравнения плоскости, проходящей через данную точку. В качестве нормального вектора искомой плоскости возьмём вектор $\overline{N}$, перпендикулярный вектору $\overline{M_1M_2}$ и нормальному вектору заданной плоскости $\overline{N_1}=(3;2;-1)$, например, их векторное произведение $\overline{M_1M_2}\times\overline{N_1}$ Найдем координаты вектора $\overline{M_1M_2}=(-1,-1,4)$ и нормальный вектор:

$$\overline{N}=\overline{M_1M_2}\times\overline{N_1}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-7\overline{i}+11\overline{j}+\overline{k}.$$

Искомое уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 с нормальным вектором $\overline{N}$, будет иметь вид:

$$-7(x-2)+11(y-0)+1(z+1)=0 \text{ или } -7x+11y+z+15=0.$$

Пример 30.7. *Найдите угол между плоскостями* α_1*:* $x-y+2z-3=0$ *и* $\alpha_2: \ 2x+y=0$.

Р е ш е н и е: Зная $\overline{N_1}=(1,-1,2)$, $\overline{N_2}=(2,1,0)$ нормальные векторы данных плоскостей, по формуле (30.8) получаем:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N_1N_2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|}=\frac{1\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Пример 30.8. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(0,2,1)$ *параллельно векторам* $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ *и* $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$

Р е ш е н и е: В качестве нормального вектора искомой плоскости выберем векторное произведение данных векторов:

$$\overline{N}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$=-2\overline{i}+2\overline{j}$.

В соответствии с формулой (30.2) получаем уравнение плоскости: $-2(x-0)+2(y-2)=0$ или $x-y+2=0$.

Пример 30.9. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка* AB *перпендикулярно к этому отрезку, если концы отрезка имеют координаты* $A(-7;2;-2)$, $B(3;4;10)$.

Р е ш е н и е: Координаты точки M_o – середины отрезка AB вычисляются по формулам (28.7): $x_o=\dfrac{-7+3}{2}=-2$, $y_o=\dfrac{2+4}{2}=3$, $z_o=\dfrac{-2+10}{2}=4$. В качестве нормального вектора возьмём вектор $\overline{AB}=(10;2;12)$. Искомое уравнение будет: $10(x+2)+2(y-3)+12(z-4)$ или $5x+y+6z-17=0$.

Пример 30.10. *Найдите расстояние между параллельными плоскостями:* $\alpha_1: \ 2x+y-z+3=0$ *и* $\alpha_2: \ -2x-y+z-5=0$.

Р е ш е н и е: Выберем точку M на плоскости α_1 и найдем расстояние от этой точки до плоскости α_2. Задавая две координаты точки M: $x_o = 0$, $y_o = 0$, найдём $z_o = 3$, т.е. $M(0,0,3)$. Искомое расстояние находим по формуле (30.11):

$$d = \frac{|3-5|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Самостоятельная работа

Пример 30.11. *Найдите расстояние от точки M, делящей отрезок AB в отношении $1:2$, до плоскости $x - 3y + z - 6 = 0$, если $A(2,0,1)$, $B(-1,3,1)$.*

Пример 30.12. *Через точку A отрезка AB проведите плоскость, перпендикулярную этому отрезку, если $A(-1,2,-3)$, $B(0,2,4)$.*

Пример 30.13. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,-5,0)$, $M_2(6,0,2)$ перпендикулярно плоскости $x + 5y + {}$ $+2z - 10 = 0$.*

Лекция 31. Прямая в пространстве

Общие, векторные, параметрические, канонические уравнения прямой в пространстве. Угол между прямыми. Пучок плоскостей. Пересечение прямой и плоскости.

31.1. Прямая в пространстве

Прямую в пространстве зададим пересечением двух плоскостей (рис. 164), т.е. системой (31.1) в векторной форме или системой (31.2) в координатной:

$$\begin{cases} \overline{N_1} \cdot \overline{r} + D_1 = 0, \\ \overline{N_2} \cdot \overline{r} + D_2 = 0. \end{cases} \tag{31.1}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{31.2}$$

Если эти плоскости не параллельны, т.е. их нормальные векторы не коллинеарны: $\overline{N}_1 = (A_1; B_1; C_1), \overline{N}_2 = (A_2; B_2; C_2), \overline{N}_1 \nparallel \overline{N}_2$, то системы (31.1), (31.2) определяют единственную прямую.

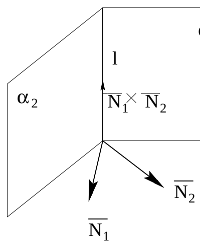


Рис. 164. *Прямая как линия пересечения плоскостей*

Определение 31.1. *Уравнения (31.1), (31.2) называются общими уравнениями прямой.*

Наряду с рассмотренным способом прямую в пространстве можно задать, определив принадлежащую ей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{s} = (m; n; p)$, параллельный этой прямой. *Вектор $\overline{s}$ называется направляющим вектором прямой.*

Для произвольной точки $M(x; y; z)$ прямой l (рис. 165) имеем: $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$. Вектор $\overline{M_0M} \parallel \overline{s} \Longrightarrow \overline{M_0M} = \overline{s} \cdot t$, где параметр $t \in (-\infty; +\infty)$. Обозначая радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\overline{r}_0 = \overline{OM_0}$ и $\overline{r} = \overline{OM}$, получаем:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t \cdot \overline{s}. \tag{31.3}$$

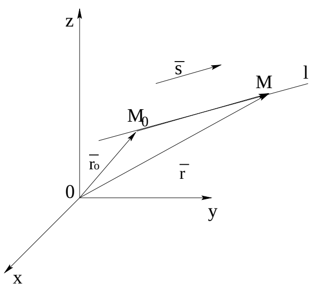


Рис. 165. *Направляющий вектор прямой*

Уравнение (31.3) называется векторным уравнением прямой. Здесь каждому значению параметра t соответствует радиус-вектор $\overline{r}$ точки $M \in l$.

Для получения параметрических уравнений прямой представим уравнение (31.3) в координатной форме:

$$\overline{r} = \overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},\ \overline{r}_0 = \overline{OM_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k},\ t\overline{s} = \\ = tm\overline{i} + tn\overline{j} + tp\overline{k}.$$

Получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \tag{31.4}$$

Определение 31.2. *Уравнения (31.4) называются параметрическими уравнениями прямой. Они также определяют прямую заданием точки M_0 и направляющего вектора $\overline{s}$. При изменении параметра t изменяются координаты $x; y; z$ и точка $M(x; y; z)$ перемещается по прямой.*

Выразим параметр t из каждого уравнения системы (31.4) и приравняем правые части полученных уравнений:

$$t = \frac{x - x_0}{m},\ t = \frac{y - y_0}{n},\ t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Получим уравнения:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{31.5}$$

задающие прямую.

Определение 31.3. *Уравнения (31.5) называются каноническими уравнениями прямой.*

Заметим, что уравнения (31.5) равносильны системе двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}, \\ \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}. \end{cases} \tag{31.6}$$

Третье уравнение $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{p}$ является следствием этих двух. Таким образом, канонические уравнения (31.5) задают прямую пересечением двух плоскостей. Плоскости, задаваемые уравнениями (31.6), обладают особенностями: первая из них параллельна оси Oz, вторая – оси Ox (см. п. 30.2 лекции 30).

Замечание. Договоримся писать уравнения (31.5) в виде:

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p},$$

если вектор $\overline{s}$ имеет координаты $\overline{s}=(0;n;p)$. В этом случае $\overline{s}\perp Ox$ и $x=x_1$. Аналогично прямая

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{p}$$

параллельна оси Oz, т.к. в этом случае $\overline{s}\perp Ox$ и $\overline{s}\perp Oy$ ($x=x_1$, $y=y_1$).

Пример 31.1. *Привести общие уравнения прямой*

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0,\\ y-z-2=0. \end{cases} \tag{31.7}$$

к каноническому виду.

Р е ш е н и е: Для получения канонических уравнений необходимо найти точку M_0 и направляющий вектор $\overline{s}$ прямой.

Для нахождения точки M_0 дадим одной из координат какое-нибудь значение, например, $z=0$, и найдем две другие координаты из системы:

$$\begin{cases} 4x-y+12=0,\\ y-2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\dfrac{5}{2},\\ y_0=2. \end{cases} \tag{31.8}$$

Таким образом точка $M_0(-\frac{5}{2};2;0)\in l$ найдена.

Для нахождения направляющего вектора $\overline{s}$ заметим, что векторное произведение нормальных векторов $\overline{N}_1=(4;-1;-1)$ и $\overline{N}_2=(0;1;-1)$ данных двух плоскостей можно принять в качестве направляющего вектора прямой их пересечения, т.к. вектор $\overline{s}$ параллелен l (рис. 164): $\overline{s}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2, \overline{s}\perp\overline{N}_1, \overline{s}\perp\overline{N}_2$.

Поэтому $\overline{s}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 4 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\overline{i}(1+1)-\overline{j}(-4)+\overline{k}(4)=2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}.$

Окончательно, канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x+\frac{5}{2}}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{4}.$$

Пример 31.2. *Записать уравнения прямой* $\dfrac{x+\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{4}$ *в параметрическом виде.*

Р е ш е н и е: Обозначим общее значение данных в условии выражений через t : $\dfrac{x+\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{4}=t$, откуда:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x+\frac{5}{2}}{2}&=t,\\ \frac{y-2}{4}&=t,\\ \frac{z}{4}&=t. \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x&=-\frac{5}{2}+2t,\\ y&=2+4t,\\ z&=4t. \end{aligned}\right.$$

Пример 31.3. *Записать общие уравнения прямой, заданной в параметрическом виде:*

$$\left\{\begin{aligned} x&=-\frac{5}{2}+2t,\\ y&=2+4t,\\ z&=4t. \end{aligned}\right.$$

Р е ш е н и е: Выражая параметр t из каждого уравнения и приравнивая правые части, получим канонические уравнения прямой:

$$\left\{\begin{aligned} x&=-\frac{5}{2}+2t,\\ y&=2+4t,\\ z&=4t. \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} t&=\frac{x+\frac{5}{2}}{2},\\ t&=\frac{y-2}{4},\\ t&=\frac{z}{4}. \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \frac{x+\frac{5}{2}}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{4}.$$

Выбирая два из последних уравнений, получаем:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x+\frac{5}{2}}{2}&=\frac{y-2}{4},\\ \frac{y-2}{4}&=\frac{z}{4}. \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x+5&=y-2,\\ y-2&=z. \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x-y+7&=0,\\ y-z-2&=0. \end{aligned}\right.$$

Ответ:

$$\left\{\begin{aligned} 2x-y+7&=0,\\ y-z-2&=0. \end{aligned}\right. \tag{31.9}$$

Заметим, что полученные общие уравнения (31.9) отличаются от уравнений (31.7), которыми эта прямая была задана в примере 31.1.

Однако и те и другие задают одну и ту же прямую. Чтобы убедиться в этом, проверьте, например, что точки $M_0(-\frac{5}{2}; 2; 0)$ и $M_1(-1; 5; 3)$ удовлетворяют уравнениям (31.7) и (31.9). Другими словами, уравнения (31.7) и (31.9) задают одну прямую M_0M_1.

Для получения канонических уравнений прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, заметим, что в качестве направляющего вектора в этом случае можно выбрать

$\overline{s} = \overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\overline{i} + (y_1 - y_0)\overline{j} + (z_1 - z_0)\overline{k}$. Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две точки, примут вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{31.10}$$

Пример 31.4. *Написать канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точки* $M_0(-\frac{5}{2}; 2; 0)$ *и* $M_1(-1; 5; 3)$.

Р е ш е н и е: в соответствии с формулами (31.10) получаем канонические уравнения:

$$\frac{x + \frac{5}{2}}{-1 + \frac{5}{2}} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z}{3} \Longleftrightarrow \frac{x + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{3}.$$

Для получения общих уравнений выберем два из последних трёх уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{y - 2}{3}, \\ \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z}{3}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 = y - 2, \\ y - 2 = z, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Мы получили уравнения (31.9).

31.2. Угол между прямыми

Пусть в пространстве даны две прямые:

$$\begin{aligned} l_1 &: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \\ l_2 &: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \end{aligned} \tag{31.11}$$

Угол между ними вычисляется как угол между их направляющими векторами $\overline{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\overline{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{31.12}$$

Условием параллельности двух прямых (31.11) является условие коллинеарности их направляющих векторов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{31.13}$$

при условии, что эти прямые не совпадают. Последнее условие легко проверяется подстановкой пары точек одной из этих прямых в уравнение другой.

Условием перпендикулярности двух прямых является условие перпендикулярности их направляющих векторов:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0. \tag{31.14}$$

31.3. Пересечение прямой и плоскости

Пусть в пространстве даны прямая l и плоскость α:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{31.15}$$

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0. \tag{31.16}$$

Найдем координаты точки $P(x_1; y_1; z_1)$ пересечения прямой l и плоскости α, для чего запишем уравнения прямой в параметрической форме (31.4) и, подставив значения x, y, z в левую часть уравнения (31.16), найдем значение параметра t_1, при котором одновременно выполняются уравнения (31.15) и (31.16):

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \tag{31.17}$$

Подставив затем эти значения в формулы (31.4), получим координаты точки пересечения:

$$x_1 = x_0 + t_1 m, \quad y_1 = y_0 + t_1 n, \quad z = z_0 + t_1 p. \tag{31.18}$$

Заметим, что формулы (31.15),(31.16) являются координатной формой записи соответствующих векторных уравнений прямой и плоскости:

$$\begin{cases} \overline{r} = \overline{r_0} + t \cdot \overline{s}, \\ \overline{r} \cdot \overline{N} + D = 0. \end{cases}$$

Выразив $\overline{r}$ из первого уравнения системы и подставив во второе, получим для t_1 формулу:

$$t_1 = -\frac{\overline{r_0} \cdot \overline{N} + D}{\overline{N} \cdot \overline{s}}.$$

31.4. Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой (31.15) и плоскостью (31.17) легко определяется (рис. 166) через угол между направляющим вектором $\overline{s}$ прямой и нормальным вектором $\overline{N}$ плоскости:

$$\cos(\overline{N}; \overline{s}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi.$$

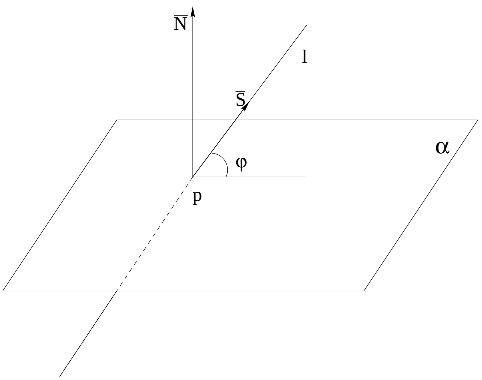


Рис. 166. *Угол между прямой и плоскостью*

С другой стороны, по формуле (28.20) получаем:

$$\cos(\overline{N}; \overline{s}) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Окончательно:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{31.19}$$

Условием параллельности прямой (31.15) и плоскости (31.16) является, очевидно, условие перпендикулярности направляющего вектора $\overline{s}$ прямой и нормального вектора $\overline{N}$ плоскости

$$Am + Bn + Cm = 0 \tag{31.20}$$

при условии что прямая не принадлежит плоскости. Последнее условие легко проверить подстановкой в уравнение плоскости двух точек прямой.

Условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности направляющего вектора $\overline{s}$ и нормального вектора $\overline{N}$ плоскости:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \tag{31.21}$$

31.5. Пучок плоскостей

Определение 31.4. *Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую l, называется пучком плоскостей, а прямая l – осью пучка (сравните с определением связки плоскостей в лекции 30).*

Пусть ось пучка задана общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{31.22}$$

Докажем, что уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (31.22), имеет вид:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{31.23}$$

где параметр λ принимает любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство. Уравнение (31.23) при любом конкретном значении λ определяет некоторую плоскость, т.к. является уравнением вида (30.4), где $A = A_1 + \lambda A_2, B = B_1 + \lambda B_2, C = C_1 + \lambda C_2, D = D_1 + \lambda D_2$. Эта плоскость проходит через прямую (31.22), т.к. значения $x; y; z$, удовлетворяющие системе (31.22), обращают в тождество и уравнение (31.23) (выражения в скобках равны нулю).

Наоборот, покажем, что всякая плоскость пучка (кроме плоскости α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$) может быть представлена в виде (31.23). Выберем произвольную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)\notin\alpha_2$, т.е. $A_2x_0+B_2y_0+$ $+C_2z_0+D_2\neq 0$. Найдем значение λ_0 из условия, чтобы координаты точки M_0 удовлетворяли уравнению (31.23):

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda_0(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\lambda_0=\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}.$$

Подставив в уравнение (31.23) $\lambda=\lambda_0$, можно быть уверенным, что это будет уравнением плоскости, проходящей через прямую (31.22) (см. первую часть доказательства) и точку M_0 (значение λ_0 выбиралось из этого условия). Т.к. прямая (31.22) и точка M_0, не принадлежащая этой прямой ($M_0\notin\alpha_2$), однозначно определяют плоскость пучка, вторая часть доказательства закончена.

31.6. Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

В заключение рассмотрим задачу нахождения кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и условие пересечения двух прямых в пространстве.

Пусть прямые задаются точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и направляющими векторами $\overline{S}_1(m_1;n_1;p_1)$, $\overline{S}_2(m_2;n_2;p_2)$, $S_1\nparallel S_2$.

Очевидно, что кратчайшее расстояние h между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, т.е. расстоянию между плоскостями (основаниями параллелепипеда), параллельными этим прямым и содержащими их (рис. 167)

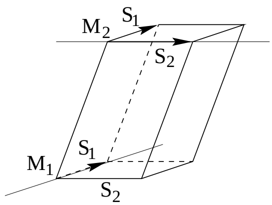


Рис. 167. *Расстояние между скрещивающимися прямыми*

Эту высоту найдем из формулы для объёма параллелепипеда: $V = h \cdot S_{\text{осн}}$, где:

$$V = |(\overline{M_1M_2}\,\overline{S}_1\overline{S}_2)|, \quad S_{\text{осн}} = |\overline{S}_1 \times \overline{S}_2|$$

Таким образом, кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

$$h = \frac{|(\overline{M_1M_2}\,\overline{S}_1\overline{S}_2)|}{|\overline{S}_1 \times \overline{S}_2|} = \frac{1}{|\overline{S}_1 \times \overline{S}_2|}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{matrix} \right\|. \tag{31.24}$$

Условие неколлинеарности векторов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ гарантирует неравенство нулю знаменателя. Очевидно, что условием пересечения двух непараллельных прямых будет $h = 0$, т.е.:

$$\begin{cases} (\overline{M_1M_2}\,\overline{S}_1\overline{S}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \overline{S}_1 \times \overline{S}_2 \neq 0. \end{cases} \tag{31.25}$$

Практическое занятие 31. Прямая в пространстве

Пример 31.1. *Проверьте, проходит ли прямая l*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$$

через точки $M_1(3; -1; 0)$, $M_2(-1; 1; 1)$?

Решение: Подставляя координаты точки M_1 в канонические уравнения прямой, получаем $\dfrac{3-1}{2} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{0}{0}$. В соответствии с изложенным в лекции 31 считаем, что эти равенства верны,включая последнее, т.е. $M_1 \in l$ (см. лекцию 31).

Для точки M_2: $\dfrac{-1-1}{2} = \dfrac{1}{-1} = \dfrac{1}{0}$, т.е. $M_2 \notin l$.

Пример 31.2.*Напишите общее уравнение прямой l из примера 31.1.*

Решение: Выберем два равенства из канонических уравнений прямой l:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1}, \\ \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{0}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение $z = 0$ второй плоскости Oxy можно было получить сразу из канонических уравнений, т.к. последняя дробь не имеет смысла при $z \neq 0$.

Пример 31.3. *Проверьте, проходит ли прямая l через точки $M_0(0;-1;2)$, $M_1(1;1;1)$, и запишите канонические уравнения прямой:*

$$l : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Подставляя координаты точки M_0 в уравнение прямой, получаем

$$\begin{cases} -1 - 2 + 3 = 0, \\ 1 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{т.е. } M_0 \in l.$$

Делая тоже самое с координатами точки M_1, получаем

$$\begin{cases} -1 - 1 + 3 \neq 0, \\ 2 - 1 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{т.е. } M_1 \notin l.$$

Для нахождения канонических уравнений нужно знать точку прямой и направляющий вектор. Для нахождения точки возьмём $x_0 = 0$ и из системы найдем $y_0 = -1$, $z_0 = 2$ (получили точку M_0). В качестве направляющего вектора в соответствии с изложенным в лекции 32 возьмём вектор $\overline{s} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, где $\overline{N_1} = (1, 1, -1)$ и $\overline{N_2} = (2, -1, 0)$ нормальные векторы данных плоскостей:

$$\overline{s} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \overline{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Окончательно канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-3} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Пример 31.4. *Напишите параметрические уравнения прямой из примера 31.3.*

Р е ш е н и е: Обозначим общее значение дробей в канонических уравнениях прямой через t:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} = t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = t, \\ \dfrac{y+1}{2} = t, \\ \dfrac{z-2}{3} = t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + 3t. \end{cases}$$

Пример 31.5. *Найдите угол между прямыми l_1 и l_2:*

$$l_1: \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}, \qquad l_2: \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Р е ш е н и е: Выпишем координаты направляющих векторов прямых: $\overline{s_1} = (2,3,2)$, $\overline{s_2} = (-3,1,0)$ и по формуле (31.12) получим:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{|\overline{s_1}||\overline{s_2}|} = \frac{2\cdot(-3)+3\cdot 1+2\cdot 0}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{170}}.$$

Пример 31.6. *Найдите угол между прямой l и плоскостью α:*

$$l: \quad \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}; \qquad \alpha: \quad 3x - y + 2z - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е: Выписав координаты направляющего вектора прямой $\overline{s} = (2,3,1)$ и нормального вектора плоскости $\overline{N} = (3,-1,2)$, в соответствии с формулой (31.19) имеем:

$$\sin\varphi = \frac{\overline{s}\cdot\overline{N}}{|\overline{s}||\overline{N}|} = \frac{2\cdot 3+3\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{5}{14},$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{5}{14}\right).$$

Пример 31.7. *Найдите точку пересечения прямой l и плоскости α из задачи 31.6.*

Р е ш е н и е: Запишем уравнения прямой l из примера 31.6 в параметрическом виде:

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = t, \\ \dfrac{y+1}{3} = t, \\ \dfrac{z-1}{1} = t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости и найдем значение параметра t, удовлетворяющее уравнению плоскости:

$$3 \cdot 2t - (-1 + 3t) + 2(1 + t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{5}.$$

Из параметрических уравнений прямой находим:

$$\begin{cases} x = 2\left(-\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{4}{5}, \\ y = -1 + 3\left(-\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{11}{5}, \\ z = 1 + \left(-\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Итак, точка с этими координатами принадлежит одновременно прямой и плоскости, т.е. является точкой их пересечения.

Ответ: $M\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{11}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$.

Пример 31.8. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую* $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{1}$ *и точку* $M(1, 1, 2)$.

Р е ш е н и е: Проще всего решить эту задачу, выбрав две точки M_0 и M_1 прямой и написав уравнение плоскости, проходящей через три точки M, M_0, M_1. В качестве точки M_0 удобно взять точку, задаваемую каноническими уравнениями прямой: $M_0(0, 1, 0)$. Для нахождения другой точки M_1 запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = t, \\ \dfrac{y-1}{3} = t, \\ \dfrac{z}{1} = t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = t. \end{cases}$$

Подставляя какое-нибудь значение $t \notin 0$, например, $t = 1$, получаем координаты точки M_1: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $z_1 = 1$, т.е. $M_1(2, 4, 1)$. Наконец, уравнение плоскости через три точки M, M_1, M_2 имеет вид (30.6):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2, \\ 0-1 & 1-1 & 0-2, \\ 2-1 & 4-1 & 1-2, \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2, \\ -1 & 0 & -2, \\ 1 & 3 & -1. \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - y - z + 1 = 0.$$

Можно также решить эту задачу с помощью пучка плоскостей, как это изложено с конце п. 31.5. Выбрав две плоскости, задающие прямую:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3}, \\ \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0, \\ y - 3z - 1 = 0, \end{cases}$$

Напишем уравнение пучка плоскостей:

$$3x - 2y + 2 + \lambda(y - 3z - 1) = 0.$$

Значение λ определим из условия принадлежности точки $M(1;1;2)$ плоскости. Подставим координаты точки M :

$$3 - 2 + 2 + \lambda(1 - 6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Уравнение искомой плоскости получается из уравнения пучка плоскостей при $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$3x - 2y + 2 + \frac{1}{2}(y - 3z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z - 1 = 0.$$

Пример 31.9. *Найдите уравнение и длину медианы треугольника ABC, выходящей из вершины A, если $A(1;2;-1)$, $B(1;-2;-2)$, $C(3;4;0)$.*

Р е ш е н и е: Найдем координаты другого конца медианы из вершины A, т.е. середину отрезка BC:

$$M\left(\frac{1+3}{2}; \frac{-2+4}{2}; \ \frac{-2+0}{2}\right), \text{ т.е. } M(2;1;1).$$

Уравнение медианы AM получается как уравнение прямой через две точки (31.10):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z+1}{-1+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0}.$$

Длина медианы определяется по формуле (28.6):

$$d = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{2}.$$

Пример 31.10. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через пересечение плоскости $\alpha_1: \ x+y+5z-1=0$, $\alpha_2: \ 2x+3y-z+2=0$ и через точку $M(3,2,1)$.*

Р е ш е н и е: Проверив, что $M \notin \alpha_2$, напишем уравнение (31.23) пучка плоскостей, задаваемого плоскостями α_1 и α_2:

$$(x+y+5z-1)+\lambda(2x+3y-z+2)=0.$$

Подставив в это уравнение координаты точки M, найдем $\lambda: \ 3+2+ + 5 -1 + \lambda(6+6-1+2)=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{13}$, т. е. уравнение искомой плоскости пучка:

$$(x+y+5z-1)-\frac{9}{13}(2x+3y-z+2)=0$$

или $5x+14y-74z+31=0$.

Пример 31.11. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через пересечение плоскостей $\alpha_1: \ x+3y+5z-4=0$ и $\alpha_2: \ x-y-2z+7=0$ и параллельной оси Oy.*

Р е ш е н и е: В соответствии с изложенным в пункте 6.4.2, если плоскость параллельна оси Oy, то коэффициент B в общем уравнении плоскости равен 0. Напишем уравнение пучка плоскостей, задаваемого α_1 и α_2:

$$(x+3y+5z-4)+\lambda(x-y-2z+7)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при y, находим $\lambda: 3-\lambda=0 \Rightarrow \Rightarrow \lambda=3$. Подставляя найденные значения λ в уравнение пучка, получаем уравнение плоскости: $4x-z+17=0$.

Самостоятельная работа

Пример 31.12. *Напишите уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,-1,1)$ параллельно плоскостям $\alpha_1: \quad 2x-y+z-1=0$ и $\alpha_2: \quad x-z = 0$.*

Пример 31.13. *Напишите уравнения прямой, проходящей через $M(0;1;2)$ перпендикулярно векторам $\overline{a}=(1;2;-3)$, $\overline{b}=(-3;-2;1)$.*

Пример 31.14. *Определите направляющие косинусы прямой:*

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Пример 31.15. *Найдите координаты проекции точки* $M(2, 1, 3)$ *на плоскость* $x + 2y - z + 5 = 0$.

Пример 31.16. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую* $l: \quad \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ *перпендикулярно плоскости* $\alpha: \quad x + 4y - 3z + 1 = 0$.

Лекция 32. Понятие n-мерного векторного пространства

Понятие n-мерного вектора. Линейное отображение. Преобразование координат. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

32.1. Понятие n-мерного вектора

Как отмечалось в лекции 29, вектор в пространстве определяется тройкой чисел – его координатами: $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Если вектор лежит на плоскости, то он определяется парой чисел: $\overline{a} = (a_1, a_2)$. Для дальнейшего удобно координаты обозначать x_1, x_2, x_3. Вектор $\overline{a} = (x_1; x_2)$ называется двумерным, а вектор $\overline{a} = (x_1; x_2; x_3)$ – трёхмерным. Понятие n-мерного вектора вводится аналогично.

Определение 32.1. *Система n действительных чисел $x_1, ..., x_n$, заданных в определённом порядке, называется n-мерным вектором. Будем записывать n-мерный вектор следующим образом: $\overline{a} = (x_1; ...; x_n)$. Числа $x_1, ..., x_n$ называются координатами вектора.*

Вектор, у которого все координаты равны нулю, называется нуль-вектором, или просто нулём: $\overline{0} = (0; 0; ...; 0)$.

Вектор $(-x_1; -x_2; ...; -x_n)$ называют противоположным вектору $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и обозначают $-\overline{a}$.

Пример 32.1. *Рассмотрим систему линейных уравнений:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть набор значений $x_1 = \alpha_1; x_2 = \alpha_2; ...; x_n = \alpha_n$ является решением данной системы. Это решение можно рассматривать как n-мерный вектор $\overline{x} = (\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n)$. Набор значений свободных членов $b_1; b_2; ...; b_m$ можно рассматривать как m-мерный вектор $\overline{b} = (b_1; b_2; ...; b_m)$.

Определение 32.2. *Два вектора $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_m)$ и $\overline{b} = (y_1; y_2; ...; y_m)$ называются равными: $\overline{a} = \overline{b}$, если равны их соответствующие координаты, т.е. $x_i = y_i (i = 1, 2, ..., n)$.*

Как известно, линейные операции над векторами на плоскости и в пространстве можно заменить соответствующими арифметическими действиями над их координатами. По аналогии введем линейные операции над n-мерными векторами.

Определение 32.3. *Суммой двух векторов $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $\overline{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ называют новый вектор*

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n), \tag{32.1}$$

а их разностью – вектор

$$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = (x_1 - y_1; x_2 - y_2; ...; x_n - y_n). \tag{32.2}$$

Произведением вектора $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ на число λ называют вектор

$$\lambda\overline{a} = \{\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n\}. \tag{32.3}$$

Линейные операции над n-мерными векторами обладают свойствами, установленными для линейных операций над векторами на плоскости и в пространстве.

Определение 32.4. *Множество всех n-мерных векторов, для которых установлены операции сложения и умножения на число, называется арифметическим векторным пространством и обозначается R_n.*

Векторы $\overline{a_1} = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \ldots; x_n^{(1)}), \overline{a_2} = (x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \ldots; x_n^{(2)}), ...,$ $\overline{a_k} = (x_1^{(k)}; x_2^{(k)}; ...; x_n^{(k)})$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_k$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_k\overline{a_k} = 0. \tag{32.4}$$

Равенство (32.4) равносильно аналогичным равенствам для координат вектора:

$$\lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + ... + \lambda_k x_i^{(k)} = 0. \tag{32.5}$$

Здесь нижний индекс означает координаты, а верхний – номер вектора $(i = 1, 2, 3, ..., n)$.

Пример 32.2. *Четырёхмерные векторы* $\overline{a}_1 = (2; 3; 4; 5)$, $\overline{a}_2 = (1; -2; 2; -1)$ *и* $\overline{a}_3 = (6; 2; 12; 8)$ *линейно зависимы, так как имеет место равенство* $2\overline{a}_1 + 2\overline{a}_2 - \overline{a}_3 = 0$. *Действительно, для соответствующих координат имеют место аналогичные равенства. Например, для первых координат:* $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 = 0$*; для вторых координат:* $2 \cdot 3 + 2(-2) + (-1) \cdot 2 = 0$ *и т.д.*

Определение 32.5. *Максимальное число линейно независимых векторов называется размерностью векторного пространства.*

Можно показать, что в пространстве R_n существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Таким образом, пространство R_n имеет размерность n. Поэтому оно называется арифметическим n-мерным пространством. В частности, совокупность векторов плоскости образует арифметическое двумерное пространство R_2, а совокупность векторов пространства – арифметическое трёхмерное пространство R_3.

Определение 32.6. *Базисом векторного n-мерного пространства называют любую совокупность, состоящую из n линейно независимых векторов этого пространства.*

Таким образом, число векторов базиса совпадает с его размерностью. Одним из базисов пространства R_n являются векторы

$$\overline{e_1} = \{1; 0; 0; ...; 0\}, \overline{e_2} = \{0; 1; 0; ...; 0\}, ..., \overline{e_n} = \{0; 0; 0; ...; 1\}.$$

Заметим, что кроме указанного базиса в n-мерном векторном пространстве существует бесчисленное множество других базисов.

Как и в случае 3-мерного векторного пространства, имеет место следующее утверждение, которое примем без доказательства.

Теорема 32.1. *Всякий вектор n-мерного пространства единственным образом может быть представлен в виде линейной комбинации векторов его базиса.*

Определение 32.7. *Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются координатами вектора в данном базисе, а равенство (32.6) называется разложением вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$:*

$$\overline{a} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_n\overline{a_n} = 0. \tag{32.6}$$

Определим координаты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ вектора в базисе $\overline{e_1} = (1; 0; 0; ...; 0)$, $\overline{e_2} = (0; 1; 0; ...; 0), ..., \overline{e_n} = (0; 0; ...; 0; 1)$.

В этом случае по формуле (32.6) имеем: $\overline{a} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + ... + \lambda_n\overline{a_n}$, или в координатах:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + ... + \lambda_2 \cdot 0, \\ x_2 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + ... + \lambda_2 \cdot 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + ... + \lambda_2 \cdot 1. \end{cases}$$

Следовательно: $\lambda_1 = x_1, \lambda_2 = x_2, ..., \lambda_n = x_n$. Итак, в пространстве R_n для n-мерного вектора $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ числа $x_1; x_2; ...; x_n$ являются его координатами в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$.

Следует отметить, что n-мерное векторное пространство является частным случаем так называемого "линейного векторного пространства", в котором векторы будут иметь свойства, аналогичные изложенным в лекциях 28, 29.

Для n-мерных векторов можно ввести операцию скалярного произведения и понятие угла между векторами аналогично тому, как это сделано в лекции 29.Если даны два вектора $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $\overline{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n)$. Скалярное произведение будет обладать свойствами, аналогичными изложенным в лекции 29 для трёхмерных векторов.

32.2. Линейные отображения

Пусть в плоскости Q задана прямоугольная система координат. Для упрощения записи и удобства преобразований координаты точек будем обозначать не x и y, а через x_1 и x_2 или y_1 и y_2 и т.д., а основные орты вместо $\overline{i}$ и $\overline{j}$ – через $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$.

Рассмотрим уравнения, связывающие переменные x_1 и x_2 с переменными y_1 и y_2:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{32.7}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$-постоянные.

Каждой точке M плоскости Q с координатами x_1 и x_2 соответствует в этой же плоскости единственная точка N, координаты которой y_1 и y_2 определяются соотношениями (32.7).

Определение 32.8. *Точка N называется образом точки M. Если точка M описывает в плоскости Q некоторую линию L, то её образ описывает, вообще говоря, также некоторую линию λ. Как говорят, с помощью уравнений (32.7) устанавливается отображение или преобразование плоскости Q в себя.*

В связи с тем, что правые части уравнений (32.7) имеют первую степень относительно x_1 и x_2, это отображение называется линейным. В заданной системе координат Ox_1x_2 линейное отображение вполне характеризуется квадратной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов линейного отображения (32.7).

Если ввести матрицы-столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, то систему уравнений (32.7) можно записать в следующей матричной форме:

$$Y = AX. \tag{32.8}$$

Определение 32.9. *Матрица A называется матрицей линейного отображения, а её определитель $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – определителем линейного отображения.*

Линейное отображение называется невырожденным (или аффинным), если его матрица невырожденная, т.е. если $|A| \neq 0$. Если же $|A| = 0$, то отображение называется вырожденным.

При аффинном отображении система (32.7) однозначно разрешима относительно x_1 и x_2. По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}}{|A|}y_1 - \frac{a_{12}}{|A|}y_2.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{a_{21}}{|A|}y_1 + \frac{a_{11}}{|A|}y_2.$$

Итак,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}}{|A|}y_1 - \dfrac{a_{12}}{|A|}y_2, \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{|A|}y_1 + \dfrac{a_{11}}{|A|}y_2. \end{cases} \tag{32.9}$$

Уравнения (32.9) показывают, что, обратно, каждой точке $N(y_1; y_2)$ соответствует единственная точка $M(x_1; x_2)$, а именно та точка M, образом которой является точка N. Таким образом, аффинное отображение определяет взаимно однозначное отображение плоскости Q в себя. Из равенств (32.9) следует, что обратное отображение также аффинно, а его матрица есть матрица, обратная матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22}/\,|A| & -a_{12}/\,|A| \\ -a_{21}/\,|A| & +a_{11}/\,|A| \end{pmatrix}.$$

К формулам (32.9) можно также прийти, если умножить обе части матричного уравнения (32.8) на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX.$$

Так как $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ и $EX = X$, то $A^{-1}Y = X$. Итак,

$$X = A^{-1}Y. \tag{32.10}$$

Очевидно, тождественному отображению

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2 \end{cases} \tag{32.11}$$

соответствует единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 32.3. *Линейное отображение*

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2 \end{cases} \tag{32.12}$$

является аффинным, так как матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *имеет определитель* $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, *отличный от нуля. Обратное отображение получим, разрешая систему (32.12) относительно* x_1 *и* x_2*:*

$$\begin{cases} x_1 = 5y_1 - 3y_2, \\ x_2 = -3y_1 + 2y_2. \end{cases} \tag{32.13}$$

Это отображение имеет матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Образ точки $M(1;2)$ *есть точка* N *с координатами* $y_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$, $y_2 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$. *Образом прямой* $L: x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ *служит прямая* λ, *уравнение которой получится, если в уравнение* $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ *подставим выражения* x_1 *и* x_2 *через* y_1 *и* y_2 *по формулам (32.13):*

$$(5y_1 - 3y_2) + 2(-3y_1 + 2y_2) - 2 = 0, \textit{ или } \quad -y_1 + y_2 - 2 = 0.$$

Можно доказать, что в общем случае при аффинном отображении образом прямой является прямая.

Пример 32.4. *Линейное отображение*

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 = 4x_1 + 6x_2 \end{cases} \tag{32.14}$$

вырожденное: его матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

имеет определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix},$$

равный нулю. Это отображение не имеет обратного и не устанавливает взаимно однозначного отображения плоскости в себя. Действительно, из соотношений (32.7) легко видеть, что любая точка M *прямой* $2x_1 + 3x_2 = 0$ *имеет своим образом начало координат, так как* $y_1 = 2x_1 + 3x_2$ *и* $y_2 = 4x_1 + 6x_2 = 2(2x_1 + 3x_2) = 2 \cdot 0 = 0$.

Пример 32.5. *Линейное отображение*

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = -x_2 \end{cases}$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *невырожденное. При этом образом каждой точки* $M(x_1; x_2)$ *является точка* N*, симметричная относительно оси* Ox_1 *(зеркальное отображение). Так, например, образ точки* $M(1; 2)$ *есть точка* $N(1; -2)$.

Пусть $\overline{OM}$-радиус-вектор точки $M(x_1; x_2)$: $\overline{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Отображение (32.7) ставит ему в соответствие радиус-вектор $\overline{ON}$ точки N, являющейся образом точки M : $\overline{ON} = y_1 e_1 + y_2 e_2$. Проекции x_1, x_2 и y_1, y_2 этих векторов связаны формулами (32.7).

В заключение отметим, что в случае пространства $Ox_1x_2x_3$, введя матрицы столбцы и матрицу отображение:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

для невырожденного отображения ($|A| \neq 0$) получим уравнения, аналогичные (32.8), (32.10):

$$Y = AX, \quad X = A^{-1}Y.$$

При аффинном отображении пространства, как можно показать, образом плоскости является плоскость, а образом прямой – прямая.

32.3. Преобразование координат

Рассмотрим в плоскости Q прямоугольную систему координат Ox_1x_2 с ортами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$. Наряду с системой координат Ox_1x_2, которую будем называть старой, рассмотрим новую систему координат $Ox'_1x'_2$ с ортами $\overline{e}'_1$ и $\overline{e}'_2$. Начала координат старой и новой систем совпадают (рис 168).

Возьмём в плоскости Q произвольную точку M. Пусть x_1, x_2 – её координаты в старой системе, а x'_1, x'_2 – в новой. Найдем связь между старыми и новыми координатами. Для этого разложим радиус-вектор $\overline{OM}$ точки M на составляющие по ортогональным базисам $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ и $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$:

$$\overline{OM} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2, \quad \overline{OM} = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2.$$

Таким образом,

$$x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2. \tag{32.15}$$

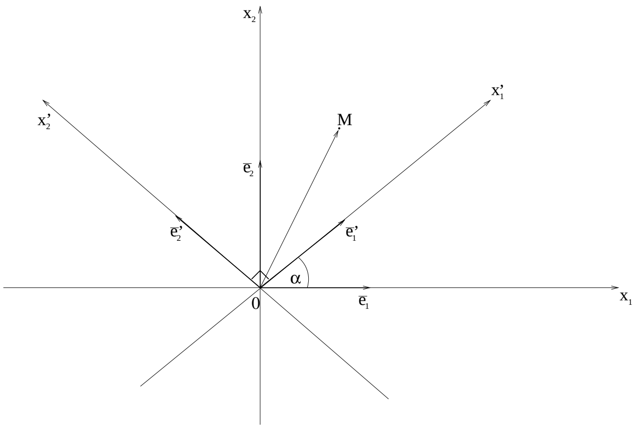


Рис. 168. *Преобразование координат*

Обозначим скалярные произведения ортов:

$$\alpha_{11} = \overline{e}_1\overline{e}'_1; \quad \alpha_{12} = \overline{e}_1\overline{e}'_2; \quad \alpha_{21} = \overline{e}_2\overline{e}'_1; \quad \alpha_{22} = \overline{e}_2\overline{e}'_2.$$

Можно показать, что из векторного равенства (32.15) следует равенство для координат:

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x'_1 + d_{12}x'_2, \\ x_2 = d_{21}x'_1 + d_{22}x'_2. \end{cases} \tag{32.16}$$

Формулы (32.16) называются формулами преобразования координат на плоскости, а матрица

$$L = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \tag{32.17}$$

– матрицей преобразования.

Рассмотрим матрицы-столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$. Тогда преобразование координат (32.16) в матричной форме запишется в виде

$$X = LX'.$$

Матрица L обладает рядом интересных свойств: сумма квадратов элементов строки (или столбца) равна единице, сумма парных произведений элементов строки (столбца) равна нулю. Матрица, обладающая этими свойствами, называется ортогональной.

Рассмотрим транспонированную матрицу $L_T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}$, которая получается из матрицы L заменой строк столбцами. Составим произведение матриц $L_T L$. Учитывая вышеперечисленные свойства матрицы L, получим

$$L_T L = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}^2 + d_{21}^2 & d_{11}d_{12} + d_{21}d_{22} \\ d_{12}d_{11} + d_{22}d_{21} & d_{12}^2 + d_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \tag{32.18}$$

Таким образом, матрица L_T является обратной по отношению к матрице L, т.е. $L_T = L^{-1}$.

Замечание. Если новая система координат получена из старой системы поворотом осей на угол α, то легко видеть, что формулы (32.16) аналогичны формулам поворота осей координат, рассмотренным в лекции 2.

Пусть теперь в старой системе координат Ox_1x_2 задано линейное отображение (32.8) плоскости Q в себя: $Y = AX$, которое точку $M(x_1; x_2)$ переводит в точку $N(y_1; y_2)$.

Если обозначить X' и Y'-матрицы столбцы координат этих точек в новой системе координат ($X = LX'$), то можно показать, что эти координаты связаны формулой :

$$Y' = L^{-1}ALX'. \tag{32.19}$$

Другими словами, если в новой системе координат точка $M(x_1'; x_2')$ переходит в точку $N(y_1'; y_2')$, то это отображение и в новой системе координат будет линейным отображением с матрицей $A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix}$: $Y' = A'X'$ и матрица этого отображения связана со старой матрицей соотношением: $A' = L^{-1}AL$.

Все, сказанное для плоскости легко переносится на случай трёхмерного пространства.

32.4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичной формой двух переменных x_1 и x_2 называется многочлен второй степени:

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{32.20}$$

Заметим, что слагаемые второго порядка, стоящие в начале общего уравнения кривой второго порядка, образуют квадратичную форму. Наша цель сейчас: подобрать такое преобразование координат x_1, x_2, чтобы в квадратичной форме исчез член с произведением координат.

Прежде всего, запишем квадратичную форму в матричном виде. Полагая $a_{12} = a_{21}$, перепишем (32.20):

$$F(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_2.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется матрицей квадратичной формы. Введя матрицу-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и транспонированную ей матрицу-строку $X_T = (x_1; x_2)$, из последнего равенства видим, что квадратичную форму (32.20) можно записать в матричном виде:

$$F(x_1, x_2) = X_T A X. \tag{32.21}$$

Проверьте это самостоятельно, проведя требуемые операции над матрицами.

Будем трактовать переменные x_1 и x_2 как координаты точек в прямоугольной системе координат Ox_1x_2. Рассмотрим новую систему координат $Ox'_1x'_2$. Пусть координаты точек в старой и новой системах связаны между собой формулами преобразования (32.16):

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2, \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2. \end{cases}$$

с ортогональной матрицей преобразования $L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Формулы преобразования (32.16) можно записать в следующей матричной форме:

$$X = LX'. \tag{32.22}$$

Здесь $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$.

Если вместо x_1 и x_2 в квадратичную форму (32.20) подставить их выражения 32.16 через x_1' и x_2', то получим квадратичную форму переменных x_1' и x_2': $F(x_1', x_2')$.

Поставим перед собой задачу: выбрать новую систему координат $Ox_1'x_2'$ так, чтобы в квадратичной форме $F(x_1', x_2')$ отсутствовал член с произведением координат, иными словами, чтобы она приняла следующий вид:

$$F(x_1', x_2') = \lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2, \tag{32.23}$$

который называется каноническим.

Для сокращения записи преобразования будем проводить в матричной форме. Рассмотрим прежде всего матрицу-строку $X' = (x_1' \; x_2')$. Легко убедиться, что имеет место следующее равенство:

$$X_T = {X'}_T L^{-1}. \tag{32.24}$$

Подставим в правую часть равенства (32.21) выражения X_T и X из равенств (32.24) и (32.22):

$$F(x_1', x_2') = {X'}_T (L^{-1} A L) X'.$$

Выберем теперь новую систему координат $Ox_1'x_2'$ так, чтобы матрица A приняла следующую форму:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае говорят, что матрица приведена к диагональному виду. При этом квадратичная форма $F(x_1', x_2')$ запишется в виде (32.23).

Итак, новую систему координат надо выбрать таким образом, чтобы матрица L преобразования удовлетворяла соотношению

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = L^{-1} A L.$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу L:

$$L \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = L L^{-1} A L = E A L = A L.$$

Итак, матрица L преобразования удовлетворяет условию

$$L \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A L.$$

Так, как

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

и

$$AL = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, на основании определения матриц, получаем

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21}, \\ \alpha_{21}\lambda_1 = a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21}. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \alpha_{12}\lambda_2 = a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22}, \\ \alpha_{22}\lambda_2 = a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha_{11}(a_{11} - \lambda_1) + \alpha_{21}a_{12} = 0, \\ \alpha_{11}a_{21} + \alpha_{21}(a_{22} - \lambda_1) = 0; \end{cases} \tag{32.25}$$

и

$$\begin{cases} \alpha_{12}(a_{11} - \lambda_1) + \alpha_{22}a_{12} = 0, \\ \alpha_{12}a_{21} + \alpha_{22}(a_{22} - \lambda_1) = 0. \end{cases} \tag{32.26}$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты преобразования α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} находятся из систем уравнений (32.25) и (32.26). Каждая из этих систем является однородной. Для того чтобы они имели отличные от нуля решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель каждой из этих систем был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, числа λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{32.27}$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{32.28}$$

Дискриминант D этого квадратного уравнения всегда неотрицателен. Действительно,

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2,$$

так как $a_{12} = a_{21}$. Итак, уравнение (32.27) всегда имеет действительные корни. Оно называется характеристическим уравнением матрицы A.

Определение 32.10. *Корни λ_1 и λ_2 этого уравнения называются собственными значениями матрицы A.*

Подставляя найденные из уравнения (32.27) значения λ_1 и λ_2 в системы (32.25) и (32.26) и решая их, найдем коэффициенты преобразования координат $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$.

Пример 32.6. *Привести к каноническому виду квадратичную форму*

$$F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Р е ш е н и е: Здесь $a_{11} = 5, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22} = 2$. Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение (32.27): $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, откуда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$. Таким образом, заданная квадратичная форма приводится к каноническому виду $F(x_1, x_2) = {x'_1}^2 + 6{x'_2}^2$.

Замечание. Квадратичная форма трёх переменных x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \tag{32.29}$$

Матрицей этой квадратичной формы называется матрица третьего порядка

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, в которой $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$. Матрица A в этом случае называется симметрической.

Квадратичную форму трёх переменных можно привести к виду

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1{x'_1}^2 + \lambda_2{x'_2}^2 + \lambda_3{x'_3}^2, \tag{32.30}$$

где числа λ_1, λ_2 и λ_3 всегда действительны и удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если за новую систему координат выбрать ту, в которой квадратичная форма $F(x_1', x_2') = \lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2$, то в этой системе координат, как было показано выше, матрица A' имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, и формулы линейного преобразования (32.7) в системе координат $Ox_1'x_2'$ запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 x_1' + 0 \cdot x_2', \\ y_2' = 0 \cdot x_1' + \lambda_2 x_2'. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 x_1', \\ y_2' = \lambda_2 x_2'. \end{cases} \tag{32.31}$$

Рассмотрим в новой системе координат $Ox_1'x_2'$ точки $M_1(1;0)$, $M_2(0;1)$. Очевидно, что $\overline{OM_1} = \overline{e}_1'$ и $\overline{OM_2} = \overline{e}_2'$. В силу формул (32.31) образами точек M_1 и M_2 служат соответственно точки $Q_1(\lambda_1;0)$ и $Q_2(0;\lambda_2)$. Вектор $\overline{OQ_1} = \lambda_1\overline{e}_1'$ есть образ вектора $\overline{OM_1} = \overline{e}_1'$, а вектор $\overline{OQ_2} = \lambda_2\overline{e}_2'$ образ вектора $\overline{OM_2} = \overline{e}_2'$.

Итак, при линейном отображении (32.31) векторы $\overline{e}_1'$ и $\overline{e}_2'$ преобразуются в соответственно коллинеарные векторы $\lambda_1\overline{e}_1'$ и $\lambda_2\overline{e}_2'$.

Определение 32.11. *Если при некотором линейном отображении существует не равный нулю вектор $\overline{r}$, образом которого является коллинеарный ему вектор $\lambda_1\overline{r}$, то вектор $\overline{r}$ называется собственным вектором этого линейного отображения, а число λ – собственным значением отображения.*

Таким образом, векторы $\overline{e}_1'$ и $\overline{e}_2'$ являются собственными векторами линейного отображения (32.31).

В заключении разберем несколько примеров.

Пример 32.7. *Напишите формулы, выражающие новые переменные y_1, y_2 через старые x_1, x_2 для данной матрицы A линейного преобразования. В какую точку $N(y_1;y_2)$ перейдет при этом преобразовании данная точка $M(x_1;x_2)$?*

$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}, M(1;2)$.

Р е ш е н и е: Запишем систему уравнений (32.7), связывающую новые переменные со старыми ($Y = AX$):

$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$

Для данной матрицы А получаем:

$\begin{cases} y_1 = 11x_1 + 12x_2, \\ y_2 = 21x_1 + 22x_2. \end{cases}$

Поставим сюда координаты точки $M(1;2)$,получаем $y_1 = 35$, $y_2 = 65$.

Ответ: $N(35;65)$.

Пример 32.8. *Найдите старые координаты x и y точки M, зная её новые координаты X и Y при повороте осей на угол α:*

$X = 1, Y = 2, \alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Р е ш е н и е: По формулам (2.12) получим:

$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha = 1\cos\dfrac{\pi}{6} - 2\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$;

$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha = 1\sin\dfrac{\pi}{6} + 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}, y = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$.

Пример 32.9. *Приведите к каноническому виду данное уравнение кривой второго порядка, определите вид кривой и её параметры.*

$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$

Р е ш е н и е: В соответствии с изложенным в лекции 34, составим характеристическое уравнение (32.27).

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для данной кривой $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 1$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2,\; \lambda_2 = 4.$

Подставляя найденные значения в системы (32.25) и (32.26), получаем:

$$\begin{cases} \alpha_{11}(1-(-2)) + \alpha_{21}\cdot 3 = 0, \\ \alpha_{11}\cdot 3 + \alpha_{21}(1-(-2)) = 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \alpha_{12}(1-4) + \alpha_{22}\cdot 3 = 0, \\ \alpha_{12}\cdot 3 + \alpha_{22}(1-4) = 0. \end{cases}$$

решая которые получаем: $\alpha_{11} = -\alpha_{21}$, $\alpha_{22} = \alpha_{12}$, например: $\alpha_{21} = 1$, $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{12} = 1 = \alpha_{22}$. Матрица преобразования координат L имеет вид:

$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а формулы преобразования координат (32.16)

$$\begin{cases} x = -x' + y', \\ y = x' + y'. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение кривой, получаем:
$(y' - x')^2 + 6(y'^2 - x'^2) + (x' + y')^2 + 6y' - x' + 2(x' + y') - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4x'^2 + 8y'^2 - 4x' + 8y' - 1 = 0.$

Заметим, что полученное линейное преобразование уничтожившее слагаемое с произведением xy, есть не что иное, как поворот системы координат (см. лекцию 2). Для получения канонического уравнения кривой, выделим полный квадрат, как это делалось в примере указанной лекции:

$$-4x'^2 + 8y'^2 - 4x' + 8y' - 1 = 0 \Leftrightarrow -4(x'^2 + x' + \frac{1}{4}) + 8(y'^2 + y' + \frac{1}{4}) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(x' + \frac{1}{2})^2 + 4(y' + \frac{1}{2})^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(y' + \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(x' + \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Сделав замену координат: $X = x' + \dfrac{1}{2}$, $Y = y' + \dfrac{1}{2}$, в новых координатах X, Y получим каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{Y^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{X^2}{\frac{1}{2}} = 1.$
Заметим, что последняя замена координат есть параллельный перенос системы координат. Резюмируя вышесказанное, мы получили каноническое уравнение кривой второго порядка, расположив нужным образом систему координат.

Ответ: гипербола $\dfrac{Y^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{X^2}{\frac{1}{2}} = 1.$

Пример 32.10. *Приведите к каноническому виду данное уравнение второго порядка, определите вид линии, которое оно определяет, и её параметры:* $xy - 2x - 3y + 6 = 0$.

Р е ш е н и е: Для данного уравнения $a_{11} = 0$, $a_{12} = a_{21} = \dfrac{1}{2}$, $a_{22} = 0$, характеристическое уравнение имеет вид: $\begin{vmatrix} -\alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{2}$.
Подставляя найденные значения в системы (32.25) и (32.26), получаем:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha_{11} + \frac{1}{2}\alpha_{21} = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{21} = 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_{12} + \frac{1}{2}\alpha_{22} = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{22} = 0, \end{cases},$$

решая которые найдем: $\alpha_{11} = \alpha_{21}$, $\alpha_{22} = -\alpha_{12}$.

Например: $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{12} = 1$, $\alpha_{22} = -1$. Матрица преобразования имеет вид: $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а формулы (32.16) преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x' + y', \\ y = x' - y'. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение линии, получаем:
$(x'+y')(x'-y') - 2(x'+y') - 3(x'-y') + 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ x'^2 - y'^2 - 5x' + y' + 6 = 0$.

Полученное линейное преобразование, уничтожившее член с произведением xy, есть поворот системы координат. Для получения канонического уравнения выделим полный квадрат: $(x'^2 - 5x' + \dfrac{25}{4}) - -(y'^2 - y' + \dfrac{1}{4}) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x' - \dfrac{5}{2})^2 - (y' - \dfrac{1}{2})^2 = 0$. Сделав замену координат: $X = x' - \dfrac{5}{2}$, $Y = y' - \dfrac{1}{2}$, в новых координатах X и Y получим каноническое уравнение пары прямых: $X^2 - Y^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (X - Y)(X + Y) = 0$ или, в более привычной форме: $Y = X$ и $Y = -X$. Последняя замена координат есть параллельный перенос системы координат.

Ответ: пересекающиеся прямые $Y = X$ и $Y = -X$.

Практическое занятие 32. Контрольная работа по материалу лекций 27–31

Возможный вариант контрольной работы

Пример 32.1. *Найти проекцию вектора* $\overline{AB}$ *на направление вектора* $2\overline{a}-3\overline{b}$, *если* $A(1;2;0)$, $B(-2;2;1)$, $\overline{a}=(2;1;3)$, $\overline{b}=(0;2;1)$.

Пример 32.2. *Найти площадь* ΔABC, *если* $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(1;1;-1)$.

Пример 32.3. *Определить направляющие косинусы прямой* l

$$l:\begin{cases}4x-y-z+12=0,\\ y-z-2=0.\end{cases}$$

Пример 32.4. *Найти проекцию точки* $M(1;0;0)$ *на плоскость* $\alpha:$ $x+y+z+1=0$.

Решение примеров варианта контрольной работы

Пример 32.1. *Имеем* $A(1;2;0)$, $B(-2;2;1)$, $\overline{a}=(2;1;3)$, $\overline{b}=(0;2;1)$.

Решение: $\text{Пр}_{2\overline{a}-3\overline{b}}\overline{AB}=\dfrac{\overline{AB}(2\overline{a}-3\overline{b})}{|2\overline{a}-3\overline{b}|}$. $\overline{AB}=(-3;0;1)$, $2\overline{a}-3\overline{b}=(4;-4;3)$.

$$\text{Пр}_{2\overline{a}-3\overline{b}}\overline{AB}=\frac{-12+0+3}{\sqrt{16+16+9}}=-\frac{9}{\sqrt{41}}\approx-1{,}4.$$

Пример 32.2. *Имеем точки* $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(1;1;-1)$.

Решение:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|.\quad \overline{AB}=(1;-3;-3),\quad \overline{AC}=(0;-1;-4).$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\1&-3&-3\\0&-1&-4\end{vmatrix}=9\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{81+16+1}=\frac{\sqrt{98}}{2}\approx4{,}9.$$

Пример 32.3. *Прямая*

$$l:\begin{cases}4x-y-z+12=0,\\ y-z-2=0.\end{cases}\quad \cos\alpha=?,\ \cos\beta=?,\ \cos\gamma=?$$

Р е ш е н и е: В примере 31.1 лекции 31 найден направляющий вектор этой прямой: $\overline{S} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$. Найдем его модуль и сонаправленный единичный вектор $|\overline{S}| = \sqrt{4+16+16} = 6$

$$\overline{e}_S = \frac{\overline{S}}{|\overline{S}|} = \frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}.$$

Координаты этого единичного вектора являются его направляющими косинусами, т.е. направляющими косинусами прямой l:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Пример 32.4. *Имеем* $M(1;0;0)$, $\alpha:\ x+y+z+1=0$.

Р е ш е н и е: Напишем параметрические уравнения проектирующей прямой l, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости α. Её направляющим вектором будет нормальный вектор плоскости $\overline{N} = (1;1;1)$, поэтому параметрические уравнения l имеют вид:

$$l = \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t, \\ z = t. \end{cases}$$

Найдем точку пересечения прямой l и плоскости α:

$1 + t + t + t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}, \quad y = -\dfrac{2}{3}, \quad z = -\dfrac{2}{3}.$

Искомая проекция имеет координаты $M'\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Самостоятельная работа

Пример 32.5. *Даны векторы* $\overline{a} = (4;-2;-4)$ *и* $\overline{b} = (6;-3;2)$. *Найдите* $(2\overline{a} - 3\overline{b}) \cdot (\overline{a} + 2\overline{b})$.

Пример 32.6. *Определите принадлежат ли точки A, B, C, D одной плоскости, если* $A(3;1;1)$, $B(-2;1;-2)$, $C(-3;-1;0)$, $D(2;0;17)$.

Пример 32.7. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую*
$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ *параллельно прямой* $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

Пример 32.8. *Напишите уравнение перпендикуляра опущенного из точки* $M(0;1;2)$ *на прямую* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$.

ГЛАВА VI

Элементы высшей алгебры

Лекция 33. Комплексные числа

Понятие о комплексных числах. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Сложение, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, извлечение корня из комплексного числа.

33.1. Понятие о комплексных числах. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 33.1. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, x называется действительной частью комплексного числа $x = Re\ z$, y – мнимой частью, $y = Im\ z$:*

$$z = (x; y) \tag{33.1}$$

Действительная единица $1 = (1; 0)$, мнимая обозначается $i = (0; 1)$. Таким образом, множество действительных чисел $x = (x; 0)$ и множество чисто мнимых чисел $iy = (0; y)$ являются подмножествами комплексных чисел. Для мнимой единицы i справедливо равенство:

$$i^2 = -1. \tag{33.2}$$

Определение 33.2. *Выражение $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа.*

$$z = x + iy. \tag{33.3}$$

Рассмотрим свойства комплексных чисел и алгебраические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Для двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ справедливо:

- *Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если равны их действительные и мнимые части.*

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2. \tag{33.4}$$

- *При сложении (вычитании) комплексных чисел отдельно складываются (вычитаются) действительные и мнимые части.*

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \tag{33.5}$$

- *Умножение комплексных чисел проводится как умножение многочленов с учётом (33.2)*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{33.6}$$

- *Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$ и их произведение согласно (33.6), равно*

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \tag{33.7}$$

Таким образом, сумма квадратов двух действительных чисел раскладывается на произведение сопряженных комплексных чисел.

- *Частное от деления комплексных чисел $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ищется по следующей схеме: числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножается на число $\overline{z_2}$, сопряжённое знаменателю, а затем выделяются действительная и мнимая части*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{33.8}$$

Пример 33.1. *Сложить, вычесть, умножить и поделить два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$.*

Р е ш е н и е: По формуле (33.5):

$$z_1 + z_2 = 5 + i, \quad z_1 - z_2 = -1 + 5i,$$

по формуле (33.6):

$$z_1z_2 = 6 + 6 + i(9 - 4) = 12 + 5i,$$

по формуле (33.8):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{6 - 6 + i(9 + 4)}{9 + 4} = i.$$

Как известно, квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ при дискриминанте $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ не имеет действительных корней. Уравнение

$$z^2 + pz + q = 0 \tag{33.9}$$

имеет при $\frac{p^2}{4} - q < 0$ два комплексных сопряженных корня

$$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \tag{33.10}$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Таким образом, в комплексной области квадратный трёхчлен $z^2 + pz + q$ раскладывается на множители при отрицательном дискриминанте

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2) = ((z - \alpha) - \beta i)((z - \alpha) + \beta i). \tag{33.11}$$

Пример 33.2. *Найти корни уравнения $z^2 + 8z + 25 = 0$ и разложить квадратный трёхчлен на множители.*

Р е ш е н и е: По формуле (33.10) находим: $z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 25} = -4 \pm 3i$ и $z^2 + 8z + 25 = ((z+4) - 3i)((z+4) + 3i)$.

33.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Будем откладывать действительную часть $Re\ z = x$ комплексного числа z на оси Ox, а мнимую $Im\ z = y$ на оси Oy декартовой системы координат Oxy (рис. 169).

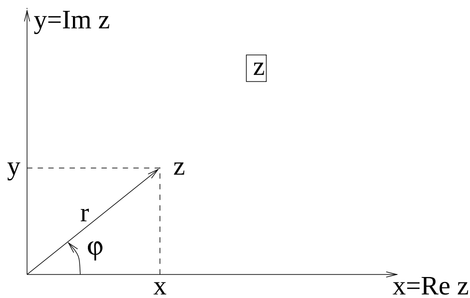


Рис. 169. *Комплексная плоскость*

Тогда каждому комплексному числу $z = x + iy$ будет соответствовать одна точка плоскости Oxy и наоборот каждой точке плоскости Oxy – одно комплексное число z. Поэтому вместо комплексного числа z можно говорить о точке z комплексной плоскости. Назовем эту плоскость комплексной плоскостью и будем обозначать её символом $\boxed{z}$.

Замечание 33.1. *Отметим, что бесконечность считается одной точкой и обозначается $z = \infty$. При изображении комплексных чисел на комплексной плоскости $\boxed{z}$ это тяжело себе представить. Однако, если воспользоваться сферой для изображения комплексных чисел (рис. 170), расположив её так, чтобы она касалась плоскости $\boxed{z}$ в начале декартовой системы координат O и каждой точке z (комплексному числу z) поставить в соответствие точку z на сфере, являющуюся точкой пересечения прямой соединяющей точку z на плоскости $\boxed{z}$ и точку N диаметрально противоположную O, то бесконечности на плоскости $\boxed{z}$ будет соответствовать одна точка N на этой сфере.*

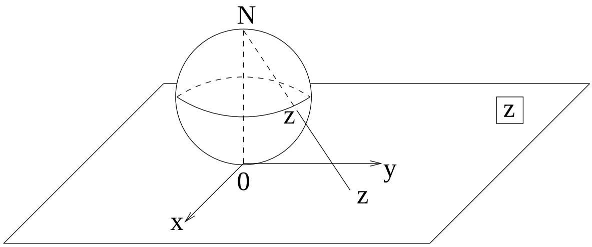


Рис. 170. *Сфера комплексных чисел*

33.3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел

Определение 33.3. *Модулем комплексного числа $|z|$ называется квадратный корень из суммы квадратов его действительной и мнимой частей:*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{33.12}$$

Геометрически модуль комплексного числа равен длине радиуса-вектора $\vec{r}$ точки z.

Определение 33.4. *Аргументом комплексного числа z называется угол между радиус-вектором $\vec{r}$ точки z и осью Ox (рис. 169)*

$$\varphi^o = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \quad \textit{при} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \quad \textit{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \textit{при} \quad y > 0, x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \textit{при} \quad y < 0, x = 0. \end{cases} \qquad (33.13)$$

Пример 33.3. *Определить модуль и аргумент комплексных чисел $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $z_2 = -1+i\sqrt{3}$, $z_3 = -1-i\sqrt{3}$ и $z_4 = 1-i\sqrt{3}$ и изобразить их на комплексной плоскости.*

Р е ш е н и е: Для z_1 и z_3 отношение $\dfrac{y}{x}$ одинаково, однако точка z_1 расположена в I-ом квадранте и $\varphi_1^o = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$, точка z_3 расположена в III-ем квадранте и $\varphi_3^o = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \dfrac{4}{3}\pi$. для чисел z_2 и z_4 расположены соответственно во II-ом и IV-ом квадрантах и аргументы $\varphi_2^o = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi_4^o = \operatorname{arctg} \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$. Модуль всех четырёх комплексных чисел $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Следовательно, все эти числа расположены на окружности радиуса $r = 2$ с найденными значениями аргументов (рис. 171).

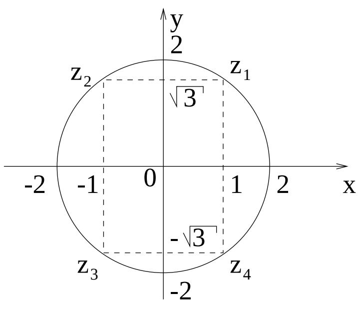


Рис. 171. *К примеру 33.3*

Все точки комплексной плоскости $\boxed{z}$ с модулем, равным R, удовлетворяют уравнению

$$|z| = R, \tag{33.14}$$

которое таким образом является уравнением окружности радиуса R с центром в начале координат.

Множество комплексных точек, расположенных внутри этой окружности определяется неравенством

$$|z| < R, \tag{33.15}$$

вне её

$$|z| > R. \tag{33.16}$$

Очевидно, что если центр этой окружности сместить в точку z_0 (рис. 172), её уравнение будет

$$|z - z_0| = R \tag{33.17}$$

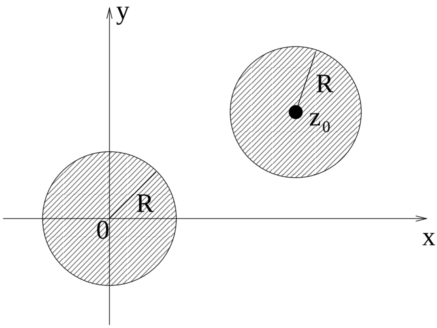


Рис. 172. *Множество точек* $|z| < R$ *и* $|z - z_0| < R$.

Множество всех точек, лежащих внутри этой окружности удовлетворяет неравенству

$$|z - z_0| < R, \tag{33.18}$$

вне её

$$|z - z_0| > R. \tag{33.19}$$

Области, определяемые неравенствами (33.15) и (33.18), заштрихованы на рис. 172.

Значения аргумента z, определяемое формулой (33.13) принято называть главным, что мы отмечаем верхним индексом «о» и прописной буквой а. Очевидно, что комплексное число z не изменится, если его аргумент изменить на $2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом более общее значение аргумента $\varphi = \operatorname{Arg} z$ определяется формулой

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k = \varphi^o + 2\pi k, \;\; k \in Z, \tag{33.20}$$

которая при $k = 0$ определяет главное значение аргумента (33.13).

Из рис. 169 видно, что

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi \tag{33.21}$$

и, следовательно, комплексное число может быть определено через r и φ по формуле

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{33.22}$$

следующей из (33.3) с учётом (33.21).

Определение 33.5. *Выражение (33.22) называется тригонометрической формой комплексного числа.*

Можно показать, что между показательной и тригонометрической функциями имеется связь, устанавливаемая формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{33.23}$$

Определение 33.6. *Выражение*

$$z = re^{i\varphi}, \tag{33.24}$$

следующее из (33.22) с учётом (33.23) называется показательной формой комплексного числа.

Формулы (33.1), (33.3), (33.22) и (33.24) являются различной записью комплексного числа z, и переход от одной из них к другой не представляет сложности.

Пример 33.4. *Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа z, заданные в алгебраической форме: 1) $z_1 = 3$; 2) $z_2 = -3$; 3) $z_3 = 3i$; 4) $z_4 = -3i$ и 5) $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$.*

Р е ш е н и е: 1) Главное значение аргумента для любого положительного действительного числа $\varphi^\circ = 0$ и, следовательно, по формулам (33.22), (33.24) с учётом (33.12) и (33.20) $z_1 = 3 = 3(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k) = 3e^{i2\pi k}$.

2) Для любого отрицательного действительного числа $\varphi^o = \pi$ и, следовательно,

$$z_2 = -3 = 3(\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi) = 3e^{i(2k+1)\pi}.$$

3) Для любого чисто мнимого числа $x = 0$ и при $y > 0 \ \to \varphi^o = \dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$z_3 = 3i = 3(\cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi + i\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi) = 3^{i(2k+1/2)\pi}.$$

4) При

$$y < 0 \ \to \ \varphi^o = -\frac{\pi}{2}$$

и

$$z_4 = -3i = 3\left(\cos\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi + i\sin\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 3^{i(2k-\frac{1}{2})\pi}.$$

5) Для $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$ главное значение аргумента

$$\varphi^o = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tfrac{\pi}{6}$$

и, следовательно,

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi + i\sin\left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi\right) = 2\sqrt{3}e^{\left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi}.$$

Наиболее удобно использование показательной и тригонометрической форм комплексных чисел при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корней.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z = re^{i\varphi} = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \tag{33.25}$$

$$z = re^{i\varphi} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \tag{33.26}$$

и, следовательно, при *умножении комплексных чисел их модули перемножаются $r = r_1 r_2$, а аргументы складываются $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, при делении – модули делятся $r = \dfrac{r_1}{r_2}$, а аргументы вычитаются $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.*

Очевидно, при возведении в степень комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ имеем

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{33.27}$$

В тригонометрической форме формула (33.27) носит название *формулы Муавра*

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (33.28)$$

Поскольку $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а следовательно, согласно (33.24) и $e^{i\varphi}$ являются периодическими функциями с периодом 2π, в формулах (33.21)–(33.26), а при целом n и в формулах (33.27), (33.28) φ следует брать равным своему главному значению $\varphi^o = \arg z$.

Формулы (33.27) и (33.28) справедливы и при дробном n, но при этом в этих формулах необходимо учитывать многозначность аргумента комплексного числа и в соответствии с формулой (33.20) положить $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$. В частности, при извлечении корня n-ой степени и комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ получаем

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}e^{i\dfrac{\varphi^o + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi^o + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi^o + 2\pi k}{n}\right). \quad (33.29)$$

Придавая k последовательно значения $0, 1, 2, ..., n-1$, получим n *различных значений* $\sqrt[n]{z}$ *с одинаковым модулем, но различными аргументами. На комплексной плоскости* $\boxed{z}$ *все эти значения расположены на окружности радиуса* $\sqrt[n]{r}$ *в вершинах правильного* n*-угольника, вписанного в эту окружность.* Если k принимает значения больше $n-1$, то эти точки повторяются.

Из сказанного очевидно, что уравнение n-ой степени

$$z^n - a = 0, \qquad (33.30)$$

где $a = re^{i\varphi}$ – комплексное число, имеет n корней $z = \sqrt[n]{a}$, определяемых по формуле (33.29).

Пример 33.5. *Возвести в 6-ую степень и извлечь корень 6-ой степени из комплексного числа* $z = 3 - i\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е: Модуль и главное значение аргумента числа $z = 3 - i\sqrt{3}$ мы нашли в примере 33.4. Они равны соответственно $2\sqrt{3}$ и $-\dfrac{\pi}{6}$. Следовательно, по формуле (33.27)

$$(3 - i\sqrt{3})^6 = (2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}})^6 =$$
$$= 2^6 3^3 e^{i11\pi} = 1728(\cos\pi - i\sin\pi) = 1728(-1 - i0) = -1728,$$

а по формуле (33.29)

$$\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}e^{-i(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}\right)^{1/6} = \sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{3}e^{i\frac{(-1+12k)\pi}{36}}.$$

Придавая k значения 0,1,...,5 получим 6 разных значений $\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}}$:

$$z_1 = (\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}})_1 = \sqrt[12]{12}e^{-i\frac{\pi}{36}}, \quad z_2 = (\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}})_2 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{11}{36}\pi},$$
$$z_3 = (\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}})_3 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{23}{36}\pi}, \quad z_4 = (\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}})_4 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{35}{36}\pi},$$
$$z_5 = (\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}})_5 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{47}{36}\pi}, \quad z_6 = (\sqrt[6]{3-i\sqrt{3}})_6 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{59}{36}\pi}.$$

Все эти значения на комплексной плоскости $\boxed{z}$ расположены в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[12]{12}$ (рис. 173).

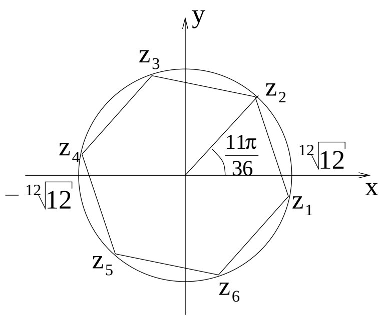


Рис. 173. *К примеру 33.5*

Пример 33.6. *Найти все корни уравнения* $z^4+1=0$.

Р е ш е н и е: $z^4+1=0 \ \to\ z^4=-1 \ \to\ z=\sqrt[4]{-1}$.
Поскольку для любого отрицательного действительного числа

$$\arg z = \pi, \quad -1 = 1e^{i(\pi+2\pi k)}$$

и, следовательно,

$$z = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}.$$

Находим четыре корня, положив k равным 0,1,2,3:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$
$$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$
$$z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

На плоскости $\boxed{z}$ эти корни расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 174).

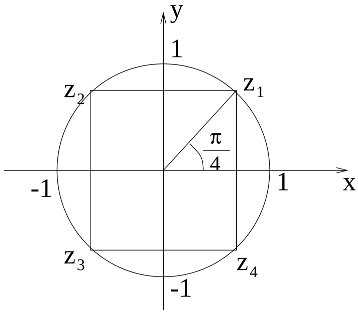


Рис. 174. *К примеру 33.6*

Пример 33.7. *Определить расположение всех корней уравнения* $z^5 - 32 = 0$ *на плоскости* $\boxed{z}$.

Р е ш е н и е: Поскольку $z^5 = 32 = 2^5$, один из корней легко находится, и он равен $z_1 = 2$. Остальные четыре корня расположены в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 2 (рис. 175).

Интересно отметить, что из формулы Муавра (33.28) можно получить тригонометрические формулы, выражающие $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 33.8. *Выразить* $\sin 2x$ *и* $\cos 2x$ *через* $\sin x$ *и* $\cos x$.

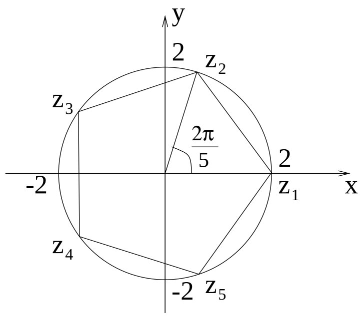


Рис. 175. *К примеру 33.7*

Р е ш е н и е: Положим в формуле (33.28)

$$n=2: \quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi =$$

$$= \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Так как, если комплексные числа равны, то равны их действительные и мнимые части, следовательно,

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Практическое занятие 33. Комплексные числа

В начале практического занятия рассмотрим примеры на действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме (33.3).

Пример 33.1. *Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = -3+4i$ и $z_2 = 4-2i$ и изобразить z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$ и z_1/z_2 на комплексной плоскости.*

Р е ш е н и е: Согласно формулам (33.5) – (33.8)

$$z_1+z_2 = 1+2i, \quad z_1-z_2 = -7+6i,$$

$$z_1z_2 = (-3+4i)(4-2i) = -12+8+i(6+16) = -4+22i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+4i}{4-2i} = \frac{-3+4i}{2(2-i)}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{-6-4+i(8-3)}{2(4+1)} = -1+\frac{1}{2}i.$$

Проверим последний результат:

$$z_1 = z_2\left(-1+\frac{1}{2}i\right) = (4-2i)\left(-1+\frac{1}{2}i\right) =$$

$$= -(2-i)^2 = -(4-4i-1) = -3+4i.$$

Нанесем z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2, $\frac{1}{4}z_1z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексную плоскость (рис. 176).

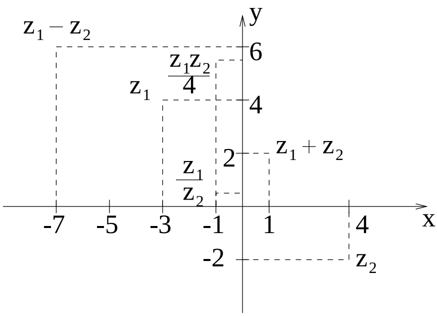


Рис. 176. *К примеру 33.1*

Пример 33.2. *Решить квадратное уравнение $z^2+4z+13=0$.*

Р е ш е н и е: По формуле (33.10) находим $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = = 2 \pm 3i$.

Рассмотрим теперь примеры на представлении комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.

Пример 33.3. *Найти аргументы и модули сопряженных комплексных чисел $z = 1+i$ и $\overline{z} = 1-i$. Записать их в показательной и тригонометрической формах.*

Р е ш е н и е: По формуле (33.13) имеем

$$\arg z = arg(1+i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arg \overline{z} = arg(1-i) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

По формуле (33.12):

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad |\overline{z}| = \sqrt{2}.$$

Следовательно, по (33.24) и (33.22):

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$\overline{z} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 33.4. *Построить область, которой принадлежит множество комплексных чисел, модуль и аргумент которых удовлетворяет неравенствам:* $2 < |z| < 4$, $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$.

Решение: Неравенству $2 < |z| < 4$ удовлетворяют все комплексные числа, модуль которых заключен между 2 и 4, т.е. множество точек, расположенных в кольце между окружностями с радиусами $r = 2$ и $r = 4$ (рис. 177).

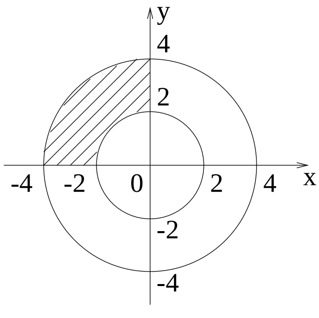


Рис. 177. *К примеру 33.4*

Неравенству $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ удовлетворяют все точки, лежащие во 2-ом квадранте. Таким образом искомой областью является область, заключенная между окружностями с радиусами $r = 2$ и $r = 4$ и расположенными во 2-ом квадранте (заштрихована на рис. 177).

Рассмотрим теперь примеры на возведение комплексных чисел в степень и извлечение корня из комплексных чисел.

Пример 33.5. *Найти* $(1 + i)^4$. *Проделать эти действия в алгебраической, показательной и тригонометрической формах. Сравнить полученные результаты.*

Р е ш е н и е: Возведение двучлена в целую степень можно провести по формуле бинома Ньютона (использовать формулу (19.5), в которой положить $m = 4$, $a = 1$ и $b = i$):

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}i^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}i^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}i^4 = \\ = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Выражение для $1 + i$ в показательной и тригонометрической формах мы нашли в примере 33.3, в котором положим

$$k = 0: \quad 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}).$$

Согласно формулам (33.27) и (33.28):

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{\pi i} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4,$$

что, естественно, совпадает с полученным выше результатом.

Пример 33.6. *Найти все различные значения $\sqrt[4]{1+i}$ и нанести их на комплексную плоскость.*

Р е ш е н и е: Извлечение корня из комплексного числа, как было показано в лекции 33, надо проводить по формуле (33.29)

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{i}{4}(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}}.$$

Откуда, положив k равным 0,1,2,3, находим четыре различных значения:

$$z_1 = \left(\sqrt[4]{1+i}\right)_1 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$z_2 = \left(\sqrt[4]{1+i}\right)_2 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$z_3 = \left(\sqrt[4]{1+i}\right)_3 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$z_4 = \left(\sqrt[4]{1+i}\right)_4 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

Все эти точки расположены на окружности радиуса $\sqrt[8]{2}$ в вершинах квадрата (рис. 178).

Пример 33.7. *Определить расположение всех корней уравнения $z^3 + 27 = 0$ на плоскости* $\boxed{z}$.

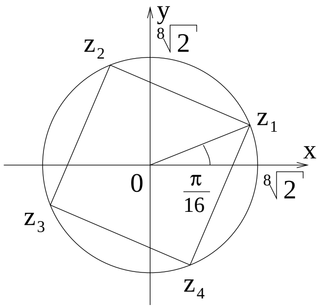


Рис. 178. *К примеру 33.6*

Р е ш е н и е: Из заданного уравнения находим $z^3 = -27 \rightarrow$ $\rightarrow z = \sqrt[3]{-27}$.

Один из корней известен. Это $z_2 = -3$. Точка $z_2 = -3$, для которой $|z| = 3$, а $arg(-3) = -\pi$, на комплексной плоскости является одной из вершин правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $r = 3$ (рис. 179), две другие вершины находятся в точках этой окружности z_1 и z_3 с аргументами $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{3}$ и $\arg z_3 = \dfrac{5\pi}{3}$.

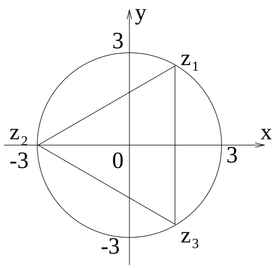


Рис. 179. *К примеру 33.7*

В заключение нашего занятия выразим $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Р е ш е н и е: По формуле Муавра (33.28) при $n = 3$:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi \ \rightarrow\ \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi +$$
$$+ 3i^2\sin^2\varphi\cos\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi +$$
$$+ i(3cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в последнем равенстве получим

$$\cos 3\varphi = cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi \ \text{ и } sin3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Самостоятельная работа

Пример 33.8. *Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = 2 - i$ и изобразить z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$ на комплексной плоскости.*

Пример 33.9. *Решить квадратные уравнения $z^2 + 2z + 10 = 0$, $3z^2 + 2z + 4 = 0$.*

Пример 33.10. *Представить в показательной и тригонометрической формах комплексные числа $z_1 = i$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$.*

Пример 33.11. *Найти $(1 + i\sqrt{3})^3$. Проделать эти действия в алгебраической, показательной и тригонометрической формах.*

Пример 33.12. *Найти все корни уравнений $z^6 + 1 = 0$, $z^3 - i = 0$ и нанести их на комплексную плоскость.*

Лекция 34. Рациональные функции одной переменной

Некоторые сведения о многочленах. Разложение многочлена на множители. Разложение рациональных дробей на простейшие.

34.1. Рациональные дроби. Выделение целой части и правильной дроби

Рациональной функцией или рациональной дробью, называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \tag{34.1}$$

где

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad (34.2)$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k. \quad (34.3)$$

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя и неправильной – в противном случае.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Пример 34.1. *Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби следующую неправильную дробь:*

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Р е ш е н и е: Разделив числитель на знаменатель, получим в частном $x + 3$ и в остатке $-6x^2 - 5x + 8$, т.е.

$$R(x) = x + 3 + \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на разность $x - a$ можно найти, не выполняя самого процесса деления на основании следующей теоремы.

Теорема 34.1. *(Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на разность $x - a$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$.*

Пример 34.2. *Найти остаток от деления многочлена $P(x) = 3x^9 - 2x^5 + 3x^2 + 4x - 8$ на двучлен $x + 1$.*

Р е ш е н и е:
Здесь $a = -1$. Поэтому искомый остаток равен:

$$P(-1) = 3(-1)^9 - 2(-1)^5 + 3(-1)^2 + 4(-1) - 8 =$$
$$= -3 + 2 + 3 - 4 - 8 = -10.$$

34.2. Некоторые сведения о многочленах

Рассмотрим кратко некоторые сведения о многочленах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Корнем многочлена (34.2)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

называется всякое число γ (действительное или комплексное), которое обращает многочлен в нуль, т.е. такое, что $P_n(\gamma) = 0$.

Пример 34.3. *Проверить, что $\gamma = 1$ является корнем многочлена $x^3 + 5x^2 - 2x - 4$.*

Решение: Действительно: $1^3 + 5\cdot 1^2 - 2\cdot 1 - 4 = 0$.

2. Имеет место следующая теорема, принимаемая без доказательства:

Теорема 34.2. *Всякий многочлен степени n может быть представлен в виде произведения n множителей вида $x-\gamma$ и множителя при старшей степени x, т.е.*

$$P_n(x) = a_n(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)...(x-\gamma_n). \tag{34.4}$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2 ... \gamma_n$ очевидно являются корнями многочлена.

Если в разложении 34.4 раскрыть скобки, то свободный член многочлена будет равен произведению корней многочлена $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n$.

Отсюда вытекает следующее правило: *Если многочлен $P_n(x)$ имеет целые корни, то эти корни являются делителями свободного члена.*

Так как любое число имеет конечное множество целых делителей, то это правило позволяет решать алгебраические уравнения степени выше двух при условии, что хотя бы один корень – целое число.

Пример 34.4. *Решить уравнение*

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Решение:

Если у него есть целые корни, то только ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Подставив в уравнение, например, $x = 1$, получим тождество. Следовательно, на основании теоремы Безу многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ делится на разность $x - 1$ без остатка. Выполнив это деление, получим:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - 5x - 6).$$

Решив квадратное уравнение

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

найдем корни: -3 и 2. Следовательно, корни данного уравнения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2.$$

Пример 34.5. *Легко проверить, что* $5x^4-4x^3+115x^2-140x+60 = 5(x-1)(x-2)(x-2)(x-3)$.

Пример 34.6. *Многочлен* $x^3 + x = x(x-i)(x+i)$.

3. Среди линейных множителей в (34.4) могут быть одинаковые. Объединяя их, можем записать разложение многочлена на множители в виде:

$$P_n(x) = a_n(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}...(x-p)^{k_s}, \tag{34.5}$$

где все корни $a, b...p$ различны, и сумма показателей степени равна n.

Корни $a, b...p$ называются кратными корнями многочлена, а именно a – корень кратности k_1, b – корень кратности k_2, p – корень кратности k_s.

4. Среди корней в разложении (34.4) могут быть комплексные $\alpha \pm \beta i$. В алгебре доказывается: если $\alpha + \beta i$ является корнем многочлена кратности k, то и сопряжённое число $\alpha - \beta i$ также является корнем этого же многочлена той же кратности.

5. Поэтому, если в разложении (34.5) есть множитель $(x-(\alpha+\beta i))^k$, то в этом разложении присутствует множитель $(x-(\alpha-\beta i))^k$.

Перемножив два множителя, соответствующие комплексным сопряженным корням, получим (см. 33.7):

$$(x-(\alpha+\beta i))^k(x-(\alpha-\beta i))^k = ((x-\alpha)-\beta i)^k((x-\alpha)+\beta i)^k =$$
$$= ((x-\alpha)^2+\beta^2)^2 = (x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^k = (x^2+px+q)^k,$$

где $p = -2\alpha, q = \alpha^2 + \beta^2$.

Обратите внимание, что трёхчлен $x^2 + px + q$, равный сумме двух квадратов, имеет отрицательный дискриминант.

6. Все вышесказанное позволяет сформулировать утверждение: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующем виде:

$$P_n(x) = a_n(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}.... \tag{34.6}$$

В формуле (34.6) $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_s + 2(s_1 + s_2 + \cdots + s_m)$.

В нём линейные множители соответствуют действительным корням, а квадратные трёхчлены, имеющие по два корня – комплексным корням многочлена.

34.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Определение 34.1. *Дроби*

$$I.\ \frac{A}{x-a},$$
$$II.\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n=2,3,...),$$
$$III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ (D=p^2-4q<0),$$
$$IV.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (D=p^2-4q<0, n=2,3...)$$

называются простейшими дробями первого, второго, третьего и четвёртого типов.

В высшей алгебре доказывается следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства:

Теорема 34.3. *Правильную рациональную дробь* $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, *где* $P_n(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^l\cdots$, *можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots \tag{34.7}$$
$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},\cdots,$$

где $A_i,\ B_i,\ M_i,\ N_i\ (i=1,2,...)$ *– действительные числа.*

В формуле (34.7) первое многоточие в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители соответствует другим, кроме a, действительным корням, а второе – комплексным.

Из формулы (34.7) следует, что линейным множителям в разложении знаменателя соответствуют дроби I и II типов, а квадратичным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типов.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливым при любом числе линейных и квадратичных множителей в разложении знаменателя $P_n(x)$.

Рассмотрим два способа нахождения коэффициентов разложения (34.7).

34.3.1. *Метод неопределённых коэффициентов.* Этот метод основан на следующем утверждении, принимаемом без доказательства: если два многочлена тождественно равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной в обеих частях тождества.

Поэтому приводя в правой части разложения (34.7) к общему знаменателю, получаем тождественное равенство двух рациональных дробей с равными знаменателями.

Следовательно, числители тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A, B, \ldots$.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 34.7. *Разложить на простейшие дроби:* $\dfrac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}$.

Р е ш е н и е:

$$\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}. \tag{34.8}$$

Приводим правую часть этого тождества к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}.$$

Приравниваем числители:

$$x^2+2x-6 = A(x^2+x-6)+B(x^2-2x)+C(x^2+3x) \text{ или}$$
$$x^2+2x-6 = (A+B+C)x^2+(A-2B+3C)x-6A.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} x^2: A+B+C=1, \\ x: A-2B+3C=2, \\ \text{свободные члены: } -6A=-6. \end{cases}$$

Можно показать, что эта система всегда имеет единственное решение. Это решение следующее:

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{5},\ C = \frac{1}{5}.$$

Подставив найденные коэффициенты в разложение (34.8), окончательно получим:

$$\frac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x} = \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{5}}{x+3} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2}. \tag{34.9}$$

Пример 34.8. *Разложить на простейшие дроби:*

$$\frac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}.$$

Решение:

$$\frac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5}. \tag{34.10}$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} =$$
$$= \frac{A(x-1)(x^2+2x+5) + Bx(x^2+2x+5) + (Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}.$$

Приравнивая числители, получаем:

$$x^2+5 = A(x^3+x^2+3x-5) + B(x^2+2x+5)+$$
$$+M(x^3-2x^2+x) + N(x^2-2x+1)$$

или

$$x^2+5 = (A+M)x^3 + (A+B-2M+N)x^2+$$
$$+(3A+2B+M-2N)x + (-5A+5B+N).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем систему:

$$\begin{cases} x^3:\ \ A+M=0, \\ x^2:\ \ A+B-2M+N=3, \\ x:\ 3A+2B+M-2N=0, \\ \text{свободные члены:}\ -5A+5B+N=5. \end{cases}$$

Её решение: $A = \dfrac{1}{4},\ B = 1,\ M = -\dfrac{1}{4},\ N = \dfrac{5}{4}$.

Следовательно, подставив найденные коэффициенты в (34.10), получим:

$$\frac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}{x^2+2x+5}.$$

34.3.2. *Метод произвольных значений.* Этот метод основан на очевидном утверждении: если два многочлена тождественно равны: $P(x) \equiv Q(x)$, то они равны при любом значении независимой переменной $x = a:\ P(a) = Q(a)$, где a - произвольное число.

Поэтому вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях неизвестной в разложении (34.7) можно подставлять туда вместо x несколько произвольных чисел.

Этот метод особенно эффективен, когда многочлен $P_n(x)$, стоящий в знаменателе имеет, различные действительные корни и в качестве произвольных значений берутся числа, равные действительным корням знаменателя.

Пример 34.9. *Разложить на простейшие дроби функцию из примера 34.7.*

Р е ш е н и е: Ранее, при использовании метода неопределённых коэффициентов, было получено:

$$x^2+2x-6 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3).$$

Подставим в это тождество последовательно три значения x:

$$x = 0:\ -6 = -6A \implies A = 1,$$
$$x = 2:\ 2 = 10C \implies C = \frac{1}{5},$$
$$x = -3:\ -3 = 15B \implies B = -\frac{1}{5}.$$

Опять получаем соотношение (34.10).

Рассмотрим теперь пример, в котором для разложения знаменателя на множители можно использовать операцию извлечения корня из комплексного числа.

Пример 34.10. *Разложить на простейшие дроби* $\dfrac{1}{x^4+1}$.

Р е ш е н и е: Многочлен x^4+1, стоящий в знаменателе имеет лишь комплексные корни, которые мы нашли в лекции 33: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Таким образом,

$$x^4+1 = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Объединив первую скобку с последней, вторую с третьей, получим:

$$x^4+1 = \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right)\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) =$$

$$= \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

В соответствии с формулой (34.7) и методом неопределённых коэффициентов, находим:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \tag{34.11}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1}$$

и, следовательно,

$$Ax^3 + A\sqrt{2}x^2 + Ax + Bx^2 + B\sqrt{2}x + B + Cx^3 -$$

$$-C\sqrt{2}x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных A, B, C, D:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0, \\ A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0, \\ B + D = 1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения C через A, а из последнего D через B и подставив $C = -A$ и $D = 1 - B$ во второе и третье уравнения системы, получим:

$$A\sqrt{2} + B + A\sqrt{2} + 1 - B = 0 \;\Rightarrow 2A\sqrt{2} = -1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \;\Rightarrow\; C = -A = \frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$A + B\sqrt{2} - A - \sqrt{2} + B\sqrt{2} = 0 \;\Rightarrow$$
$$2B\sqrt{2} = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; D = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения A, B, C, D в (34.11), найдем разложение дроби $\dfrac{1}{x^4+1}$ на простейшие:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}. \tag{34.12}$$

Замечание 34.1. *Разложение (34.12) многочлена $P_4(x) = x^4 + 1$ на множители можно было бы получить и методом неопределённых коэффициентов.*

Учитывая, что комплексные корни входят в разложение многочлена на множители как корни квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$ при $D < 0$, запишем:

$$x^4 + 1 = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) =$$
$$= x^4 + p_1x^3 + q_1x^2 + p_2x^3 + p_1p_2x^2 + p_2q_1x + q_2x^2 + p_1q_2x + q_1q_2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в полученном тождестве, получим уравнения для определения

p_1, p_2, q_1, q_2 и найдем их так:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \;\Rightarrow\; p_2 = -p_1 \;\Rightarrow\; p_2 = -\sqrt{2}, \\ q_1 + p_1 p_2 + q_2 = 0 \;\Rightarrow\; p_1 p_2 = -q_1 - q_2 = -2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow p_1^2 = 2 \;\Rightarrow\; p_1 = \sqrt{2}, \\ p_2 q_1 + p_1 q_2 = 0 \;\Rightarrow\; -p_1 q_1 + p_1 q_2 = p_1(q_2 - q_1) = 0 \;\Rightarrow\; q_1 = q_2, \\ \text{т.к. } p_1 \neq 0, \\ q_1 q_2 = 1 \;\Rightarrow\; q_1^2 = q_2^2 = 1 \;\Rightarrow\; q_1 = q_2 = 1. \end{cases}$$

Отметим, что $q_1 = q_2 \neq -1$, так как в этом случае из второго уравнения следовало бы, что $p^2 = -2$, что невозможно. Таким образом, мы получили опять разложение (34.12).

Замечание 34.2. *Разложить $x^4 + 1$ на множители можно ещё и так. Прибавим и вычтем $2x^2$ и воспользуемся формулой сокращённого умножения:*

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$
$$= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x).$$

Этот пример показывает, что нестандартные приемы решения часто очень эффективны!

Практическое занятие 34. Разложение дробей на простейшие

Рассмотрим прежде всего примеры на выделение целой части в неправильной дроби.

Пример 34.1. *Представить неправильную дробь $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$ в виде суммы целой части и правильной дроби.*

Р е ш е н и е: Разделим числитель на знаменатель

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3+ & 2x^2 - & x + 1 & & x^2+ \quad x - 1 \\ \hline x^3+ & x^2 - & x & & x + 1 \\ \hline & x^2+ & 1 & & \\ & x^2+ & x - 1 & & \\ \hline & & -x + 2. & & \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2+x-1}=x+1+\frac{-x+2}{x^2+x-1}.$$

В следующих примерах представим (без отыскания коэффициентов) правильную дробь в виде суммы элементарных дробей.

Пример 34.2. $\dfrac{x^2+1}{x^3(x-1)^2}$.

Р е ш е н и е: $\dfrac{x^2+1}{x^3(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{(x-1)}+\dfrac{E}{(x-1)^2}$.

Пример 34.3. $\dfrac{x+5}{x(x+3)(x^2+2x+5)^2}$.

Р е ш е н и е: $\dfrac{x+5}{x(x+3)(x^2+2x+5)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+2x+5)^2}$.

В следующих примерах разложить правильную дробь на простейшие и найти коэффициенты разложения с помощью метода произвольных значений.

Пример 34.4. $\dfrac{x+3}{x(x+1)(x-2)}$.

Р е ш е н и е: $\dfrac{x+3}{x(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$.

В правой части тождества приводим к общему знаменателю и приравниваем числители:

$x+3=A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)$.

Подставляем в обе части тождества произвольные значения x:

$$\begin{cases} x=0 \ \Rightarrow\ 3=-2A \ \Rightarrow\ A=-\dfrac{3}{2}; \\ x=-1 \ \Rightarrow\ 2=3B \ \Rightarrow\ B=\dfrac{2}{3}; \\ x=2 \ \Rightarrow\ 5=6C \ \Rightarrow\ C=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{x+3}{x(x+1)(x-2)}=-\frac{3}{2x}+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{5}{6(x-2)}.$$

Пример 34.5. $\dfrac{x+5}{x^2(x-1)}$.

Решение: $\dfrac{x+5}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$.

Далее:

$$\begin{aligned}
&x+5 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2.\\
&x = 0 \;\Rightarrow\; 5 = -B \;\Rightarrow\; B = -5;\\
&x = 1 \;\Rightarrow\; 6 = C \;\Rightarrow\; C = 6;\\
&x = -1 \;\Rightarrow\; 4 = 2A - 2B + C \;\Rightarrow\; A = -6.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{x+5}{x^2(x-1)} = -\frac{6}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x-1}.$$

В следующих примерах разложить правильную дробь на простейшие и найти коэффициенты с помощью метода неопределённых коэффициентов.

Пример 34.6. $\dfrac{2x+1}{x(x^2+2x+5)}$.

Решение: $\dfrac{2x+1}{x(x^2+2x+5)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+5}$.

Приведем в правой части к общему знаменателю и приравняем числители

$$2x+1 = A(x^2+2x+5) + x(Bx+C).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$2x+1 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} A + B = 0,\\ 2A + C = 2,\\ 5A = 1.\end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{8}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{2x+1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5x} + \frac{-x+8}{5(x^2+2x+5)}.$$

Пример 34.7. $\dfrac{x-3}{x^2(x^2+1)}$.

Р е ш е н и е: $\dfrac{x-3}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

Далее

$$x-3 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + x^2(Cx+D).$$

или $x-3 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + (A+B)$,

получаем систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ A=1, \\ A+B=-3, \end{cases}$$

откуда $A=1$, $B=-4$, $C=-1$, $D=4$.

Поэтому

$$\frac{x-3}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{-x+4}{x^2+1}.$$

Самостоятельная работа

Пример 34.8. *Представить неправильную дробь* $\dfrac{x^5-x^4+2x+3}{x^2-1}$ *в виде суммы целой части и правильной дроби.*

В следующих примерах представить (без отыскания коэффициентов) правильную дробь в виде суммы элементарных дробей.

Пример 34.9. $\dfrac{x+5}{x^4(x+1)}$.

Пример 34.10. $\dfrac{x}{(x^2+5)^2(x+3)}$.

В следующих примерах разложить правильную дробь на простейшие и найти коэффициенты методом произвольных значений.

Пример 34.11. $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$.

Пример 34.12. $\dfrac{x+3}{x^2(x+1)}$.

В следующих примерах разложить правильную дробь на простейшие и найти коэффициенты с помощью метода неопределённых коэффициентов.

Пример 34.13. $\dfrac{x+5}{x^2(x-5)}$.

Пример 34.14. $\dfrac{x+4}{x(x^2+4x+8)}$.

Ответы

1.6 $A_1 = [1;2)$, $A_2 = (-5;7)$, $A_3 = [1;2)$, $A_4 = [-3;5]$, $A_5 = [-3;5]$, $A_6 = [-3;5]$, $A_7 = (-5;-3) \cup (5;7)$. **1.7** $A_1 = \{2;3\}$, $A_2 = \{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$, $A_3 = \{-6;0\}$, $A_4 = \{-3;-\frac{1}{2};1\}$, $A_5 = \oslash$, $B_1 = (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$, $B_2 = (-\sqrt{5};\sqrt{5})$, $B_3 = [-6;0]$, $B_4 = (-\infty;-3) \cup (-\frac{1}{2};1)$, $B_5 = (-\infty;+\infty)$, $C = \{2;3;4\}$, $D = \{-1;1;-1;1,\ldots\}$, $E = \{-2;4;-2;4,\ldots\}$ **1.8** $A_1 = \{x|2 < x < 5\}$, $A_2 = \{x|x \leqslant 5\}$, $A_3 = \{x|x \in \mathbb{Q},\ x < 0\}$, $A_4 = \{x|x \geqslant 0\}$, $A_5 = \{x|, x < 0,\ x \in \mathbb{Z}\}$, $A_6 = \{x|x \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant x \leqslant 9\}$. **1.9** $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$. **1.10** $(-\infty;2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{3};+\infty)$. **1.11** [2;3]. **1.12** $(2;2\sqrt{2})$. **1.13** [-5;-1). **1.14** (3;5]. **1.15** $(-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup \cup (2;+\infty)$. **1.16** $(1;2)$. **1.17** $[3;+\infty)$. **1.18** $(0;\frac{23}{35})$. **1.19** $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $54 = 2 \cdot 3^3$. **1.20** *а*) $\text{НОК}(90;120) = 360$, $\text{НОД}(90;120) = 30$; б) $\text{НОК}(48;54) = 432$, $\text{НОД}(48;54) = 6$.
1.21 а) целая часть 5, остаток 2; б) целая часть 4, остаток 2; в) целая часть 3, остаток 0; г) целая часть 0, остаток 2. **1.22** а) -0,16; б) 0,(2); в) -1,0625; г) 2,(36). **1.23** а)$\frac{51}{25}$; б)$-\frac{78}{25}$; в)$\frac{16}{3}$; г)$\frac{37}{30}$. **1.24** а)$\frac{8}{15}$; б)$\frac{104}{495}$; в)7.

2.3 а) $|x| < 3$; б) $|x| \leqslant 7$; в)$|x+1| < 4$; г) $|x+1| < 4$; д) $|x-1| \leqslant 4$; е) $|x+1| \leqslant 6$. **2.4** а) $x \in (-\infty;-5] \cup [-1;+\infty)$; б) $x \in (-\frac{1}{2};+\infty)$; в) $x \in (-\infty;-\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{3};\sqrt{3}) \cup (\sqrt{7};+\infty)$; г) $x \in (-1;3)$; д) $x \in (0;12)$; е)$x \in [-8;2]$; ж) $x \in (-1;0)$. **2.5** а) $x \in \{-1;3\}$; б) $x \in (-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$; в) $x \in (-\infty;2] \cup [3;+\infty)$; г) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; д) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.6** а) $X = -1$, $Y = -2$; б) $X = 2$, $Y = \sqrt{2}$; в)$X = 3$, $Y = 1$. **2.7** а) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $r = 3\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$; в) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. **2.8** а) $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$; б) $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$; в) $x = 0$, $y = -4$; д) $x = -1$, $y = 0$.

3.7 $[-1;+\infty)$ **3.8** $[-\infty;+\infty)$. **3.9** $(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$. **3.10** [-3;3]. **3.11** [-1;2]. **3.12** $[-\sqrt{2};0) \cup (0;\sqrt{2}]$. **3.13** (-2;2). **3.14** $[-\frac{1}{3};1]$. **3.15** $(-1;1) \cup (2;\infty)$. **3.16** [1;100]. **3.17** Нечётная. **3.18** Чётная. **3.19** Нечётная. **3.20** Чётная. **3.21** Нечётная. **3.22** Чётностью или нечётностью не обладает. **3.23** 2π. **3.24** π. **3.25** π. **3.26** Непериодическая.

4.12 $[0;+\infty); y = \sqrt{x+1}$. **4.13** $(0;+\infty); y = 2e^x$. **4.14** $R; y = \frac{\operatorname{tg}(x)}{3}$.

4.15 $\arcsin\lg(x)$. **4.16** $-\frac{\pi}{2}$. **4.17** $\lg(\arcsin(x))$.**4.18** $\sqrt{1+x^2}$. **4.19**$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. **4.20** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **4.21** $y=3x-1$. **4.22** $y=\frac{-1}{2}x+2$. **4.23** $y=-3x$ или $y=\frac{1}{3}x$. **4.24** $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. **4.25** рис. 180. **4.26** рис. 181. **4.27** рис. 182. **4.28** рис. 183. **4.29** рис. 184. **4.30** рис. 185. **4.31** рис. 186. **4.32** рис. 187. **4.33** рис. 188. **4.34** рис. 189. **4.35** рис. 190. **4.36** рис. 191. **4.37** рис. 192. **4.38** рис. 193. **4.39** рис. 194. **4.40** рис. 195. **4.41** рис. 196.

5.8 $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **5.9** $(x+3)^2+(y+2)^2=25$. **5.10** $(x-\frac{8}{3})^2+y^2=\frac{85}{9}$. **5.11** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **5.12** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **5.13** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **5.14** $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$. **5.15** $a=13; b=5; F_{1,2}\,(\pm 12;0); \varepsilon=\frac{12}{13}$. **5.16** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$. **5.17** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$. **5.18** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$. **5.19** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **5.20** $F_{1,2}\,(\pm 5;0); \varepsilon=\frac{5}{3}; y=\pm\frac{4}{3}x$. **5.21** $y^2=16x$. **5.22** $x^2=8y$. **5.23** $x^2=-18y$. **5.24** $A(2;0), p=-4$; ось – Ox. **5.25** Эллипс $\frac{(x-1)^2}{200/9}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$. **5.26** Гипербола $\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$. **5.27** Гипербола $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. **5.28** Гипербола $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$. **5.29** Парабола $(y-1)^2=10(x+2)$. **5.30** Парабола $(y+7)^2=6x$.

6.5 $x\in(-1;1)\cup(2;\infty)$. **6.6** рис. 210-213. **6.7** рис. 214. **6.8** $40y+10x-77=0$.

7.19 $\frac{1}{2^{n-1}}$. **7.20** $\frac{n+1}{n}$. **7.21** n^2. **7.22** $\frac{2n}{2n-1}$. **7.23** $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. **7.24** $\frac{1}{9}; \frac{5}{3^5}; \frac{n+1}{3^{n+1}}$. **7.25** $\frac{5}{3}$. **7.26** 1. **7.27** $\frac{3}{4}$. **7.28** $\frac{1}{9}$. **7.29** 1. **7.30** 0. **7.31** 0. **7.32** ∞.

7.33 4. **7.34** $\frac{5}{2}$. **7.35** $\frac{\sin 2}{2}$. **7.36** 1. **7.37** $\frac{1}{9}$. **7.38** $\frac{1}{2}$. **7.39** $\frac{1}{2}$. **7.40** $\cos a$. **7.41** e^{-1}. **7.42** 1. **7.43** 0. **7.44** -3. **7.45** 1.

8.14 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$. **8.15** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5}{3}$. **8.16** 0. **8.17** 4. **8.18** $\frac{4}{3}$. **8.19** ∞. **8.20** 3. **8.21** 1. **8.22** 0. **8.23** $\frac{1}{6}$. **8.24** $\frac{3}{4}$. **8.25** $\frac{4}{3}$. **8.26** $\frac{3}{5}$. **8.27** $\frac{1}{2}$. **8.28** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **8.29** 3. **8.30** 1. **8.31** 0. **8.32** -1.

9.8 $\lim\limits_{x\to e}\ln x=1$. **9.9** Непрерывна. **9.10** $x=0$ — точка разрыва первого рода. **9.11** $x=-1$, ± 2 — точки разрыва второго рода. **9.12** $x=0$ и $x=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, где $n=0,1,2\ldots$. **9.13** $x=1$, 2 – точки устранимого разрыва. **9.14** Непрерывна при $x \in R$. **9.15** 1.

10.7 $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **10.8** $u_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$. **10.9** $\frac{1}{2}$. **10.10** $\frac{1}{4}$. **10.11** Ряд сходится, $S = 2$. **10.12** Ряд расходится.

11.8 Ряд расходится. **11.9** Ряд сходится. **11.10** Ряд сходится. **11.11** Ряд расходится. **11.12** Ряд сходится. **11.13** Ряд расходится. **11.14** Ряд расходится.

12.7 Ряд сходится абсолютно. **12.8** Ряд сходится условно. **12.9** Ряд сходится абсолютно. **12.10** Ряд расходится. **12.11** Ряд расходится. **12.12** Ряд расходится. **12.13** Ряд сходится абсолютно. **12.14** 2. **12.15** $|r_2| \leqslant 0,01$.

13.8 100. **13.9** $-\frac{1}{2a^2}$. **13.10** e. **13.11** $\frac{2}{3}$. **13.12** Ряд расходится. **13.13** Ряд сходится условно.

14.26 $-\frac{1}{x^2}$. **14.27** $-\sin x$. **14.28** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **14.29** $1-3x^2$. **14.30** $\cos x - -3\sin x$. **14.31** $\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$. **14.32** $\frac{x\ln 3\cos x\log_3 x - \sin x}{x\ln 3\log_3^2 x}$. **14.33** $\frac{2+e^x-xe^x}{(2+e^x)^2}$. **14.34** 0. **14.35** $-\frac{1}{1+x^2} + \ln x + 1 + \frac{x-\sin x\cos x}{(x\cos x)^2}$. **14.36** $5x^4 - 12x^2 + 2$. **14.37** $\frac{8}{3}x^{5/3}$. **14.38** $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **14.39** $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **14.40** $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$. **14.41** $x\operatorname{arctg} x$. **14.42** $3x^2\ln x$. **14.43** x^2e^x. **14.44** $\frac{(e^x-5\cos x)\sqrt{1-x^2}-4}{(e^x-5\sin x-4\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$. **14.45** $\frac{x}{2}(\sin(5x^2)+\sin(x^2))$. **14.46** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. **14.47** $\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$.

15.11 $y' = x^{\sin x}\cos x\ln x + \sin x x^{\sin x-1}$.
15.12 $\frac{x^3\cdot\sin x}{\ln x\cdot\operatorname{arctg} x}\left(\frac{3}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}\right)$. **15.13** $\frac{(2xe^y-3x^2)y}{1-x^2ye^y}$. **15.14** $-\frac{x}{y}$. **15.15** $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **15.16** $T: x-4y-5=0$, $N: 4x+y-3=0$. **15.17** $\left(\left(3; -\frac{15}{2}\right), \left(-2; \frac{10}{3}\right)\right)$. **15.18** $\theta_1 = -\operatorname{arctg} 0,6$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} 3$. **15.19** $t_0 = 8$с, $t_1 = 0$с, $t_2 = 4$с, $t_3 = 8$с. **15.20** $181,5$ эрг.

16.12 $\frac{5}{2}x\sqrt{x}dx$. **16.13** $\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)dx$. **16.14** $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$.
16.16 $2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$. **16.17** $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. **16.18** Да. **16.19** $-e^{-x}(x^2-6x+ +6)dx^3$. **16.20** $\frac{284}{(2-x)^5}dx^4$. **16.21** 0,02. **16.22** 2,0375. **16.23** $\approx 0,81$.

17.8 Теорема справедлива. **17.9** Теорема справедлива.
17.10 $a(1-\ln a)-b(1-\ln b)=(b-a)\ln\xi$, где $a<\xi<b$. **17.11** 0,5.
17.12 3. **17.13** 1. **17.14** 0. **17.15** 1. **17.16** $2/\pi$.

18.6 $y'(x)=e\left(\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg}5+\frac{12\ln\operatorname{tg}5}{\sin 10}+\frac{1}{5}\frac{\sin 1-\cos 1}{\sin^2 1}\right)$.
18.7 $dy=\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}\cdot a\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)dx$. **18.8** $y=\frac{1}{3}e^{x^3}$. **18.9** $y_1(3)=y_2(3)=$ $=34; y_1'(3)=y_2'(3)=26$. Кривые касаются в точке $(3;34)$; $y_1(-2)=$ $=y_2(-2)=4$, но $y_1'(-2)=-14$, $y_2'(-2)=11$ – кривые в точке $(-2;4)$ пересекаются, но не касаются. **18.10** $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln(x+e^x)=2$, $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$.

19.15 $2^x=1+x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\cdots+\frac{x^n\ln^n 2}{n!}+\cdots,\ x\in(-\infty;+\infty)$.
19.16 $\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n2^{2n+1}x^{2(n+1)}}{(2(n+1))}+\cdots,\ x\in(-\infty;+\infty)$.
19.17 $e^{2x}=1+2x+\frac{2^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-\infty;+\infty)$.
19.18 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}x-\frac{x^2}{2!}-\frac{\sqrt{3}}{3!}x^3+\cdots\right),\ x\in(-\infty;+\infty)$.
19.19 $\sqrt{9-x^2}=3\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{9}-\frac{1}{2^22!}\left(\frac{x^2}{9}\right)^2-\frac{1\cdot3}{2^33!}\left(\frac{x^2}{9}\right)^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^44!}\left(\frac{x^2}{9}\right)^4-\cdots\right)$, $x\in(-3;3)$. **19.20** $\ln(2+x)=x+1-\frac{(x+1)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n}+\cdots,$ $x\in(-2;0]$. **19.21** $\frac{x-3}{(x+1)^2}=-3+7x-11x^2+\cdots+(-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}+\ldots$, $x\in(-1;1)$. **19.22** 1. **19.23** $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$. **19.24** 0,7788. **19.25** 1,000. **19.26** 3,017. **19.27** 1,7918.

20.6 Критические точки $x=0$, $x=2$, $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(2)=$ $=-4$. Функция возрастает в $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, убывает в $(0;2)$. **20.7** Критических точек нет. Функция определена и монотонно возрастает при $x>0$. **20.8** Функция определена при $x\geqslant 0$, критическая точка $x=0$, функция монотонно возрастает при $x>0$. **20.9** Критические точки $x=0$, $x=\frac{8}{27}$, $y_{\max}=y(\frac{8}{27})=\frac{4}{27}$, $y_{\min}=y(0)=0$. Функция убывает в $(-\infty;0)$ и $(\frac{8}{27};+\infty)$, возрастает в $(0;\frac{8}{27})$. **20.10** Критическая точка $x=0$, экстремумов нет. Функция убывает в $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. **20.11** Критические точки $x=0$ и $x=2$, $y_{min}=y(2)=3$. Функция возрастает в $(-\infty;0)\bigcup(2;\infty)$, убывает в $(0;2)$.

21.6 $y''(0)=-6<0-\max$, $y''(2)>0-\min$, $y''(1)=0-$точка перегиба, график $y=f(x)$ выпуклый при $x\in(-\infty,1)$ и вогнутый при $x\in(1,\infty)$. **21.7** $y''(x>0)>0$ – кривая вогнутая. **21.8** $y''(x>0)<0$

– кривая выпуклая. **21.9** $y'' < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, график $y = f(x)$ выпуклый, точек перегиба нет. **21.10** $x = -\frac{1}{2}$– точка перегиба, график $y = f(x)$ выпуклый при $x < -\frac{1}{2}$, вогнутый при $x > -\frac{1}{2}$, $y''(0)$ не существует. **21.11** $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \bigcup (0; \infty)$ – кривая вогнутая. **21.14** $m = f(-1) = -4,\ M = f(0) = 0$.
21.15 $m = f(-2) = -20,\ M = f(4) = 16$.

22.8 Асимптот нет. График на рис.215. **22.9** Асимптот нет. График на рис.216. **22.10** Асимптот нет. График на рис.217. **22.11** Асимптот нет. График на рис.218. **22.12** Асимптоты $x = 0$ и $x+y = 1$. Точка перегиба $x = -\frac{1}{2}$. График на рис.219. **22.13** $D(y) = (-\infty; 0) \bigcup (0; \infty)$, функция общего вида, асимптоты $x = 0$ и $y = x$. Возрастает на $(-\infty; 0) \bigcup (2; \infty)$ убывает на $(0; 2)$, $y_{\min} = y(2) = 3$. Кривая вогнута на $(-\infty; 0) \bigcup (0; \infty)$. Точек перегиба нет. График на рис.220 **22.14** Угол равен наибольшему из чисел $\arccos \frac{1}{k}$ и $\operatorname{arctg} \frac{h}{d}$.

23.6 Асимптота $y = 1$, $y_{\min} = y(2) = -1$, график функции рис.221. **23.7** Асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$, $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^4}$. График на рис.222. **23.8** Асимптоты $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$. График функции на рис.223. **23.9** На $[0; 1]$ $M = y(1) = \frac{1}{e}$; $m = y(0) = 0$ на $[0; 3]$ $M = y(2) = \frac{4}{e^2}$, $m = y(0) = 0$, на $[-1; 2]$ $M = y(-1) = e$, $m = y(0) = 0$. **23.10** Каждое слагаемое равно $\frac{a}{2}$.

24.9 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. **24.10** $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. **24.11** $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ -3 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

24.12 $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. **24.13** $\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$. **24.14** $\begin{matrix} M_{12} = -6 \\ M_{22} = 3 \\ A_{12} = 6 \\ A_{22} = 3. \end{matrix}$ **24.15** 2.

24.16 -3. **24.17** 1.

25.5 2. **25.6** 3. **25.7** 3. **25.8** 3. **25.9** $\begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 & 7/10 \\ 0 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$.

25.10 $\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

26.6 $x = 2,\ y = 3,\ z = -2$. **26.7** $x = -3,\ y = 2,\ z = -1$. **26.8** $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2$. **26.9** Система несовместна — решений нет.

27.4 $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = -3$. **27.5** Система несовместна — решений нет. **27.6** Система совместна и неопределена $x_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}x_3$, $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x_3$, $x_4 = \frac{7}{20} + \frac{13}{20}x_3$.

28.19 $\overline{AM} = \frac{5\overline{a}+\overline{c}}{6}$. **28.21** $B(2;-6;8)$. **28.22** $2\overline{a} - 3\overline{b} = -8\overline{i} - 3\overline{j} + 10\overline{k}$. **28.23** $\overline{e_{1,2}} = \pm(-\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}),\ \cos\alpha = -\frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

28.25 $\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **28.26** $4\sqrt{2}$. **28.27** Тупой. **28.28** $-\sqrt{2}$. **28.29** $7,\ -\frac{15}{2}$ **28.30** $\cos(\overline{AC};\overline{BD}) = -\frac{23}{9\sqrt{10}}$. **28.31** $\cos B = \frac{2\sqrt{10}}{10}$.

29.12 $20\overline{i} + 14\overline{j} + 2\overline{k}$. **29.13** $25\sqrt{3}$. **29.14** $\{h_a = \frac{\sqrt{42}}{3},\quad h_b = \frac{\sqrt{70}}{5}\}$. **29.15** $\{\pm(-2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k})\}$. **29.16** $\{h_a = 1;\quad h_b = \frac{3\sqrt{5}}{5},\quad h_c = \frac{3\sqrt{2}}{2}\}$. **29.17** 5. **29.18** -5. **29.19** 51. **29.20** Некомпланарны. **29.21** Лежат. **29.22** $\frac{1}{2}$. **29.23** 11.

30.11 $\frac{7}{\sqrt{11}}$. **30.12** $x + 7z + 22 = 0$. **30.13** $2y - 5z + 10 = 0$.

31.12 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$. **31.13** $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$. **31.14** $\alpha = 90°$, $\beta = 45°, \gamma = 135°$. **31.15** $M'(1;-1;4)$. **31.16** $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

32.5 200. **32.6** Не принадлежит. **32.7** $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$. **32.8** $5x = -\frac{5}{2}(y-1) = -(z-2)$

33.8 $6 + 2i,\ 2 + 4i,\ 11 + 2i,\ 1 + 2i$. **33.9** $-1 \pm 3i,\ \frac{-1\pm i\sqrt{11}}{3}$. **33.10** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};\ 2e^{i(\pi+2\pi k)} = 2(\cos\pi + i\sin\pi);\ 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)} = = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **33.11** -8. **33.12** $\pm i,\ \frac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2},\ -i,\ \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$.

34.8 $x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{3x+2}{x^2-1} + C$. **34.9** $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x+1}$. **34.10** $\frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)^2} + \frac{E}{x+3}$. **34.11** $\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)}$. **34.12** $-\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x+1}$. **34.13** $-\frac{2}{5x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{5(x-5)}$. **34.14** $\frac{1}{2x} - \frac{x+4}{2(x^2+4x+8)}$.

Рисунки к ответам

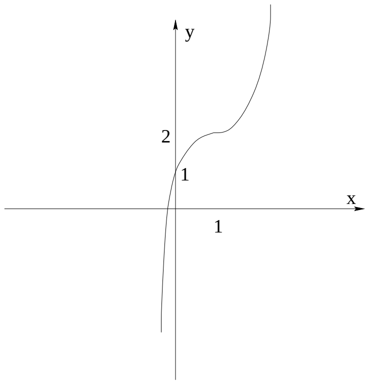


Рис. 180. График функции $y = (x-1)^3 + 2$

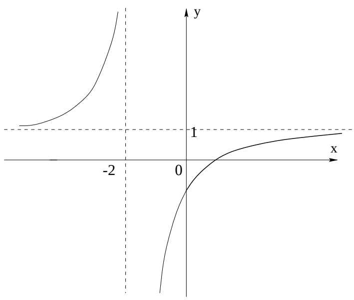


Рис. 181. График функции $y = \frac{x-2}{x+2}$

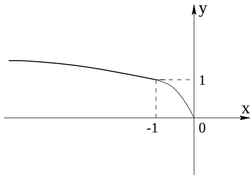


Рис. 182. График функции $y = \sqrt{-x}$

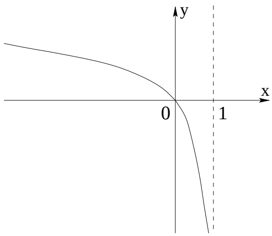


Рис. 183. График функции $y = \ln(1 - x)$

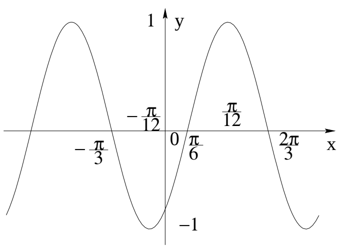


Рис. 184. График функции $y = 5\sin(2x - \pi/3)$

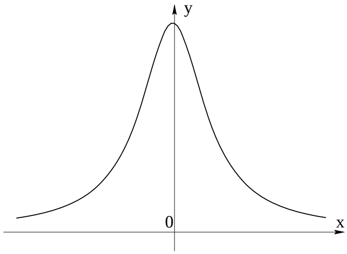


Рис. 185. График функции $y = \frac{1}{x^2+1}$

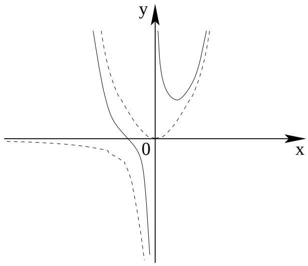


Рис. 186. График функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$

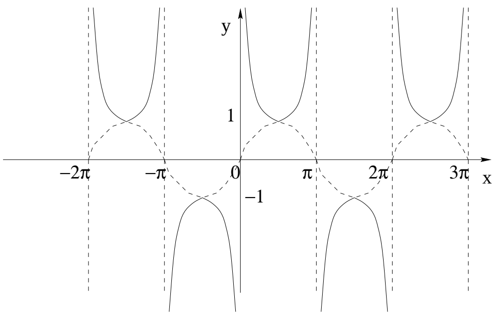


Рис. 187. График функции $y = \frac{1}{\sin x}$

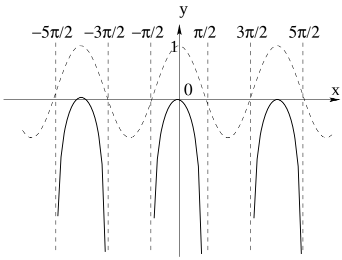


Рис. 188. График функции $y = \lg(\cos x)$

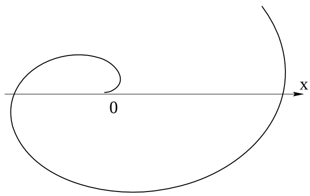


Рис. 189. График функции $r = \varphi$

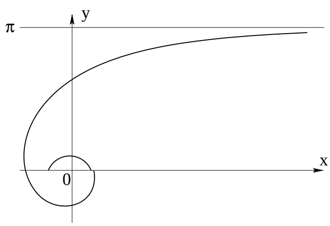


Рис. 190. График функции $r = \frac{\pi}{\varphi}$

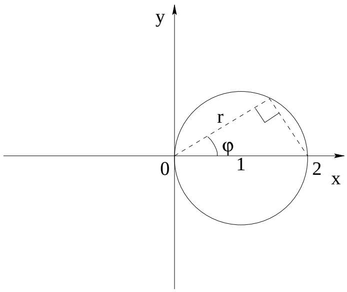


Рис. 191. График функции $r = 2\cos\varphi$

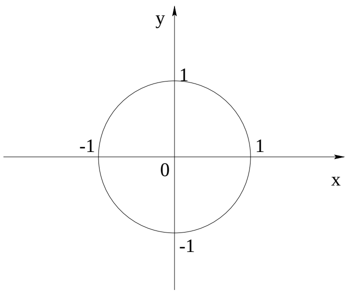


Рис. 192. График функции $r = 1$

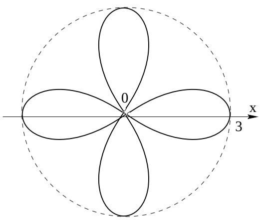


Рис. 193. График функции $r = 3\cos 4\varphi$

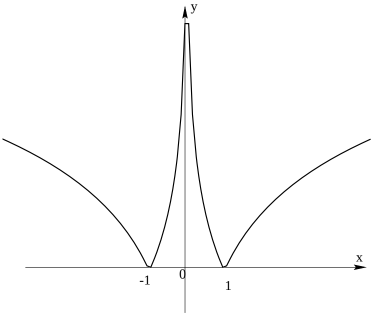


Рис. 194. График функции $y = |\lg|x||$

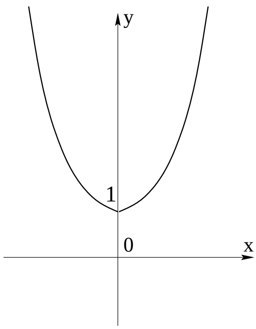


Рис. 195. График функции $y = 2^{|x|}$

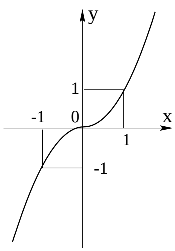


Рис. 196. График функции $y = x \cdot |x|$

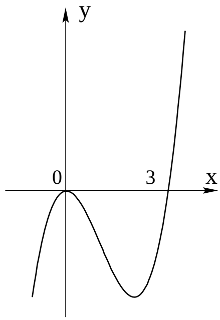


Рис. 197. График функции $y = x^3 - 3x^2$

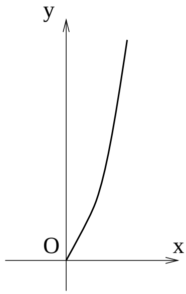


Рис. 198. График функции $y = x(1 + \sqrt{x})$

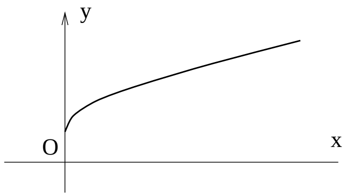


Рис. 199. График функции $y = 1 + \sqrt{x}$

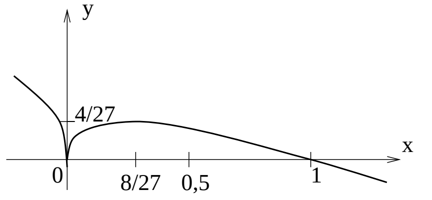


Рис. 200. График функции $y = \sqrt[3]{x^2} - x$

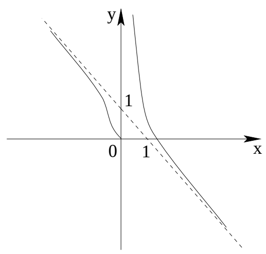


Рис. 201. График функции $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

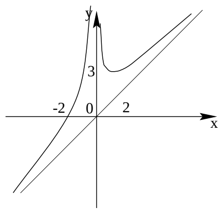


Рис. 202. График функции $y = (x^3 + 4)/x^2$

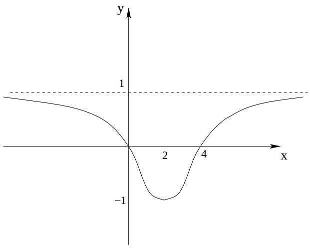


Рис. 203. График функции $y = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$

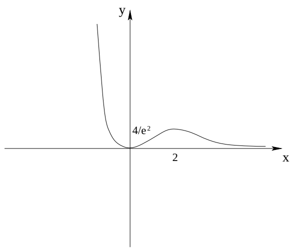


Рис. 204. График функции $y = x^2 e^{-x}$

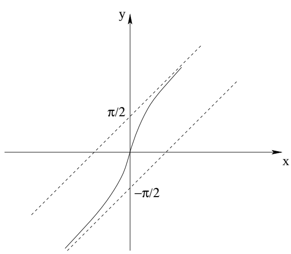


Рис. 205. График функции $y = x + \operatorname{arctg} x$

Литература

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М. : Наука, 1984.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985.

3. Бугров Я. С. , Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М. : Наука, 1980; 1984; 1988.

4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М. : Наука, 1980; 1988.

5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: Задачник. - М. : Наука, 1982.

6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. - М. : Высш. шк. , 1986. - Ч. 1, 2.

7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. - М. : Наука, 1981.

8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. - М. : Наука, 1983.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. - М. : Наука, 1980. - Ч. 1; 1982. - Ч. 2.

10. Демидович Б.П.(редактор) Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗОВ. - М. : Наука, 1996.

11. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. - СПб. : Лань, 2011.

12. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. - М. : Высш. шк., 1981. - Т. 1, 2.

13. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. - М. : Высш. шк., 1988. - Т. 1 - 3.

14. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. - М. : Наука, 1989.

15. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - М. : Наука, 1984.

16. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. - М. : Наука, 1986.

17. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / типовые расчеты. — СПб. : Лань, 2013.

18. Курс высшей математики. Под ред. В.Б.Миносцева, ч-I, 8-ое издание. М., РИЦ МГИУ, 2007.

19. Никольский С. М. Курс математического анализа. - М. : Наука, 1983. - Т. 1, 2.

20. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для втузов. - М. : Высш. шк., 1972.

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Aa – а	Bb – бэ	Cc – цэ	Dd – дэ	Ee – е	Ff – эф
Gg – же	Hh – аш	Ii – и	Jj – жи	Kk – ка	Ll – эль
Mm – эм	Nn – эн	Oo – о	Pp – пэ	Qq – ку	Rr – эр
Ss – эс	Tt – тэ	Uu – у	Vv – вэ	Ww – дубль-вэ	Xx – икс
Yy – игрек	Zz – зет				

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

$A\alpha$ – альфа	$B\beta$ – бэта	$\Gamma\gamma$ – гамма	$\Delta\delta$ – дельта	$E\epsilon$ – эпсилон
$Z\zeta$ – дзэта	$H\eta$ – эта	$\Theta\theta$ – тэта	$I\iota$ – иота	$K\kappa$ – каппа
$\Lambda\lambda$ – лямбда	$M\mu$ – мю	$N\nu$ – ню	$\Xi\xi$ – кси	Oo – омикрон
$\Pi\pi$ – пи	$R\rho$ – ро	$\Sigma\sigma$ – сигма	$T\tau$ – тау	$\Upsilon\upsilon$ – ипсилон
$\Phi\phi$ – фи	$\Xi\chi$ – хи	$\Psi\psi$ – пси	$\Omega\omega$ – омега	

Предметный указатель

Алгебраического форма комплексного числа, 490
Формула Муавра, 498

Абсолютно сходящийся ряд, 199
Алгебраическое дополнение, 366
Аргумент комплексного числа, 493
Асимптота графика функции, 324
Бесконечно большая функция, 123
Бесконечно малая функция, 120
Биномиальный ряд, 286
Вектор, 402
Вектор N-мерный, 470
Векторное произведение двух векторов, 431
Векторное уравнение плоскости, 445
Векторное уравнение пространственной прямой, 455
Вертикальная асимптота, 324
Вогнутая функция, 314
Возведение в степень комплексного числа, 497
Второй признак сравнения рядов, 186
Выпуклая функция, 314
Гармонический ряд, 187
Геометрическая прогрессия, 187
Геометрический смысл дифференциала, 245
Гипербола, 94
Двойное векторное произведение, 439
Действительная часть комплексного числа, 490
Действия над комплексными числами, 491
Деление отрезка в данном отношении, 417
Диаграммы Эйлера, 11
Дифференциал функции, 243, 244
Дифференциалы высших порядков, 249
Дифференцируемость функции, 213
Достаточное условие возрастания (убывания) функции, 298
Достаточное условие выпуклости (вогнутости), 315
Достаточные условия точки перегиба, 317
Достаточный признак расходимости ряда, 180
Достаточный признак существования экстремума по высшим производным, 311
Достаточный признак существования экстремума по первой производной, 302
Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда, 197
Извлечение корня из комплексного числа, 497
Инвариантность формы первого дифференциала, 245
Канонические уравнения пространственной прямой, 456
Касательная к графику функции, 209

Кванторы общности и существования, 13
Коллинеарные векторы, 402
Компланарные векторы, 431
Комплексная плоскость, 492
Комплексные числа, 490
Координаты вектора, 416
Координаты точки в пространстве, 33
Координаты точки на плоскости, 32
Корень уравнения, 342
Кривые второго порядка, 91
Критическая точка, 301
Левая тройка векторов, 431
Левосторонний предел, 111
Логарифмическая производная, 232
Матрица, 359
Метод Ньютона, 348
Метод неопределённых коэффициентов, 511
Метод половинного деления, 347
Метод произвольных значений, 513
Минор, 365
Мнимая единица, 490
Мнимая часть комплексного числа, 490
Многочлен Тейлора, 279
Множество, 10
Множество $\mathbb{J}$ иррациональных чисел, 18
Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, 16
Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, 17
Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, 19
Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, 17
Модуль вектора, 402
Модуль действительного числа, 30
Модуль комплексного числа, 493
Наклонная асимптота, 325
Направляющие косинусы вектора, 418
Направляющий вектор прямой, 455
Некомпланарные векторы, 431
Необходимое и достаточное условия, 14
Необходимое условие возрастания монотонности функции, 297
Необходимое условие точки перегиба, 317
Необходимый признак сходимости ряда, 179
Необходимый признак экстремума, 300
Непрерывность сложной функции, 162
Непрерывность функции, 160
Неявная функция, 46
Нормальный вектор плоскости, 444
Область сходимости функционального ряда, 265
Обобщенный гармонический ряд, 187
Обратная матрица, 375
Общая схема исследования функции и построения её графика, 329
Общие уравнения пространственной прямой, 455
Объединение множеств, 12
Односторонние производные, 212
Операции над множествами, 11
Определитель, 364, 365
Основные правила дифференцирования, 219
Остаточный член формулы Тейлора, 280
Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, 281
Отделение корня, 342
Парабола, 96
Параллельный перенос осей координат, 37
Параметрические уравнения пространственной прямой, 456
Первый признак сравнения рядов, 185
Пересечение множеств, 11
Плоскость, 444
Поворот осей координат, 40

Показательная форма комплексного числа, 493
Полярные координаты, 38
Понятие числовой функции, 45
Последовательность, 105
Правая тройка векторов, 431
Правило Лопиталя, 257
Правильная дробь, 510
Правильно сходящийся ряд, 269
Правосторонний предел, 111
Предел последовательности, 106
Предел функции, 110
Предел функции при $x \to +\infty$, 108
Признак Даламбера, 188
Признак Коши, 191
Признак Лейбница, 196
Признак подобия рядов, 188
Производная функции, 211
Производные высших порядков, 248
Простейшими дроби, 510
Пучок плоскостей, 462
Радиус-вектор, 416
Разложение рациональных дробей, 516
Размерность векторного пространства, 472
Разность векторов, 404
Разность множеств, 13
Ранг матрицы, 379
Расстояние между двумя точками, 34
Расстояние от точки до плоскости, 449
Рациональные дроби, 506
Решение линейных систем методом Гаусса, 391
Ряд Маклорена, 283
Ряд Тейлора, 283
Свойства проекции вектора на ось, 408
Свойства числовых рядов, 177
Связка плоскостей, 447
Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции, 213
Система линейных уравнений, 385
Скалярное произведение двух векторов, 420
Сложение матриц, 361
Сложная функция, 51
Смешанное произведение трёх векторов, 435
Собственные значения матрицы, 483
Составляющая вектора по оси, 408
Сравнение бесконечно малых функций, 141
Стационарная точка, 301
Степенной ряд, 270
Сумма векторов, 403
Сумма ряда, 176
Сходящийся ряд, 176
Таблица производных, 226
Теорема о промежуточной функции, 127
Теорема Безу, 507
Теорема Больцано-Коши, 168
Теорема Коши, 256
Теорема Кронекера–Капелли, 387
Теорема Лагранжа, 255
Теорема Ролля, 254
Теорема Ферма, 253
Теорема о пределе монотонной ограниченной функции, 114
Теорема о связи между производной и дифференциалом, 243
Теорема о существовании обратной матрицы, 375
Теорема о существовании обратной функции, 58
Теоремы о бесконечно малых функциях, 121
Теоремы о пределах, 124
Теоремы о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями, 123
Теоремы о функции, пределе и бесконечно малой, 124
Точка перегиба, 315
Точки разрыва функции, 164
Тригонометрическая форма комплексного числа, 493

Угол между векторами, 406
Угол между плоскостями, 448
Угол между прямыми, 459
Умножение матриц, 362
Уравнение плоскости, 444, 446
Уравнение плоскости, проходящей через три точки, 447
Условно сходящийся ряд, 199
Формула Тейлора, 280
Формулы Крамера, 389
Функциональный ряд, 265
Частичная сумма ряда, 174
Числовая ось, 19
Числовой ряд, 174
Числовые промежутки, 20
Экстремум функции, 299
Элементарные преобразования матриц, 379
Эллипс, 92

Виктор Георгиевич ЗУБКОВ,
Владимир Анатольевич ЛЯХОВСКИЙ,
Анатолий Иванович МАРТЫНЕНКО,
Вениамин Борисович МИНОСЦЕВ

КУРС МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ЧАСТЬ 1
Аналитическая геометрия.
Пределы и ряды.
Функции и производные.
Линейная и векторная алгебра

Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 25.07.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 28,56. Тираж 1000 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru