СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Математическое программирование

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Под общей редакцией
А. В. КУЗНЕЦОВА
и *Р. А. РУТКОВСКОГО*

Издание третье,
стереотипное

ЛАНЬ®

· САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР ·
2010

ББК 22.18я73
С 23

С 23 Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие / Под общ. ред. А. В. Кузнецова и Р. А. Рутковского. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1057-6

Рассмотрены все темы дисциплины «Математическое программирование»: линейное программирование, теория двойственности, графы и потоки на сетях, включая транспортные задачи, сетевое планирование, теория матричных игр, выпуклое и динамическое программирование, равновесие экономической системы и оптимизация производства, линейное программирование в системе реального экономического менеджмента. По каждой теме даны необходимые теоретические сведения, примеры решения типовых практических задач, индивидуальные контрольные задания в тридцати вариантах.

Материал задачника согласован с учебником «Высшая математика: математическое программирование» А. В. Кузнецова, В. А. Саковича, Н. И. Холода.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей вузов, также будет полезно специалистам, работающим в сфере экономики, планирования и управления, в финансово-банковском и бухгалтерско-аудиторском деле.

ББК 22.18я73

Коллектив авторов:
А. В. КУЗНЕЦОВ, В. А. САКОВИЧ, Н. И. ХОЛОД,
Н. М. СЛУКИН, Л. Ф. ДЕЖУРКО, М. А. ХОТОМЦЕВА

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Данное учебное пособие написано в полном соответствии с действующей программой по дисциплине «Математическое программирование» и предназначено для студентов экономических специальностей вузов. Оно согласовано с выпущенным ранее учебником «Высшая математика: Математическое программирование» под общей редакцией А. В. Кузнецова (2-е изд., перераб. и доп. Мн.: Выш. шк., 2001) и составляет с ним единый комплекс. Расположение примеров и задач в пособии соответствует последовательности изложения теоретического материала в учебнике. В пособии приводятся примеры и задачи по всем основным разделам дисциплины: задачи линейного программирования; задачи на применение теории двойственности; решаемые игровыми методами; на графы и потоки на сетях, включая транспортные задачи; возникающие при сетевом планировании; с условиями целочисленности переменных; нелинейные, решаемые классическими и современными методами; производственные динамического характера и др. Большинство задач практического плана, а потому предполагают предварительное составление экономико-математических моделей.

В начале каждой главы даны краткие, но исчерпывающие теоретические сведения, необходимые для решения всех последующих примеров и задач. Далее рассматриваются примеры типовых практических задач с подробными пояснениями, а нередко и с экономико-математическим анализом полученных результатов. Где это возможно, решения сопровождаются геометрическими интерпретациями. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами, а к некоторым даются указания по их решению. Во многих содержательных задачах числовые данные носят условный характер и подобраны так, чтобы в процессе решения встретилось как можно меньше рутинной вычислительной работы, отвлекающей от экономической сути задачи.

Предполагается, что в учебном процессе будут широко использоваться пакеты прикладных программ, реализующих изучаемые методы оптимизации. Однако из практики преподавания дисциплины «Математическое программирование» не следует исключать оптимизационные задачи небольшой размерности, предназначенные для решения вручную. Решение вручную позволяет обучающимся глубже ознакомиться с чисто математическим смыслом рассматриваемых методов и сознательно осваивать математические идеи этих методов, что имеет важное познавательное значение.

Во второе издание пособия включен новый материал. В главе 9 обосновывается целесообразность системного подхода при использовании математических моделей в экономической практике. Материал главы 10 будет полезен тем, кто интересуется проблемами программного обеспечения изучаемой дисциплины.

Основным вычислительным аппаратом в книге являются гауссовы исключения. Поскольку в учебной практике вузов в настоящее время используются пособия, в которых в качестве вычислительного применяется аппарат жордановых исключений, во второе издание данной книги включено Приложение, в котором даны подробные сведения о жордановых исключениях и сферах их применения.

Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета за замечания и пожелания, высказанные при заинтересованном обсуждении второго издания пособия. Авторы глубоко признательны также рецензенту — коллективу кафедры высшей математики № 2 Белорусского национального технического университета, особенно ее заведующему кандидату физико-математических наук, доценту А. Д. Корзникову.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование в применении к анализу и управлению экономикой представляет собой теорию эффективного использования ресурсов. Она применяется для определения оптимальных планов, решения проблемы наилучшего сочетания желаемого и возможного.

Математическое программирование как экономическая теория было востребовано логикой научно-технического развития на протяжении по крайней мере последних 50 лет. Как самостоятельная научная дисциплина эта теория сформировалась в течение десятилетия, начиная с первой публикации советского математика Л. В. Канторовича и кончая работами американца Дж. Данцига, относящимися к 1948 г. В дальнейшем математическое программирование развивалось под мощным воздействием успехов в создании средств обработки информации.

Без вычислительной техники прикладное значение математического программирования было бы небольшим. Но и сама вычислительная техника развивалась благодаря массовому появлению таких прикладных оптимизационных задач, решение которых было абсолютно немыслимым при отсутствии возможности выполнять гигантский объем вычислений. Именно чудовищное быстродействие, по выражению Н. Н. Моисеева, электронных вычислительных машин позволяет ставить прикладные оптимизационные задачи и получать их решение. Эта характеристика была дана в начале 70-х гг. XX в., когда быстродействие доступных для широкого применения ЭВМ измерялось десятками тысяч, в лучшем случае сотнями тысяч операций в секунду. Именно в это время на волне поразительных достижений вычислительной техники и прикладной математики дух оптимизации проник и в экономическую науку. Достаточно вспомнить эпопею создания в СССР нескольких тысяч АСУ. Несмотря на громадные затраты и сравнительно небольшой практический эффект от использования созданных АСУ, теория оптимальных решений в области экономики заняла свое почетное место. Основоположники математического программирования получили мировое признание и были удостоены Нобелевской премии по экономике «за развитие теории эффективного использования ресурсов». Попутно заметим, что последнее любопытно в двух отношениях. С одной стороны, Л. В. Канторович — единственный в истории выдающийся математик, удостоенный столь высокой чести, с другой — это единственный случай присуждения престижной награды в области экономики представителю советской науки. Как известно, в области математики Нобелевская премия не присуждается.

Быстродействие современных компьютеров увеличилось не менее чем в десятки тысяч раз по сравнению с быстродействием ЭВМ 70-х гг. Кроме того, если «ретро-ЭВМ» занимала помещение, сравнимое с большим спортзалом, а от системы ее охлаждения могла работать баня, то даже больший по вычислительной мощности программируемый калькулятор помещается на ладони и работает от миниатюрной батарейки. Надежность работы ЭВМ еще середины 70-х гг. была настолько низкой, что редко удавалось добиться ее работы без сбоев в течение хотя бы получаса в условиях кондиционирования, сравнимых разве что с реанимационной палатой, и под наблюдением бригады специалистов-электронщиков. Этот период развития и использования ЭВМ, который можно назвать романтическим, завершился в начале 80-х гг. с появлением достаточно мощного настольного компьютера.

Современные компьютеры в миллионы раз превосходят «ретро-ЭВМ» как по быстродействию, так и по емкости памяти, работая без сбоев годами. Их включение и выключение по сложности не превышают аналогичные манипуляции с настольной лампой. Все более совершенное программное обеспечение делает работу на современном компьютере доступной широкому кругу пользователей, не имеющих глубокой специальной подготовки или даже вовсе без таковой.

Появилось сообщение о создании суперкомпьютера, работающего с частотой примерно квадриллион циклов в секунду, что в миллионы раз превышает быстродействие широко доступных современных настольных компьютеров. Нет сомнений в том, что в ближайшее время настольные компьютеры достигнут возможностей сегодняшнего суперкомпьютера. Все это не может не воздействовать на широту и эффективность применения информационных технологий, в том числе в управлении экономикой.

На фоне возросших технических возможностей решения оптимизационных задач не может не измениться подход к их применению в управлении экономикой, как впрочем и в любых других сферах.

Уходят в прошлое времена, когда все исходные данные задачи линейного программирования вводились вручную. В лучшем случае применение подобной «информационной технологии» позволяет решать задачи, содержащие до нескольких сот переменных, да и это является рекордом. Сегодня уже очевидно, что такой путь годится только для изолированных от практики упражнений. Причин этому множество: трудоемкость ввода данных, неизбежность большого числа ошибок ввода, дальнейшее обнаружение которых проблематично, информационная непротиворечивость другим задачам системы управления, трудности актуализации данных и т. п. Все это приводит к тому, что к моменту получения решения задачи оно уже никому не нужно, во всяком случае для практического применения. В учебной же практике часто вполне достаточным является решение задач линейного программирования всего лишь с несколькими переменными, что не требует сложной технологии.

Постоянное увеличение мощности компьютеров делает возможным решение оптимизационных задач все большей размерности, что приводит к усложнению информационного обеспечения соответствующих экономико-математических моделей. При емкости основной памяти компьютера свыше нескольких мегабайт становится реальным решение задачи линейного программирования до 10 тысяч переменных с примерно таким же числом ограничений. Надо сказать, что необходимость решения задач такой размерности ощущается уже сегодня, особенно в связи с применением в экономике теории графов и постановкой оптимизационных задач на сетях. Матрица ограничений такой задачи содержит 100 миллионов элементов. Достаточно представить, сколько времени занял бы только визуальный контроль исходных данных, не говоря уже о их первичном вводе, чтобы стала очевидной бессмысленность подобного подхода.

Учитывая вышесказанное, приходим к логическому выводу, что в курсе математического программирования целесообразно уделить больше внимания алгоритмическим методам формирования исходных данных для оптимизационных задач с целью сведения к минимуму первичного ввода и даже полного его исключения. Можно указать ряд путей достижения этой цели.

Во-первых, более полная реализация системного подхода к формированию информационного обеспечения систем управления экономикой позволяет снизить расходы на информационное обеспечение отдельных задач. В качестве примера в данной книге представлена объединенная схема совместного решения задачи линейного программирования и анализа экономического равновесия в рамках модели В. В. Леонтьева. В связи с этим приводится необходимый теоретический материал.

Во-вторых, в практику управления экономикой следует более широко внедрять технологии искусственного интеллекта, направленные на автоматическое формирование математического описания объекта управления.

1

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Примеры экономических задач линейного программирования

Линейное программирование — это раздел высшей математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. Однако для исследования линейной функции многих переменных на условный экстремум нельзя применить хорошо разработанные методы математического анализа.

Действительно, пусть необходимо исследовать на экстремум линейную функцию $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при линейных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $(i = \overline{1, m})$. Необходимым условием экстремума является $\partial Z/\partial x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$. Но $\partial Z/\partial x_j = c_j$. Отсюда $c_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$. Так как все коэффициенты линейной функции не могут быть равны нулю, то внутри области, образованной системой ограничений, экстремальные точки не существуют. Они могут быть только на границе области. Для решения таких задач разработаны специальные методы линейного программирования, которые особенно широко применяются в экономике.

Рассмотрим примеры линейных экономических задач.

Пример 1.1. При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используются токарные и фрезерные станки, а также сталь и цветные металлы. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 единиц соответственно токарного и фрезерного оборудования (в станко-часах) и 410 и 20 единиц стали и цветных металлов (в килограммах). Для производства единицы изделия $И_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12 400 и 6800 станко-часами оборудования, 640 и 840 кг материалов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ — 6 тыс. ден. ед., $И_2$ — 16 тыс. ден. ед. Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности — прибыль);

3) определить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль при условии, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Решение. 1. Обозначим через x_1 число изделий $И_1$, через x_2 — изделий $И_2$, через Z — суммарную прибыль от реализации произведенных изделий, тогда исходные данные удобно представить в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ресурсы	Затраты на единицу изделия		Объем ресурса	Вид ограничения
	$И_1$	$И_2$		
Станки, станко-ч:				
токарные	300	400	12 400	$\le$
фрезерные	200	100	6800	$=$
Сталь, кг	10	70	640	$\le$
Цветные металлы, кг	20	50	840	$\le$
Прибыль, тыс. ден. ед.	6	16		
План выпуска, шт.	x_1	x_2		

2. Так как каждое изделие $И_1$ дает прибыль 6 тыс. ден. ед., а таких изделий изготавливается x_1 ед., то все изделия $И_1$ дадут прибыль $6x_1$; аналогично изделия $И_2$ обеспечат прибыль $16x_2$. Суммарную прибыль можно записать в виде

$$Z = 6x_1 + 16x_2. \tag{1.1}$$

Токарного оборудования на изделие $И_1$ требуется 300 станко-ч, на изделие $И_2$ — 400 станко-ч. Тогда для изготовления x_1 изделий $И_1$ и x_2 изделий $И_2$ потребуется токарного оборудования $300x_1 + 400x_2$ (станко-ч). Так как общий фонд рабочего времени токарных станков не может превышать 12 400 станко-ч, должно выполняться неравенство $300x_1 + 400x_2 \le 12\,400$. Аналогично можно записать условия, налагаемые на фонд рабочего времени фрезерных станков ($200x_1 + 100x_2 \le 6800$) и лимитирующие материалы (по стали $10x_1 + 70x_2 \le 640$, по цветным металлам $20x_1 + 50x_2 \le 840$).

Итак, искомый план задачи $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ должен удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\left.\begin{aligned} 300x_1 + 400x_2 &\le 12\,400,\\ 200x_1 + 100x_2 &\le 6800,\\ 10x_1 + 70x_2 &\le 640,\\ 20x_1 + 50x_2 &\le 840. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Переменные x_1 и x_2 не могут быть выражены отрицательными числами, поэтому

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{1.3}$$

План $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений (1.2) и условию неотрицательности (1.3), называется *допустимым*. Допустимый план, для которого целевая функция (1.1) принимает максимальное значение, называется *оптимальным*.

Линейная функция (1.1), максимум которой надо определить, вместе с системой ограничений (1.2) и условием неотрицательности (1.3) образуют *математическую модель задачи*. Так как функция (1.1) линейная, а система (1.2) содержит только линейные ограничения, то задача (1.1) —(1.3) является *задачей линейного программирования* (ЗЛП).

3. Как решить задачу линейного программирования — будет показано в дальнейшем. В данном же случае дополнительное требование — полное использование фонда рабочего времени фрезерных станков — позволяет решать задачу с помощью простых рассуждений. Для этого выразим x_2 из уравнения $200x_1 + 100x_2 = 6800$. Получим $x_2 = 68 - 2x_1$. Подставив полученное выражение вместо x_2 в функцию (1.1) и остальные ограничения (1.2), получим:

$$\max Z = 6x_1 + 16(68 - 2x_1);$$

$$\left.\begin{aligned} 300x_1 + 400(68 - 2x_1) &\le 12400, \\ 10x_1 + 70(68 - 2x_1) &\le 640, \\ 20x_1 + 50(68 - 2x_1) &\le 840, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 = 68 - 2x_1 &\ge 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда после преобразования имеем:

$$\max Z = 1088 - 26x_1;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\ge 29{,}6, \\ x_1 &\ge 31\frac{9}{13}, \\ x_1 &\ge 32, \\ x_1 &\ge 0, \\ x_1 &\le 34. \end{aligned}\right\}$$

Окончательно находим:

$$\max Z = 1088 - 26x_1;$$
$$32 \le x_1 \le 34.$$

Очевидно, что $Z = 1088 - 26x_1$ принимает наибольшее значение, если $26x_1$ — наименьшее из промежутка $32 \le x_1 \le 34$, т. е. при $x_1 = 32$. При этом $x_2 = 68 - 2 \cdot 32 = 4$. Значение функции Z будет равно $1088 - 26 \cdot 32 = 6 \cdot 32 + 16 \cdot 4 = 256$ (тыс. ден. ед.).

Итак, если изготовить 32 изделия $И_1$ и 4 изделия $И_2$, то прибыль будет максимальной и составит 256 тыс. ден. ед.

Пример 1.2. Выполнить заказ по производству 32 изделий $И_1$ и 4 изделий $И_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ по производству изделий $И_1$ и $И_2$ составляет соответственно 4 и 2 изделия в единицу времени, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ед. Производительность бригады $Б_2$ — соответственно 1 и 3, а ее фонд рабочего времени — 4 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 тыс. ден. ед., для бригады $Б_2$ — 15 и 30 тыс. ден. ед. Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи по показателю затрат на выполнение заказа;

3) найти оптимальный план размещения заказа при дополнительном требовании: фонд рабочего времени бригады $Б_2$ должен быть полностью использован.

Решение. 1. Обозначим через x_{ij} количество изделий $И_j$ ($j = 1,2$), изготавливаемых бригадой $Б_i$ ($i = 1, 2$). Тогда исходные данные удобно записать в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2

Бригада	Производительность бригад и затраты на производство				Фонд рабочего времени
	$И_1$		$И_2$		
$Б_1$	4	9	2	20	
	x_{11}		x_{12}		9,5
$Б_2$	1	15	3	30	
	x_{21}		x_{22}		4
Величина заказа	32		4		

2. Составим математическую модель задачи. Целевая функция описывает затраты на выполнение заказа:

$$\min Z = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22}$$

при ограничениях:

на выполнение заказа (заказ должен быть выполнен)

$$x_{11} + x_{21} = 32,$$
$$x_{12} + x_{22} = 4,$$

на лимит рабочего времени

$$x_{11}/4 + x_{12}/2 \leq 9{,}5,$$
$$x_{21}/1 + x_{22}/3 \leq 4.$$

Условие неотрицательности имеет вид

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2).$$

3. Решим задачу при условии, что фонд рабочего времени бригады $Б_2$ должен быть полностью использован. Математическая модель задачи примет следующий вид:

$$\min Z = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22};$$

$$\left.\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} = 32,\\ &x_{12} + x_{22} = 4,\\ &x_{11}/4 + x_{12}/2 \le 9{,}5,\\ &x_{21}/1 + x_{22}/3 = 4, \end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2).$$

Решим систему, составленную из первого, второго и четвертого ограничительных уравнений относительно любых трех неизвестных, например x_{11}, x_{12} и x_{21}. Получим

$$\left.\begin{aligned} x_{11} &= 28 + x_{22}/3 \ge 0,\\ x_{12} &= 4 - x_{22} \ge 0,\\ x_{21} &= 4 - x_{22}/3 \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \le x_{22} \le 4.$$

Подставив x_{11} и x_{12} в третье ограничение-неравенство системы, получим $-6/5 \le x_{22}$. Так как $x_{22} \ge 0$, то $0 \le x_{22} \le$ ≤ 4.

Выразим целевую функцию через x_{22}:

$$Z = 9(28 + x_{22}/3) + 20(4 - x_{22}) + 15(4 - x_{22}/3) + 30x_{22} = \\ = 392 + 8x_{22}.$$

Очевидно, что Z достигает минимума при $0 \le x_{22} \le 4$, когда $x_{22} = 0$. Окончательно получаем: $x_{11}^* = 28$, $x_{12}^* = 4$, $x_{21}^* = 4$, $x_{22}^* = 0$, $Z_{\min} = 392$.

Итак, затраты на выполнение заказа будут минимальными и составят 392 тыс. ден. ед., если бригада $Б_1$ изготовит 28 изделий $И_1$ и все 4 изделия $И_2$, а бригада $Б_2$ — лишь 4 изделия $И_1$.

Читателю предлагается найти другое решение, приняв за неизвестную x_{ij} время изготовления бригадой $Б_i$ изделия $И_j$.

О т в е т: $\mathbf{x}^* = (7;\ 2;\ 4;\ 0)$; $Z_{\min} = 392$.

Пример 1.3. Технологическому отделу завода нужно решить задачу о приготовлении не менее 5 т сплава для производства деталей. Сплав приготавливается из чистой стали и отходов цветных металлов. Расход чистой стали не должен превышать 4 т, а цветных металлов — 6 т. Отношение массы цветных металлов к массе стали в сплаве не должно быть больше, чем 7 : 8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 ч, при этом на 1 т стали уходит 4,5 ч, а на 1 т цветных металлов — 2 ч производственного времени. Стоимость 1 т стали — 3 ден. ед., цветных металлов — 5 ден. ед. Требуется:

1) построить математическую модель задачи, на основе которой можно найти состав сплава при условии минимизации его стоимости;

2) решить задачу при условии, что отношение массы цветных металлов к массе стали в сплаве равно 7 : 8.

Р е ш е н и е. 1. Обозначим через x_1 массу чистой стали, через x_2 — массу цветных металлов в сплаве (в тоннах). Математическая модель задачи примет следующий вид: минимизировать целевую функцию, описывающую затраты на приготовление сплава:

$$Z = 3x_1 + 5x_2,$$

при следующих ограничениях:

на необходимое количество сплава

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

на имеющиеся запасы исходных материалов

$$x_1 \leq 4, \; x_2 \leq 6,$$

на компонентный состав сплава

$$x_2 : x_1 \leq 7 : 8 \text{ или } x_2 \leq \frac{7}{8} x_1,$$

на производственно-технологические условия плавки

$$4{,}5x_1 + 2x_2 \leq 18.$$

Условия неотрицательности имеют вид $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

2. При дополнительном ограничении $x_2 : x_1 = 7 : 8$ имеем $x_2 = \frac{7}{8} x_1$. Подставив это значение в целевую функцию и ограничения, получим:

$$Z = \frac{59}{8} x_1, \ \frac{8}{3} \le x_1 \le \frac{72}{25}.$$

Отсюда $x_1^* = 8/3$, $x_2^* = 7/3$, $Z = 59/3$.

Итак, сплав должен содержать 8/3 т чистой стали и 7/3 т цветных металлов. Стоимость такого сплава будет минимальной и составит 59/3 ден. ед.

Пример 1.4. Снабженческая служба завода получила от поставщиков 500 стальных прутков длиной 5 м. Их нужно разрезать на детали *А* и *Б* длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляются комплекты. В каждый комплект входят 3 детали *А* и 2 детали *Б*. Составить математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя прутков, гарантирующий получение максимального количества комплектов.

Р е ш е н и е. Прежде всего нужно построить карту раскроя одного прутка (табл. 1.3).

Т а б л и ц а 1.3

Вариант раскроя	Количество деталей		Отходы, м
	А	*Б*	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектность	3	2	

Пусть $Z = x$ — искомое количество комплектов, x_j — количество прутков, которое следует раскроить по j-му варианту ($j = \overline{1, 3}$). Математическая модель задачи примет вид: максимизировать целевую функцию $Z = x$ при следующих ограничениях:

на количество поступивших на раскрой прутков

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 500,$$

на комплектность раскроя

$$2x_1 + x_2 \geq 3x,$$
$$2x_2 + 3x_3 \geq 2x.$$

Условия неотрицательности: $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, 3})$; $x \geq 0$.

1.1. При производстве продукции $П_1$ и $П_2$ используют 4 группы оборудования A, B, C и D. На выпуск единицы продукции $П_1$ расходуется в единицу времени 1; 0,5; 2 и 0 ед. оборудования A, B, C и D соответственно, а единицы продукции $П_2$ — 1; 1; 0 и 2 ед. оборудования. Фонд рабочего времени группы A — 18, B — 12, C — 24 и D — 18 ед. времени. Предприятие реализует единицу продукции $П_1$ по цене 40 ден. ед., $П_2$ — 60 ден. ед. Требуется:

1) записать условие задачи в виде таблицы;

2) построить математическую модель задачи;

3) найти план выпуска продукции, при котором выручка предприятия будет максимальной.

1.2. Для кондитерской фабрики требуется рассчитать оптимальный план выпуска карамели. Весь ассортимент карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные K_1, K_2 и K_3. Для производства карамели требуется сахарный песок, патока, фруктовое пюре. Запасы этих видов сырья равны соответственно 700, 300 и 150 т. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. В качестве критерия оптимальности плана принять максимум прибыли. Уровень прибыли на единицу каждого вида выпускаемой карамели (в ден. ед. за 1 т): для K_1 — 1000, K_2 — 1100, K_3 — 1200. Нормы расхода сырья на производство единицы каждого вида карамели представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Сырье	Расход сырья на 1 т карамели		
	K_1	K_2	K_3
Сахарный песок	0,7	0,7	0,7
Патока	0,3	0,3	0,2
Фруктовое пюре	0	0,2	0,3

Требуется:

1) построить математическую модель задачи;

2) найти план, максимизирующий прибыль.

1.3. В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества A, не менее 12 ед. вещества B и не менее 4 ед. вещества C. Для кормления животных используются два вида корма. В табл. 1.5 показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг корма каждого вида. Цена 1 кг корма I равна 50 ден. ед., корма II — 60 ден. ед. Составить математическую модель задачи и на ее основе установить, сколько корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными.

Таблица 1.5

Питательное вещество	Корм	
	I	*II*
A	2	1
B	2	4
C	0	4

1.4. С вокзала можно отправлять ежедневно скорые и курьерские поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Характеристика парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде:					
курьерском	1	—	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вагон вмещает пассажиров	—	—	58	40	32
Наличный парк вагонов	12	8	81	70	27

Требуется составить математическую модель задачи и, используя ее, выбрать такое соотношение между числом скорых и курьерских поездов, чтобы число пассажиров, которых можно отправить ежедневно, достигло максимума.

1.5. В овощной магазин привозят из трех колхозов одним видом транспорта картофель соответственно по 40, 30 и 10 ден. ед. за 1 кг. На разгрузку и складирование 1 т картофеля с помощью ленточного транспортера требуется времени: из первого колхоза — 1 мин, из второго — 4 мин, из третьего — 3 мин (разное время разгрузки объясняется различием затоваривания картофелем). Чтобы без задержек удовлетворять потребность покупателей, надо на 12 т картофеля, заказываемых ежедневно магазином, затрачивать не более 40 мин. Составить математическую модель задачи и с ее помощью установить, сколько картофеля надо привозить в магазин из каждого колхоза, чтобы общая стоимость картофеля была минимальной. Известно, что первый колхоз может ежедневно поставлять не более 10 т, второй — не более 8 т, третий — не более 6 т картофеля.

1.6. Бригада приняла заказ на изготовление 50 ед. продукции $П_1$, 30 ед. продукции $П_2$ и 45 ед. продукции $П_3$. Продукция производится на станках A и B. Для изготовления на станке A единицы продукции $П_1$ требуется 4 ед. времени, единицы продукции $П_2$ — 40 ед., единицы продукции $П_3$ — 10 ед., на станке B — соответственно 6, 8 и 20 ед. времени. Составить математическую модель задачи и на ее основе найти план использования оборудования, т. е. указать, сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках A и B, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

1.2. Формы записи задачи линейного программирования, их эквивалентность и способы преобразования

Модель задачи линейного программирования может быть записана в одной из приведенных ниже форм.

1. *Общая*, или *произвольная, форма записи:*

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m_1}), \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}), \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad (i = \overline{m_2 + 1, m}), \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n_1}),$$

x_j — произвольные ($j = \overline{n_1 + 1, n}$).

2. *Симметричная*, или *стандартная, форма записи:*

$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$	$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}),$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad (i = \overline{1, m}),$
$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n});$	$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n});$

3. *Каноническая*, или *основная, форма записи:*

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Указанные выше три формы записи ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть сведена к другой форме, т. е. если имеется способ нахождения оптимального решения задачи в одной из указанных форм, то тем самым может быть определен оптимальный план задачи в любой другой форме (говорят о стратегической эквивалентности задачи в любой из форм).

Так, при необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот. Очевидно, что минимальное значение функции $z(\mathbf{x})$ равно максимальному значению функции $-z(\mathbf{x})$, взятому с противоположным знаком, т. е.

$$\min z(\mathbf{x}) = -\max(-z(\mathbf{x})).$$

Неравенство типа $\geq$ путем умножения левых и правых частей на -1 можно превратить в неравенство типа $\leq$, и наоборот. Ограничения-неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_i$$

преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления (вычитания) к левым частям дополнительных (балансовых) неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} x_{n+i} = b_i.$$

В случае необходимости ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{aligned}\right\}$$

Если в ЗЛП какая-то переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, ее заменяют разностью двух других неотрицательных переменных $x'_k \geq 0$ и $x''_k \geq 0$:

$$x_k = x'_k - x''_k.$$

Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях — потребление соответствующего компонента сверх нормы.

Пример 1.5. Привести к канонической форме следующую ЗЛП:

$$\min Z = 6x_1 + 5x_2;$$

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 11x_2 &\geq 55, \\ x_1 + x_2 &\geq 8, \\ 11x_1 + 3x_2 &\geq 32, \\ 16x_1 + 13x_2 &\leq 210, \\ 17x_1 + 12x_2 &\leq 205, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &-x_3 \\ &-x_4 \\ &-x_5 \\ &+x_6 \\ &+x_7 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Заменяем функцию Z на $Z' = -Z$. Из левых частей ограничений типа $\geq$ вычитаем неотрицательные переменные x_3, x_4 и x_5, к левым частям ограничений типа $\leq$ прибавляем неотрицательные переменные x_6 и x_7. Получаем модель задачи в канонической форме:

$$\max Z' = -6x_1 - 5x_2;$$

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 11x_2 - x_3 &= 55,\\ x_1 + x_2 - x_4 &= 8,\\ 11x_1 + 3x_2 - x_5 &= 32,\\ 16x_1 + 13x_2 + x_6 &= 210,\\ 17x_1 + 12x_2 + x_7 &= 205, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 7}).$$

Пример 1.6. Привести к симметричной форме записи задачу, заданную в общем виде:

$$\max Z = -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5;$$

$$\left.\begin{aligned} - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 4,\\ - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 8,\\ x_1 + x_3 + x_4 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Р е ш е н и е. Исключим из системы ограничений-равенств любые три переменные. В данном случае удобно исключить из первого ограничения x_5, из второго x_2 и из третьего x_1. Учитывая неотрицательность переменных, получаем:

$$\begin{aligned} x_5 &= 4 + 2x_3 + x_4 \geq 0;\\ x_2 &= -8 + 4x_3 + 2x_4 \geq 0;\\ x_1 &= 6 - x_3 + x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Опустив x_5, x_2 и x_1, придем к эквивалентным неравенствам. Подставив x_5, x_2 и x_1 в целевую функцию, после преобразований получим следующую ЗЛП в симметричной форме:

$$\max Z = -x_2 + 3x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} -2x_2 - x_3 &\le 4,\\ -4x_2 - 2x_3 &\le -8,\\ x_2 + x_3 &\le 6,\end{aligned}\right\}$$

$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Пример 1.7. Привести к каноническому виду ЗЛП

$$\min Z = -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6,\\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &\ge 2,\\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 6,\\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &\le 4,\end{aligned}\right\}\begin{aligned} &\\ &\\ &-x_5\\ &+x_6\\ &+x_7\end{aligned}$$

$$x_1 \text{ и } x_2 \text{ — любого знака,}$$

$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем смешанную систему ограничений в систему уравнений. Это осуществляется путем вычитания дополнительной неотрицательной переменной x_5 из левой части третьего ограничения и прибавления дополнительных неотрицательных переменных x_6 и x_7 к левым частям четвертого и пятого ограничений. Функцию Z меняем на $Z' = -Z$. В результате получаем

$$\max Z' = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6,\\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 &= 2,\\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 &= 6,\\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 &= 4,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — любого знака,}$$

$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,\ x_7 \ge 0.$$

Остается переменные x_1 и x_2 произвольного знака заменить разностью двух неотрицательных переменных:

$$x_1 = x_1' - x_1'', \quad x_2 = x_2' - x_2'',$$

где $x_1', x_1'', x_2', x_2'' \ge 0$. Это предоставляется сделать читателю.

Рассмотренный прием приводит к увеличению числа переменных. Этого можно избежать, если использовать иной прием, связанный, однако, с громоздкими выкладками.

Пример 1.8. Привести ЗЛП, заданную в каноническом виде, к симметричной форме:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 + 6;$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 7,\\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1,\\ 9x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Р е ш е н и е. Находим (например, методом Гаусса) общее решение системы ограничительных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_1 - \frac{13}{5}x_2 + \frac{9}{5},\\ x_4 &= 2x_1 - \frac{13}{5}x_2 + \frac{14}{5},\\ x_5 &= 2x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{9}{5}. \end{aligned}\right\}$$

С помощью этих равенств исключаем из целевой функции x_4 и x_5. Получаем

$$Z = 4x_1 + \frac{34}{5}x_2 - \frac{2}{5}.$$

Остается в полученных равенствах опустить неотрицательные слагаемые x_3, x_4 и x_5 и перейти к эквивалентным неравенствам. В результате приходим к симметричной форме ЗЛП:

$$\max Z = 4x_1 + \frac{34}{5}x_2 - \frac{2}{5};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{13}{5}x_2 &\le \frac{9}{5}, \\ -2x_1 + \frac{13}{5}x_2 &\le \frac{14}{5}, \\ -2x_1 - \frac{3}{5}x_2 &\le -\frac{9}{5}, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Общее решение системы ограничительных уравнений можно записать и в другом базисе, а потому и симметричная форма ЗЛП выразится через иные переменные.

В задачах 1.7—1.12 представить ЗЛП в каноническом виде.

1.7. $\min Z = -x_1 + 5x_2 + 2x_4 - 3x_5;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 &\le 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &\le 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 6, \\ -5x_1 + x_2 + x_5 &\ge 8, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,5}).$$

1.8. $\max Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &\le 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\ge 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &\le 10, \\ -3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 15, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4}).$$

1.9. $\min Z = x_1 - x_2 - 2x_3;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\ge 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 &\le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 10, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,3}).$$

1.10. $\max Z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 5, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &\le 4, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,$$

x_2, x_5 — любого знака.

1.11. $\max Z = 2x_1 - x_3;$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &\le 2, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &\ge 3, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, x_3 — любого знака.

1.12. $\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5;$

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &\ge 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 4, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_3, x_4, x_5 \ge 0,$$

x_2 — любого знака.

В задачах 1.13—1.15 представить ЗЛП в симметричной форме. Найти все базисные решения системы ограничений.

1.13. $\max Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 4}).$$

1.14. $\min Z = -x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5;$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_3 - x_4 + x_5 &= 12, \\ -x_1 - x_3 - x_4 + 4x_5 &= 8, \\ -x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 &= 18, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 5}).$$

1.15. $\min Z = 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 + 2x_5;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 16,\\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 30,\\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 8, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,\ 5}).$$

1.3. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования

Задача с двумя переменными. Найти решение $\mathbf{x} = (x_1;\ x_2)$, доставляющее

$$\max (\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{1.4}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{1.5}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{1.6}$$

Начнем с геометрической интерпретации области допустимых решений. Каждое из неравенств (1.5) определяет на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств (1.5), (1.6) в случае ее совместности — их пересечение. Это будет выпуклое множество. Оно может представлять собой выпуклый многоугольник (рис. 1.1, *а*), неограниченную выпуклую многоугольную область (рис. 1.1, *б*), отрезок (рис. 1.1, *в*), луч (рис. 1.1, *г*), одну точку (рис. 1.1, *д*) или быть пустым множеством (рис. 1.1, *е*).

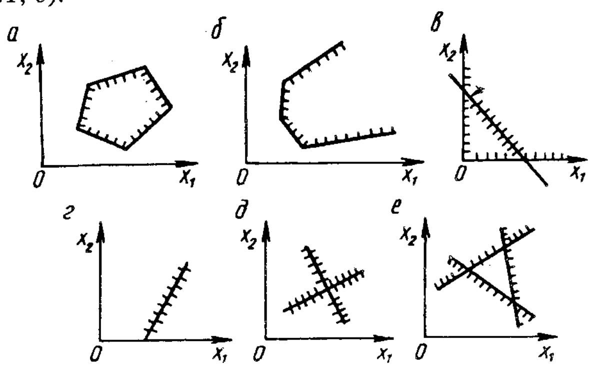


Рис. 1.1

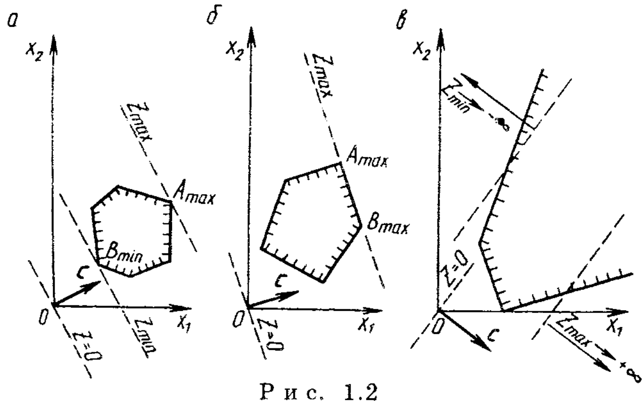


Рис. 1.2

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции (1.4). Уравнение $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $Z = Z_0$ определяет на плоскости прямую линию $Z_0 = c_1x_1 + c_2x_2$. При изменении Z получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня*. Вектор $\mathbf{c} = (c_1;\ c_2)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор $\mathbf{c}$ ($-\mathbf{c}$) показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

Если построить на одном рисунке область допустимых решений, вектор $\mathbf{c}$ ($-\mathbf{c}$) и одну из линий уровня, например $Z = 0$, то задача сводится к определению в области допустимых решений точки в направлении вектора $\mathbf{c}$ ($-\mathbf{c}$), через которую проходит линия уровня $Z_{\max}$ ($Z_{\min}$), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции Z. Это и есть *графический способ решения* ЗЛП. Если задача разрешима, могут представиться следующие случаи: задача имеет единственное решение (рис. 1.2, *а*); задача имеет бесконечное множество решений — *альтернативный оптимум* (рис. 1.2, *б*); целевая функция не ограничена (рис. 1.2, *в*), область допустимых решений — единственная точка, задача не имеет решения.

Пример 1.9. Решить ЗЛП

$$\max\ (\min)\ Z = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_1 + 4x_2 &\ge 4, \\ 2x_1 - x_2 &\ge 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

графическим способом.

Р е ш е н и е. Для построения области допустимых решений строим в системе x_1Ox_2 соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые:

$$x_1 + x_2 = 6,\ x_1 + 4x_2 = 4,\ 2x_1 - x_2 = 0.$$

Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется в полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае берется полуплоскость, не содержащая пробной точки. В качестве пробной точки часто удобно брать начало координат $O(0;\ 0)$. Для нашего примера область допустимых решений — множество точек четырехугольника $ABCD$ (рис. 1.3).

Строим вектор $\mathbf{c} = (c_1;\ c_2) = (2;\ 3)$. Так как он необходим лишь для выяснения направления возрастания целевой функции, иногда для большей наглядности удобно строить вектор $\lambda\mathbf{c}$ ($\lambda > 0$). Перпендикулярно к вектору $\mathbf{c}$ проводим линию уровня $Z = 0$. Параллельным перемещением прямой $Z = 0$ находим крайнюю точку B, в которой целевая функ-

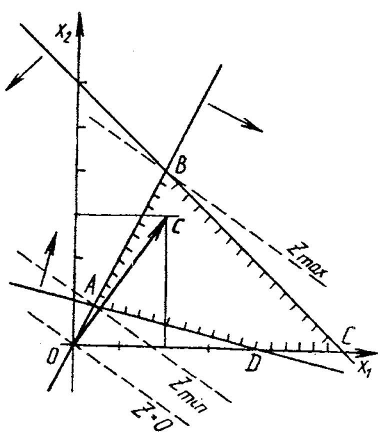


Рис. 1.3

ция достигает максимума, и точку A, в которой достигается минимум. Координаты точки B определяются системой

$$x_1 + x_2 = 6,\ 2x_1 - x_2 = 0,$$

откуда $B(2;\ 4)$, $Z_{max} = Z(B) = 16$. Точку минимума A находим, решая систему уравнений граничных прямых:

$$2x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + 4x_2 = 4.$$

Имеем $A(4/9;\ 8/9)$, $Z_{min} = Z(A) = 32/9$.

Задачи 1.16—1.18 решить графическим способом.

1.16. Предприятие производит сборку автомашин двух марок: A_1 и A_2. Для этого требуются следующие материалы: S_1 — комплекты заготовок металлоконструкций в количестве b_1 =17 шт., необходимые для сборки автомашин марок A_1 и A_2 (соответственно 2 и 3 ед.); S_2 — комплекты резиновых изделий в количестве b_2 = 11 шт. (соответственно 2 и 1 ед.); S_3 — двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_3 = 6 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1; S_4 — двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_4 = 5 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1. Стоимость автомашины марки A_1 — c_1 = 7 тыс. ден. ед., а автомашины A_2 — c_2 = 5 тыс. ден. ед. Определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную выручку.

1.17. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 усл. ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 усл. ед. Содержание их в продуктах $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1). Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ — 2 ден. ед., $П_2$ — 3 ден. ед. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

1.18. Малое предприятие выпускает детали A и B. Для этого оно использует литье, подвергаемое токарной обработке, сверлению и шлифованию. Производительность станочного парка предприятия по обработке деталей A и B приведена в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Станки	Производительность, шт/ч		Стоимость часа станочного времени, ден. ед.
	A	*B*	
Токарные	25	40	2000
Сверлильные	28	35	1400
Шлифовальные	35	25	1750
Цена детали, ден. ед.:			
покупная	200	300	
продажная	500	600	

Предполагая, что спрос на любую комбинацию деталей *A* и *B* обеспечен, найти план их выпуска, максимизирующий прибыль.

Указание. Прежде всего необходимо сделать расчет прибыли на деталь (табл. 1.8).

Таблица 1.8

Вид обработки	Затраты	
	A	*B*
Токарная	2000 : 25 = 80	2000 : 40 = 50
Сверление	1400 : 28 = 50	1400 : 35 = 40
Шлифование	1750 : 25 = 50	1750 : 25 = 70
Общие затраты	380	460
Цена, ден. ед.:		
покупная	200	300
продажная	500	600
Прибыль	120	140

Обозначим количество выпускаемых в час деталей *A* через x_1, деталей *B* — через x_2. Имеем математическую модель задачи

$$\max Z = 120x_1 + 140x_2.$$

Приняв мощность оборудования каждого вида за единицу, получим систему ограничений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 / 25 + x_2 / 40 \le 1, \\ x_1 / 28 + x_2 / 35 \le 1, \\ x_1 / 35 + x_2 / 25 \le 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задачи 1.19—1.27 решить графически.

1.19. $\max(\min) Z = 2x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 16,\\ -4x_1 + 2x_2 &\le 8,\\ x_1 + 3x_2 &\ge 9, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.20. $\max Z = 6x_1 - 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1,\\ 3x_1 - x_2 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.21. $\max Z = 2{,}5x_1 + 3x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\ge 2,\\ -2x_1 + 3x_2 &\ge 2, \end{aligned}\right\}$$

x_1, x_2 — любого знака.

1.22. $\max Z = 4x_1 + 7x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\le 21,\\ 7x_1 + 2x_2 &\le 49, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.23. $\max Z = 3x_1 + 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 2,\\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 12, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.24. $\min Z = 2x_1 - 6x_2;$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\le -2,\\ -x_1 + x_2 &\le 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.25. $\max Z = x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge 1,\\ x_1 - x_2 &\le -1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.26. $\max(\min) Z = 3x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 8, \\ -x_1 + 5x_2 &\le 37, \\ 5x_1 + x_2 &\le 49 \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 11, \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 19, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.27. $\max Z = 2x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\le 12, \\ 2x_1 - x_2 &\ge -2, \\ -x_1 + 3x_2 &\ge 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.28. Найти $\max(\min) Z = 2x_1 + 3x_2$ при условии, что система ограничений есть точки четырехугольника $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 6)$, $C(9;\ 8)$, $D(6;\ 2)$.

1.29. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников. Каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии — 60 изделий, второй — 75. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, второй модели — 8. Наибольший суточный запас используемых элементов равен 800 ед. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей — соответственно 3000 и 2000 ден. ед. Определить:

1) оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей;

2) предел увеличения производительности первой линии, превышение которого уже не будет оказывать влияния на рост прибыли;

3) предел уменьшения производительности второй линии, при котором полученное оптимальное решение остается неизменным;

4) предел увеличения суточного запаса элементов электронных схем, при превышении которого улучшить значение целевой функции невозможно.

Обосновать решение задачи исходя из удельной ценности ресурсов и определить дефицитный ресурс, который имеет наибольший приоритет при возможности увеличения запасов ресурсов.

1.30. Процесс изготовления промышленных изделий двух видов $И_1$ и $И_2$ состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч в сутки. Время обработки одного изделия (в минутах) и прибыль от продажи одного изделия каждого вида указаны в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Станок	Выпускаемая продукция		Лимит времени
	$И_1$	$И_2$	
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
Удельная прибыль	200	300	

Требуется:

1) найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, максимизирующие прибыль;

2) определить, для каких станков в оптимальном решении задачи время использования не является дефицитным ресурсом, и найти неиспользуемую часть этого ресурса (в машино-часах);

3) для каждого полностью загруженного станка определить «ценность» единицы дополнительного фонда времени;

4) установить, какой из трех станков имеет наибольший приоритет при возможности увеличения времени и загрузки.

1.31. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионные сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены 100 000 ден. ед. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 500 ден. ед., а каждая минута телерекламы — в 10 000 ден. ед. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше объема сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить:

1) оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на радио- и телерекламу;

2) предел увеличения месячной суммы расходов на рекламу, превышение которого уже не будет влиять на оптимальное решение.

1.32. В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов. Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 1600 ден. ед., а со 100 м^2 фанеры — 6000 ден. ед. Определить оптимальный план производства пиломатериалов и фанеры.

1.33. Предприятие производит продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. Объем сбыта продукции $П_1$ составляет не менее 60 % общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции $П_1$ и $П_2$ используется одно и то же сырье, суточный запас которого равен 100 кг. Расход сырья на единицу продукции $П_1$ равен 2 кг, а на единицу продукции $П_2$ — 4 кг. Цены продукции $П_1$ и $П_2$ — 20 и 40 ден. ед. соответственно. Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции $П_1$ и $П_2$.

1.34. Фирма выпускает шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы первого фасона вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы второго фасона. Если бы фирма выпускала шляпы только первого фасона, то суточный объем производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов ограничен 150—200 шт. Прибыль от продажи шляпы первого фасона равна 80 ден. ед., второго — 50 ден. ед. Определить оптимальный план выпуска шляп, максимизирующий прибыль.

1.35. Имеются корма двух видов: сено и силос. Их можно использовать для кормления скота в количестве соответственно не более 50 и 85 кг. Требуется составить кормовой рацион минимальной стоимости, в котором содержится не менее 30 кормовых единиц, не менее 1 кг перевариваемого протеина, не менее 100 г кальция, не менее 80 г фосфора. Данные о питательности кормов и их стоимости в расчете на 1 кг приведены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Питательные вещества	Корм		Нижняя норма содержания питательных веществ
	Сено	Силос	
Кормовые единицы, кг	0,5	0,3	30
Протеин, г	40	10	1000
Кальций, г	1,25	2,5	100
Фосфор, г	2	1	80
Себестоимость 1 кг, ден. ед.	12	8	

1.36. Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы в арендном хозяйстве, обеспечивающее максимум валовой продукции. Урожайность и затраты на возделывание культур (в расчете на 1 га) характеризуются показателями, приведенными в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Показатель	Пшеница	Кукуруза
Урожайность, ц	30	45
Затраты механизированного труда, тракторо-смен	0,05	0,064
Затраты труда на конно-ручных работах, чел.-дн.	0,6	0,16
Цена 1 ц, ден. ед.	75	55

1.37. Предприятие может выпускать продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в табл. 1.12. Найти оптимальный план выпуска продукции. Установить, как изменится прибыль, если незначительно (на единицу) увеличить или уменьшить объем каждого ресурса. Все ли ресурсы оказываются в процессе производства равноценными? Ценность ресурсов можно измерять приращением оптимального значения целевой функции, приходящимся на единицу приращения соответствующего ресурса.

Таблица 1.12

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Объем ресурса
	$П_1$	$П_2$	
Оборудование	2	3	31
Сырье	1	1	12
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль за единицу продукции	40	25	

Задача с n переменными. Как известно, графическим методом можно решать ЗЛП с $n > 2$ переменными, если в ее канонической записи число неизвестных n и число линейно независимых уравнений m связаны соотношением $n - m \leq 2$.

Пример 1.10. Найти

$$\max (\min)\ Z = 16x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 - 5x_5$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 20, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 12, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 &= 16, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Решение. В данной задаче $n = 5$, $m = 3$. Так как $n - m = 5 - 3 = 2$, задачу можно решить графически. Решим систему ограничительных уравнений относительно любых трех неизвестных. В данном случае проще всего решить систему относительно x_3, x_4 и x_5:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 20 - 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_4 &= 12 + 2x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ x_5 &= -16 + 2x_1 + 4x_2 \geq 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Подставив выражения для x_3, x_4 и x_5 в целевую функцию, после упрощений получим $Z = -2x_1 - 3x_2$.

ЗЛП с двумя переменными принимает вид

$$\max (\min)\ Z = -2x_1 - 3x_2;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 20, \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 16, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

На рис. 1.4 представлены многоугольник решений *ABCD*, линия уровня $Z = 0$ и вектор $\mathbf{c} = (-2; -3)$.

Максимального значения целевая функция достигает в точке $A(0; 4)$, т. е. $Z_{\max} = z(A) = -12$, а минимального — в точке $B(6; 8)$: $Z_{\min} = z(B) = -36$. Подставив координаты точек A и B в выражения для x_3, x_4, x_5, найдем осталь-

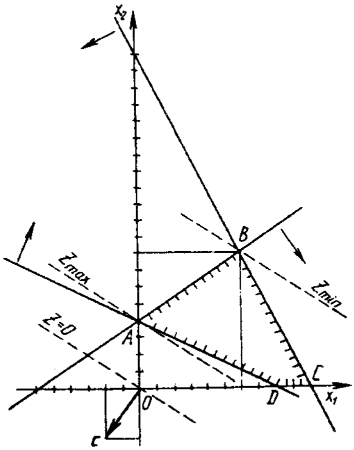


Рис. 1.4

ные координаты экстремальных точек: $A'(0;\ 4;\ 16;\ 0;\ 0)$, B' $(6;\ 8;\ 0;\ 28)$. При этом $Z_{\max} = -12$, $Z_{\min} = -36$.

Пример 1.11. Решить графически ЗЛП

$$\min Z = 6x_1 + 10x_2;$$

$$\left.\begin{array}{l} 8x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 60, \\ 8x_1 + 16x_2 - x_3 - x_5 = 108, \\ 8x_1 + 18x_2 - x_4 - x_5 = 120, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

Р е ш е н и е. Здесь $n = 5$, $m = 3$ и $n - m = 2$. Задачу можно решить графически. Приводя известным способом (см. пример 1.8) систему ограничений-равенств к эквивалентной системе неравенств, получаем сначала систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 = 20, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 40, \\ 4x_1 + 15x_2 - x_5 = 88, \end{array}\right\}$$

а затем систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 \geq 20, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 40, \\ 4x_1 + 15x_2 \geq 88. \end{array}\right\}$$

В результате приходим к ЗЛП с двумя переменными

$$\min Z = 6x_1 + 10x_2;$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 \geq 20, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 40, \\ 4x_1 + 15x_2 \geq 88, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение этой задачи представлено на рис. 1.5: минимум достигается в точке с координатами $x_1^* = 7$, $x_2^* = 4$.

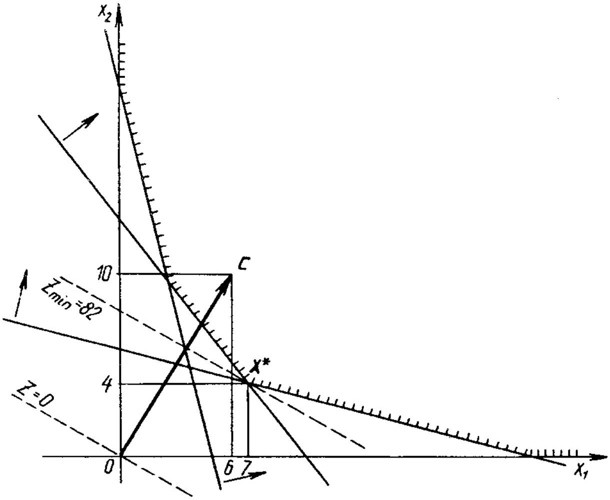


Рис. 1.5

Используя приведенные уравнения, находим: $x_3^* = 12$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0$. Итак, $\mathbf{x}^* = (7;\ 4;\ 12;\ 0;\ 0)$, $Z_{\min} = 82$.

Задачи 1.38—1.41 с n переменными решить графически.

1.38. $\max(\min) Z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 16;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 28,\\ x_2 + x_4 &= 16,\\ x_1 + x_2 - x_5 &= 8,\\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 &= 12, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,\ 6}).$$

1.39. $\max Z = 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 2,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,\ 4}).$$

1.40. $\max(\min)\ Z = -x_1 + x_3 + 7x_4 + 7x_5 - 50;$

$$\left.\begin{aligned} x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 55,\\ x_2 + 12x_4 + 11x_5 &= 132,\\ x_1 + 3x_4 - 2x_5 &= 5, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,\ 5}).$$

1.41. $\max(\min)\ Z = 3x_5 + x_6;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_5 + 2x_6 &= 20,\\ x_1 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 &= 50,\\ -x_2 + x_4 + 3x_5 - 2x_6 &= 18,\\ x_3 + x_4 + 6x_5 &= 72, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,\ 6}).$$

1.4. Свойства решений задачи линейного программирования

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ —произвольные точки евклидова пространства E_n. *Выпуклой линейной комбинацией этих точек* называется точка $\mathbf{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, где коэффициенты $\lambda_i \geq 0$ $(i = \overline{1,\ n})$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Множество называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию, т. е. соединяющий их отрезок.

Точка $\mathbf{x}$ выпуклого множества называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки, в противном случае — *открытым*. Множество называется *ограниченным*, если существует шар радиусом конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется *неограниченным*.

Теорема о выпуклости: множество планов основной ЗЛП, если оно непусто, является выпуклым.

Непустое множество планов основной ЗЛП называется *многогранником планов*, а всякая угловая точка многогранника планов — *вершиной*.

Теорема о представлении: любую точку многогранника планов можно представить как выпуклую линейную комбинацию его угловых точек.

Рассмотрим основную ЗЛП в векторной форме записи:

$$\max (\min) Z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x};$$
$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{A}_0, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

где $\mathbf{c} = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$; $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)^T$; $\mathbf{A}_j = (a_{1j}; a_{2j}; \ldots; a_{nj})^T$ $(j = \overline{1, n})$; $\mathbf{A}_0 = (b_1; b_2; \ldots; b_m)^T$.

Теорема о структуре координат угловой точки многогранника планов: если система векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ содержит m линейно независимых векторов (например, первых m векторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$), то допустимый план

$$\mathbf{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_m; \underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n-m})$$

является *угловой (крайней) точкой многогранника планов.*

Угловая точка с неотрицательными координатами называется *опорной*, а соответствующий план — *опорным планом.* Опорный план называется *невырожденным,* если он содержит ровно m положительных компонентов, и *вырожденным,* если меньше m.

Основная теорема линейного программирования: если ЗЛП разрешима, то целевая функция принимает экстремальное значение в одной из угловых точек многогранника планов. Если же целевая функция принимает экстремальное значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.

Пример 1.12. Используя теорему о представлении, выразить точку $\mathbf{x} = (3; 6)$ через вершины области допустимых решений, заданной следующей системой неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 &\leq 13, \\ 3x_1 + x_2 &\geq 11, \\ x_1 + 6x_2 &\leq 47. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Область допустимых решений представляет собой замкнутое ограниченное множество, определяемое вершинами треугольника $\mathbf{x}_1 = (3; 2)$, $\mathbf{x}_2 = (7; 9)$, $\mathbf{x}_3 = (1; 8)$.

Согласно теореме о представлении точек выпуклого многогранника, имеем

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \lambda_j \geq 0\ (j = \overline{1,\ 3}),$$

или в векторной форме

$$\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3 &= 3,\\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 6,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему, получим: $\lambda_1 = 7/19$, $\lambda_2 = 4/19$, $\lambda_3 = 8/19$. Отсюда имеем

$$\mathbf{x} = \frac{7}{19}\mathbf{x}_1 + \frac{4}{19}\mathbf{x}_2 + \frac{8}{19}\mathbf{x}_3.$$

В задачах 1.42—1.45 определить, являются ли ограниченными области, заданные условиями.

1.42. $$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 &\leq 10,\\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 35, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

1.43. $$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4,\\ -x_1 + 5x_2 &\leq 20, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \geq 0.$$

1.44. $$\left.\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 &\leq 8,\\ 3x_1 - x_2 &\geq 8. \end{aligned}\right\}$$

1.45. $$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_4 - x_5 &= 3,\\ x_2 \qquad + 2x_4 + 3x_5 &= 27,\\ x_3 - x_4 + x_5 &= 4, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,\ 5}).$$

В задачах 1.46—1.50 определить, какие из областей являются ограниченными, и выразить точку $\mathbf{x} = (5;\ 6)$ через угловые точки области решений.

1.46. $$\left.\begin{aligned} 7x_1 - 6x_2 &\le 26,\\ 4x_1 + 3x_2 &\le 47,\\ -x_1 + x_2 &\le 4,\\ x_1 + x_2 &\ge 0. \end{aligned}\right\}$$

1.47. $$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 &\ge 14,\\ -2x_1 + 5x_2 &\le 72. \end{aligned}\right\}$$

1.48. $$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &\le 12,\\ x_1 &\le 12. \end{aligned}\right\}$$

1.49. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\le 6,\\ -2x_1 + 5x_2 &\le 26,\\ 2x_1 + x_2 &\ge 10. \end{aligned}\right\}$$

1.50. $$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &\le 24,\\ -x_1 + 3x_2 &\le 12,\\ 2x_1 + 3x_2 &\le -2. \end{aligned}\right\}$$

1.51. В приведенных ниже задачах целевая функция содержит параметр λ. Найти границы изменения значений λ, при которых оптимальное решение будет находиться в одной и той же угловой точке области допустимых решений. Установить, в каких промежутках задача не имеет решения. Определить, при каких значениях λ будет бесчисленное множество решений:

а) $\max Z = 2x_1 + \lambda x_2;$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 3,\\ x_1 + 2x_2 &\le 12,\\ 3x_1 - x_2 &\le 15, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

б) $\max Z = \lambda x_1 - x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 2,\\ -2x_1 + x_2 &\le 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

в) $\max Z = \lambda x_3 + x_4 + 2x_5;$

$$\left.\begin{array}{rl} x_3 + 2x_4 - x_5 &= 6,\\ x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 &= 54,\\ x_1 \qquad - x_4 + x_5 &= 8, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

1.52. В нижеприведенных ЗЛП ограничения включают параметр λ. Определить, при каких значениях λ задача имеет: единственное решение; бесчисленное множество решений; не имеет решения:

а) $\max Z = 2x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 &\leq 4,\\ x_1 - x_2 &\leq 6,\\ \lambda x_1 + x_2 &\leq 3, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

б) $\max Z = 2x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 &\geq 18,\\ -3x_1 + x_2 &\leq 2,\\ x_1 - \lambda x_2 &\geq 4, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

в) $\min Z = -3x_1 + 2x_2 + x_3;$

$$\left.\begin{array}{rl} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0.$$

1.53. В ЗЛП ограничение по ресурсам включает параметр λ. Сделать анализ ограничений по ресурсам, т. е. определить границы изменения параметра, в пределах которых структура оптимального плана не изменяется:

а) $\max Z = 50x_1 + 40x_2;$

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 + 5x_2 &\leq 20,\\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40,\\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 30, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

б) $\max Z = 50x_1 + 40x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20, \\ 6x_1 + 5x_2 &\le 40 + \lambda, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 30, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

в) $\max Z = 50x_1 + 40x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 30 + \lambda, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

г) $\max Z = 50x_1 + 40x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20 + \lambda, \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 30, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

д) $\max Z = 50x_1 + 40x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20 + \lambda, \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 40 + \lambda, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 30, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

е) $\max Z = 50x_1 + 40x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 40 + \lambda, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 30, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.5. Симплексный метод

Построение начального опорного плана. Рассмотрим три случая.

1-й с л у ч а й. Пусть в системе ограничений имеется единичный неотрицательный базис. Например, она имеет вид

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ b_i \geq 0\ (i = \overline{1, m}).$$

Говорят, что ограничение канонической ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательности его правой части ($b_i \geq 0$) левая часть содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а остальные ограничения — с коэффициентом, равным нулю. Если каждое ограничение канонической ЗЛП имеет предпочтительный вид, т. е. система ограничений приведена к единичному неотрицательному базису, то начальный опорный план строится весьма просто. Предпочтительные переменные выбираются в качестве базисных, а все остальные — свободные. Свободные переменные приравниваются нулю, а базисные переменные — свободным членам.

Пример 1.13. Найти начальный опорный план ЗЛП

$$\min Z = -5x_1 + 6x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 &= 2,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1, 4}).$$

Р е ш е н и е. В первом ограничении предпочтительной переменной является x_4, во втором — x_2. Система приведена к положительному единичному базису. Свободные переменные x_1 и x_3 приравниваются нулю. Получим невырожденный начальный опорный план:

$$\mathbf{x}_0 = (0;\ 3;\ 0;\ 2);\ Z(\mathbf{x}_0) = 0.$$

1.54. Найти начальный опорный план ЗЛП:

а) $\max Z = 2x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4,\\ 16x_2 + x_3 - 2x_4 \qquad &= 16,\\ 5x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1, 5});$$

б) $\max Z = x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 2x_5;$

$$\left.\begin{array}{rrrrrcr} & x_2 & & -2x_4 & & = & 2, \\ & & x_3 & +3x_4 & & = & 24, \\ x_1 & & & -x_4 & & = & 4, \\ & & & x_4 & +x_5 & = & 8, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5});$$

в) $\max Z = -x_1 + 6x_2 + 2x_4 - x_5 + 2x_6;$

$$\left.\begin{array}{rrrrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & & -x_4 & & +x_6 & = & 9, \\ -3x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & +x_5 & & = & 3, \\ x_1 & +5x_2 & +x_3 & +2x_4 & & & = & 4, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6});$$

г) $\min Z = -2x_7 - 3x_8 + 2x_9 + 3x_{10};$

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrcr} & & & x_1 & +2x_6 & -x_7 & +x_8 & = & 12, \\ & & & & x_2 & +x_6 & +x_9 & = & 5, \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_5 & +8x_6 & -3x_7 & & = & 124, \\ 6x_1 & +2x_2 & +x_4 & +2x_5 & +11x_6 & -3x_7 & & = & 140, \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_5 & +4x_6 & +x_{10} & & = & 58, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 10}).$$

2-й случай. Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Сведем задачу к каноническому виду, добавив к левым частям системы ограничений дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Получим систему ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

эквивалентную исходной и имеющую предпочтительный вид. Отсюда получаем начальный опорный план:

$$\mathbf{x}_0 = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; b_1; b_2; \ldots; b_m), \ z(\mathbf{x}_0) = 0.$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+i} = 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Пример 1.14. Найти начальный опорный план ЗЛП

$$\min Z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 &\le 9, \\ 14x_1 + 42x_2 + 16x_3 &\le 21, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 &\le 4, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ x_4 \\ &+ x_5 \\ &+ x_6 \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1, 3}).$$

Р е ш е н и е. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\min Z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 + x_4 &= 9, \\ 14x_1 + 42x_2 + 16x_3 + x_5 &= 21, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_6 &= 4, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1, 6}).$$

Система ограничений имеет предпочтительный вид. Начальный опорный план

$$\mathbf{x}_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 9;\ 21;\ 4),\ z(\mathbf{x}_0) = 0.$$

1.55. Найти начальный опорный план ЗЛП:

а) $\min Z = x_1 - 3x_2 + x_3;$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 &\le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\le 10, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1, 3});$$

б) $\max Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &\le 24, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &\le 12, \\ 6x_1 + 3x_3 + x_4 &\le 35, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1, 4});$$

в) $\min Z = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4;$

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 6, \\ -x_1 + 2x_2 & \le 1, \\ x_1 + x_2 & \le 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 & = 6, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4});$$

г) $\max Z = x_1 + x_2 - x_3 + x_6;$

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 & = 4, \\ x_2 - x_5 - x_6 & = 5, \\ 3x_5 - x_6 & \le 7, \\ -x_3 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 & = 3, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 6}).$$

3-й случай. Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \ b_i \ge 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Перейдем к каноническому виду путем введения дополнительных переменных $x_{n+i} \ge 0 \ (i = \overline{1, m})$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \ b_i \ge 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Теперь система ограничений, вообще говоря, не имеет предпочтительного вида. В этом случае вводят искусственный базис путем перехода к M-задаче:

$$\max\ (\min)\bar{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+)M\sum_{i=1}^{m} w_i;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + w_i = b_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}), \ w_i \ge 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

где в целевой функции знак «–» относится к задаче максимизации. Если некоторые из уравнений исходной системы ограничений имеют предпочтительный вид, то в них не вводят искусственные переменные. Начальный опорный план M-задачи имеет вид

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0;}_{n+m} b_1; b_2; \ldots; b_m).$$

Между оптимальными планами исходной задачи и M-задачи имеется следующая связь: если в оптимальном плане M-задачи все искусственные переменные w_i^* равны нулю, то значения оставшихся координат плана $\overline{\mathbf{x}}^*$ дадут оптимальный план исходной задачи.

Пример 1.15. Найти начальный опорный план задачи

$$\min Z = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 3, \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\ge 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 &\ge 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

Р е ш е н и е. Вводя дополнительные x_5, x_6, x_7 и искусственные переменные, переходим к задаче в каноническом виде и к M-задаче:

$$\min Z = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + \\ + Mw_1 + Mw_2;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3, \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_6 + w_1 &= 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 - x_7 + w_2 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 7}), \ w_i \ge 0 \ (i = 1, 2).$$

Ее начальный опорный план $\mathbf{x}_0 = (0; 0; 0; 0; 3; 0; 0; 2; 1)$.

Симплексные таблицы. Приведя модель ЗЛП к предпочтительному виду, ее заносят в так называемую *симплексную таблицу*. Проиллюстрируем процесс заполнения таблицы на примере следующей задачи:

$$\max Z = 18x_1 + 20x_2 + 32x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 &\le 720, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\le 384, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\le 360, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 3}).$$

Введя дополнительные переменные x_4, x_5 и x_6, придем к канонической форме:

$$\max Z = 18x_1 + 20x_2 + 32x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 &= 720,\\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 &= 384,\\ 5x_1 + 3x_2 + 12x_3 + x_6 &= 360, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6}).$$

Заносим условия задачи в симплексную таблицу 1.13.

Таблица 1.13

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
			18	20	32	0	0	0	
x_4	0	720	18	15	12	1	0	0	720/12 = 60
x_5	0	384	6	4	8	0	1	0	384/8 = 48
x_6	0	360	5	3	12	0	0	1	360/12 = 30
$z_j - c_j$		0	–18	–20	–32	0	0	0	
$\mathbf{x}_0 = (0; 0; 0; 720; 384; 360)$, $z(\mathbf{x}_0) = 0$									

Рабочая часть таблицы, начиная с 3-го столбца и 3-й строки, содержит элементы расширенной матрицы, над которыми будут производиться преобразования с целью получения оптимального плана. Последний столбец θ (необязательный) предназначен для выбора разрешающей строки. В предпоследней строке $(z_j - c_j)$ таблицы записано «нулевое» уравнение (целевая функция Z). Эта строка называется *индексной* или *строкой оценок*. В столбец БП занесены базисные (предпочтительные) переменные. Столбец $\mathbf{c}_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец $\mathbf{A}_0$ содержит свободные члены $b_i \geq 0$ системы ограничений. Сверху над рабочей частью таблицы указаны все переменные и коэффициенты целевой функции c_j.

Остановимся на заполнении индексной строки $z_j - c_j$. Здесь расположены значение целевой функции для начального опорного плана $\mathbf{x}_0$, т. е. $z(\mathbf{x}_0) = \Delta_0 = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_0$, и оценки индексной строки $\Delta_j = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_j - c_j$.

Пример 1.16. Занести условия задачи в симплексную таблицу и записать ее начальный опорный план:

$$\min Z = -6x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 8,\\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 &= 48, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

Р е ш е н и е. Задача имеет предпочтительный вид. Переменные x_3 и x_4 являются базисными, x_1 и x_2 — свободными. Заносим условия задачи в табл. 1.14.

Т а б л и ц а 1.14

БП	$\mathbf{c}_Б$	$\mathbf{A}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4
			−6	8	−1	2
x_3	−1	8	−2	1	1	0
x_4	2	48	3	−8	0	1
$z_j - c_j$		68	14	−25	0	0

Индексная строка $z_j - c_j$ заполнена по известным формулам $\Delta_0 = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_0$, $\Delta_j = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_j - c_j$:

$$\Delta_0 = (-1) \cdot 8 + 2 \cdot 48 = 88,$$
$$\Delta_1 = (-1)(-2) + 2 \cdot 3 - (-6) = 14,$$
$$\Delta_2 = (-1) \cdot 1 + 2(-8) - 8 = -25,$$
$$\Delta_3 = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 - (-1) = 0,$$
$$\Delta_4 = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Приравнивая x_1 и x_2 нулю, находим $x_3 = 8$, $x_4 = 48$ и тем самым начальный опорный план $\mathbf{x}_0 = (0;\ 0;\ 8;\ 48)$. В столбце $\mathbf{A}_0$ индексной строки получено значение $\Delta_0 = 88$ целевой функции, соответствующее плану $\mathbf{x}_0$.

Пример 1.17. Занести условие задачи в симплексную таблицу и записать начальный опорный план:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3;$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 4, \\ x_1 + x_2 & \le & 10, \\ 3x_1 + x_2 & \ge & 9, \\ -x_1 + 3x_2 & \ge & 3, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ + x_4 \\ - x_5 + w_1 \\ - x_6 + w_2 \end{array}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 3}).$$

Р е ш е н и е. Как и в примере 1.15, приводим задачу к каноническому виду, а затем к M-задаче:

$$\max \overline{Z} = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - Mw_1 - Mw_2;$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10,\\ 3x_1 + x_2 - x_5 + w_1 &= 9,\\ -x_1 + 3x_2 - x_6 + w_2 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6}), \ w_i \geq 0 \ (i = 1, 2).$$

Теперь M-задача имеет предпочтительный вид, поэтому ее условие занесем в симплексную таблицу 1.15.

Таблица 1.15

БП	$\mathbf{c}_Б$	$\mathbf{A}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w_1	w_2
			9	6	–3	0	0	0	$-M$	$-M$
x_3	–3	4	–1	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	10	1	1	0	1	0	0	0	0
w_1	$-M$	9	3	1	0	0	–1	0	1	0
w_2	$-M$	3	–1	3	0	0	0	–1	0	1
$\overline{z}_j - c_j$		–12	–6	–9	0	0	0	0	0	0
		$-12M$	$-2M$	$-4M$	0	0	M	M	0	0

Начальный опорный план имеет вид

$$\mathbf{x}_0 = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5;\ x_6;\ w_1;\ w_2) =$$
$$= (0;\ 0;\ 4;\ 10;\ 0;\ 0;\ 9;\ 3),\ z(\mathbf{x}_0) = -12 - 12M.$$

В случае M-задачи индексную строку разбиваем на две. В первой записываются свободные члены выражений $\Delta_0 = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_0$ и $\Delta_j = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_j - c_j$, а во второй — коэффициенты, содержащие M.

1.56. Занести условия задач 1.37—1.41 в симплексные таблицы и записать их начальные опорные планы.

Признак оптимальности опорного плана задачи максимизации: если для некоторого опорного плана все оценки Δ_i неотрицательны, то такой план оптимален; если же исходная задача на минимум и для некоторого опорного плана все оценки Δ_j неположительны, то такой план оптимален.

Так, содержащийся в табл. 1.13 опорный план не является оптимальным, поскольку $\Delta_1 = -18$, $\Delta_2 = -20$, $\Delta_3 = -32$.

Рассмотрим переход к *нехудшему опорному плану* на примере ЗЛП на максимум. Приведем ее к каноническому виду и занесем в симплексную таблицу. Если все $\Delta_j \geq 0$, то начальный опорный план $\mathbf{x}_0$ оптимален. Если же существуют $\Delta_j < 0$, то план неоптимален, при определенных условиях его можно улучшить. Среди отрицательных оценок находят максимальную по абсолютной величине:

$$\max_{\Delta_j < 0} \left|\Delta_j\right| = \left|\Delta_{j_0}\right|.$$

Столбец j_0 называется *разрешающим*. Если задача решается на минимум, то разрешающий столбец выбирается из условия

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_{j_0}.$$

Переменную x_{j_0}, соответствующую разрешающему столбцу, следует ввести в базис. Для определения переменной, выводимой из базиса, находят отношения

$$b_i \,/\, a_{ij_0},\ a_{ij_0} > 0$$

(они называются *симплексными*). Среди симплексных отношений определяют наименьшее, т. е.

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \theta.$$

Оно и укажет строку, в которой содержится исключаемая из базиса переменная x_{i_0}. Строка i_0, соответствующая минимальному симплексному отношению, называется *разрешающей*. Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, также называется *разрешающим*. Чтобы завершить шаг преобразований, ведущих к новому опорному плану, составляют таблицу по следующим правилам:

1) элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент;

2) все элементы столбца j_0 новой таблицы равны нулю, за исключением $a'_{i_0 j_0} = 1$;

3) чтобы получить все остальные элементы (включая элементы индексной строки) новой таблицы, надо из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент.

Для контроля вычислений элементов индексной строки применяются формулы:

$$\Delta_0 = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_0,\ \Delta_j = \mathbf{c}_Б \cdot \mathbf{A}_j - c_j.$$

Альтернативный оптимум (признак бесконечности множества оптимальных планов): если в индексной строке последней симплексной таблицы (содержащей оптимальный план) имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Признак неограниченности целевой функции: если в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция на множестве допустимых планов не ограничена.

Признак несовместности системы ограничений: если в оптимальном плане M-задачи не все искусственные переменные равны нулю, то система ограничений исходной задачи несовместна.

Пример 1.18 (задача об оптимальном распределении материалов). Имеющийся фонд материалов b_i ($i = \overline{1, 3}$) нужно так распределить между изготовителями, чтобы получить максимальную прибыль от реализации всей продукции, произведенной из данных материалов. Нормы a_{ij} ($i = \overline{1, 3}$; $j = \overline{1, 5}$) расхода на единицу продукции и прибыль c_j, получаемая от реализованной единицы продукции, представлены в табл. 1.16.

Таблица 1.16

Материал	Продукция					Объем материала
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	
b_1	0,7	0,9	1,5	2,3	1,8	50 000
b_2	1,4	0,3	0,7	2,5	2,0	28 000
b_3	0,5	2,1	1,8	0,7	2,0	40 000
Прибыль c_j	5	7	6	9	8	
План $\mathbf{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

Решение. Математическая модель задачи

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5;$$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 \le 50000, \\ 1{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}7x_3 + 2{,}5x_4 + 2{,}0x_5 \le 28000, \\ 0{,}5x_1 + 2{,}1x_2 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2{,}0x_5 \le 40000, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 5}).$$

Введя дополнительные переменные x_6, x_7 и x_8, получим ее каноническую форму:

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8;$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 + x_6 = 50000, \\ 1{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}7x_3 + 2{,}5x_4 + 2{,}0x_5 + x_7 = 28000, \\ 0{,}5x_1 + 2{,}1x_2 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2{,}0x_5 + x_8 = 40000, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,\ 8}).$$

По индексной строке видно, что начальный опорный план неоптимален. Так как дополнительные переменные в канонической форме составляют допустимый единичный базис, то условия задачи заносим в симплексную таблицу 1.17.

Таблица 1.17

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
			0	7	6	9	8	0	0	0
x_6	0	50 000	0,7	0,9	1,5	2,3	1,8	1	0	0
x_7	0	28 000	1,4	0,3	0,7	$\boxed{2{,}5}$	2,0	0	1	0
x_8	0	40 000	0,5	2,1	1,8	0,7	2,0	0	0	1
$z_j - c_j$		0	–5	–7	–6	–9	–8	0	0	0
x_6	0	24 240	–0,59	0,62	0,86	0	–0,04	1	–0,92	0
x_4	9	11 200	0,56	0,12	0,28	1	0,8	0	0,4	0
x_8	0	32 160	0,11	$\boxed{2{,}02}$	1,6	0	1,44	0	–0,28	1
$z_j - c_j$		100 800	0,04	–5,92	–3,48	0	–0,8	0	3,6	0
x_6	0	14 286	–0,62	0	0,36	0	–0,49	1	–0,83	–0,31
x_4	9	9 286	0,55	0	0,19	1	0,71	0	0,42	–0,06
x_2	7	15 952	0,05	1	0,8	0	0,72	0	–0,14	0,5
$z_j - c_j$		195 238	0,36	0	1,23	0	3,43	0	2,78	2,94

Разрешающие элементы выбираем по описанным выше правилам. Все вычисления выполняются согласно правилам симплексных преобразований.

На втором шаге преобразований получаем оптимальный план — все оценки положительны.

Итак, $\mathbf{x}^* = (0;\ 15\,952;\ 0;\ 9286;\ 0;\ 14\,286;\ 0;\ 0)$, т. е. имеющиеся материалы нужно распределить на выпуск продукции $П_2$ в объеме $x_2^* = 15\,952$ ед. и $П_4$ в объеме $x_4^* = 9286$ ед. Реализация этой продукции даст 195 238 ден. ед.

На выпуск 15 952 ед. продукции $П_2$ нужно выделить: первого материала $0{,}9 \cdot 15\,952 = 14\,356{,}8$ ед., второго материала $0{,}3 \cdot 15\,952 = 4785$ ед., третьего материала $2{,}1 \cdot 15\,952 = 33\,499{,}1$ ед.

На выпуск 9286 ед. продукции $П_4$ нужно выделить: первого материала $2{,}3 \cdot 9286 = 21\,357{,}8$ ед., второго материала $2{,}5 \cdot 9286 = 23\,215$ ед., третьего материала $0{,}7 \cdot 9286 = 6500{,}2$ ед.

Дополнительные переменные в оптимальном плане показывают объем неиспользуемых материалов: первого материала остается 14 286,4 ед., второй и третий материалы используются полностью.

Пример 1.19. Решить задачу

$$\max Z = 3x_1 + 6x_2;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 22, \\ x_1 &\ge 1, \\ 0 \le x_2 &\le 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. На рис. 1.6 приведено графическое решение данной задачи, особенность которой состоит в том, что любая линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей первому ограничению. Это обусловливает наличие альтернативных оптимальных планов. Любая точка отрезка CD обеспечивает целевой функции оптимум: $Z_{\max} = 18$.

В табл. 1.18 представлено завершение аналитического решения этой задачи. Оптимальный план $\mathbf{x}_1^*$ получен на третьем шаге преобразований. Поскольку при этом выполнены условия признака альтернативного оптимума, то вычисления продолжены и получен еще один оптимальный опорный план $\mathbf{x}_2^*$.

Таблица 1.18

Номер итерации	БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
				3	6	0	0	0	0
3	x_5	0	1	0	0	1	0	1	−2
	x_4	0	8	0	0	−5	1	0	$\boxed{8}$
	x_1	3	2	1	0	1	0	0	−2
	x_2	6	2	0	1	0	0	0	1
$z_j - c_j$			18	0	0	3	0	0	0
$\mathbf{x}_1^* = (2;\ 2 \mid 0;\ 8;\ 1;\ 0)$, $z(\mathbf{x}_1^*) = 18$									
4	x_5	0	3	0	0	−1/4	1/4	1	0
	x_6	0	1	0	0	−5/8	1/8	0	1
	x_1	3	4	1	0	−1/4	1/4	0	0
	x_2	6	1	0	−1	0	−1/8	0	0
$z_j - c_j$			18	0	0	3	0	0	0
$\mathbf{x}_2^* = (4;\ 1 \mid 0;\ 0;\ 3;\ 1)$, $z(\mathbf{x}_2^*) = 18$									

Составляем общее решение:

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1 \mathbf{x}_1^* + \lambda_2 \mathbf{x}_2^* = \lambda_1(2;\ 2) + \lambda_2\,(4;\ 1) =$$
$$= (2\lambda_1 + 4\lambda_2;\ 2\lambda_1 + \lambda_2),\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0.$$

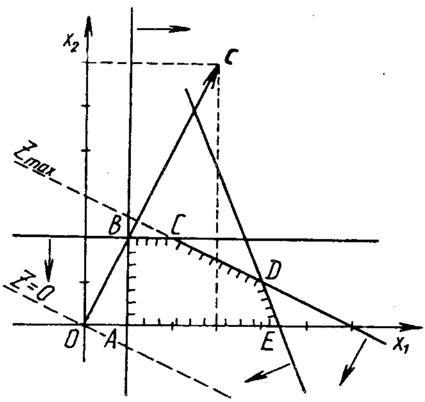


Рис. 1.6

Пример 1.20. Решить задачу

$$\max Z = 2x_1 + x_2;$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 12, \\ x_1 &\leq 3, \end{aligned}\right\}$$

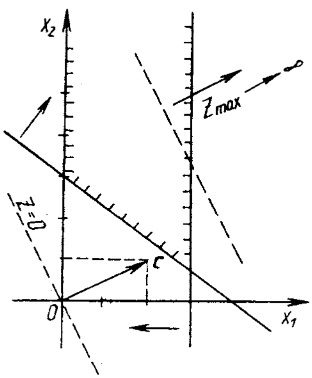
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Графическое решение задачи представлено на рис. 1.7. Из рисунка видно, что функция Z не ограничена на множестве допустимых планов. Завершение аналитического решения задачи приведено в табл. 1.19.

Т а б л и ц а 1.19

Номер итерации	БП	$c_Б$	$\mathbf{A}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4
				2	1	0	0
3	x_1	2	30	1	0	0	1
	x_3	0	78	0	−4	1	3
$z_j - c_j$			60	0	−1	0	2
$\mathbf{x}_3 = (30;\ 0;\ 78;\ 0)$, $z(\mathbf{x}_3) = 60$							

Задача решается на максимум. Опорный план $\mathbf{x}_3$ неоптимальный, так как $\Delta_2 = -1 < 0$. Нужно в базис вводить переменную $\mathbf{x}_2$, но все элементы столбца $\mathbf{A}_2$ неположительны. Следовательно, целевая функция на множестве допустимых планов не ограничена сверху, т. е. $Z \to \infty$.



Р и с. 1.7

Пример 1.21. Используя искусственный базис, решить ЗЛП

$$\min Z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3;$$
$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 6,\\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\ge 12,\end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 3}).$$

Р е ш е н и е. Составляем соответствующую M-задачу и решаем ее обычным способом. После второй итерации все оценки (см. табл. 1.20) неположительны: $\Delta_j \le 0$ ($j = \overline{1, 6}$). Следовательно, по признаку оптимальности опорный план (0; 0; 3; 0; 0; 3) оптимален. Но так как в оптимальном плане искусственная переменная w не равна нулю, то система ограничений исходной задачи несовместна. Задача решения не имеет.

Т а б л и ц а 1.20

Номер итерации	БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w
				2	−3	−4	0	0	M
2	x_1	−4	3	3	3/2	1	1/2	0	0
	w	M	3	−3	−1/2	0	−3/2	−1	1
$\bar{z}_j - c_j$			12	−14	−3	0	−2	0	0
			$3M$	$-3M$	$-\frac{1}{2}M$	0	$-\frac{3}{2}M$	$-M$	0

Задачи 1.57—1.70 решить симплексным методом и дать геометрическую интерпретацию процесса решения.

1.57. $\max Z = 2x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 12,\\ x_2 &\le 8,\\ 2x_1 + x_2 &\le 20,\end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.58. $\max Z = 12x_1 + 2x_3 + 3x_4;$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 16,\\ 2x_1 - x_2 &\le 4,\\ x_1 + x_2 - x_4 &= 4, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

1.59. $\max Z = 2x_1 + 6x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4,\\ 2x_1 + 3x_2 &\le 12,\\ 2x_1 - x_2 &\ge 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.60. $\min Z = x_1 - x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 20,\\ -x_1 + 3x_2 &\le -3,\\ 3x_1 + x_2 &\ge 9,\\ -2x_1 + 2x_2 &\le 8, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.61. $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 12,\\ 2x_1 + x_2 &\le 8,\\ x_1 - x_2 &\ge -1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_2 \le 2,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.62. $\min Z = 4x_1 + 16x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 3,\\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 6,\\ 2x_1 + x_2 &\le 4, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.63. $\max Z = 3x_1 + 9x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\le 8,\\ 2x_1 + 4x_2 &\le 8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.64. $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\le 12,\\ 4x_1 + x_2 &\le 8,\\ 4x_1 - x_2 &\le 8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.65. $\max Z = x_1 + 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 10,\\ x_1 + x_2 &\le 4,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.66. $\min Z = -2x_1 - x_2;$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\ge -10,\\ 2x_1 \qquad &\le 40,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.67. $\min Z = -12x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\ge -2,\\ x_1 \qquad &\le 4,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.68. $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 2,\\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 12,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.69. $\min Z = x_1 + 4x_2 + x_3;$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 24x_2 + 10x_3 &= 18,\\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11,\end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 3}).$$

1.70. $\min Z = 2x_1 + 9x_2 + 4x_3;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &\geq 22, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3}).$$

В задачах 1.71—1.91 составить математическую модель и с помощью ЭВМ найти оптимальный план.

1.71. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. ден. ед. Его предполагается разместить на площади 45 м^2. Участок может быть оснащен оборудованием трех видов: 1) машинами стоимостью 6 тыс. ден. ед. (здесь и далее все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 9 м^2, производительностью 8 тыс. ед. продукции за смену; 2) машинами стоимостью 3 тыс. ден. ед., занимающими площадь 4 м^2, производительностью 4 тыс. ед., продукции за смену; 3) машинами стоимостью 2 тыс. ден. ед., занимающими площадь 3 м^2, производительностью 3 тыс. ед. продукции. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу определения плана приобретения оборудования, обеспечивающего наибольшую производительность всего участка. Найти оптимальный план.

1.72. На заготовительный участок поступили стальные прутья длиной 111 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 19, 23 и 30 см, которых требуется соответственно 311, 215 и 190 шт. Построить модель, на основе которой можно решить задачу выбора варианта выполнения этой работы, при котором число разрезаемых прутьев минимально.

1.73. На заготовительный участок поступило 69 металлических прутьев длиной 107 см. Их необходимо разрезать на заготовки по 13, 15 и 31 см в комплектности, задаваемой отношением 1:4:2. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу максимизации комплектов заготовок. Найти оптимальный план.

1.74. На заготовительный участок мебельной фабрики поступили листы фанеры размерами 152×152 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 105×31, 47×90 и 30×51 см. Потребность в них —соответственно 315, 215 и 416 шт. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу выбора варианта раскроя, при котором количество разрезаемых листов минимально.

1.75. На участок поступило 120 листов фанеры, которые необходимо разрезать на заготовки в комплектности, задаваемой отношением 3:2:5 (размеры листов и заготовок указаны в задаче 1.74).

1.76. Цех мебельного комбината выпускает трельяжи, трюмо и тумбочки под телевизоры. Норма расхода материала в расчете на одно изделие, плановая себестоимость, оптовая цена предприятия, плановый (месячный) ассортимент и трудоемкость единицы продукции приведены в табл. 1.21. Запас древесностружечных плит, досок еловых и березовых 90, 30 и 14 м^3 соответственно. Плановый фонд рабочего времени 16 800 чел.-ч.

Таблица 1.21

Показатель	Изделие		
	Трельяж	Трюмо	Тумбочка
Норма расхода материала, м^3:			
древесностружечные плиты	0,032	0,031	0,038
доски еловые	0,020	0,020	0,008
доски березовые	0,005	0,005	0,006
Трудоемкость, чел.-ч	10,2	7,5	5,8
Плановая себестоимость, ден. ед.	88,81	63,98	29,60
Оптовая цена предприятия, ден. ед.	93,00	67,00	30,00
Плановый ассортимент, шт.	350	290	1200

Исходя из необходимости выполнения плана по ассортименту и возможности его перевыполнения по отдельным (или даже всем) показателям, построить модели, на основе которых можно сформулировать задачу максимизации объема реализации (за плановый период) и задачу максимизации прибыли (за тот же период).

1.77. На заводе ежемесячно скапливается около 14 т отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах — 600 тыс. шт., в малых — 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб — 1,9 ден. ед. (за тысячу штук), малых — 5,2 ден. ед. Расход металла на тысячу больших шайб — 22 кг, на тысячу малых — 8 кг. Для изготовления шайб используются два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену — 9 тыс. шт. больших шайб либо 11,5 тыс. шт. малых. Завод работает в две смены. Построить модель, на основе которой можно решить задачу определения плана производства шайб (из отходов), обеспечивающего максимальную долю в валовой продукции предприятия. За плановый период принять год. Найти оптимальный план.

1.78. Предприятие изготавливает приборы типа A, B и C, которые реализует соответственно по 600, 700 и 1150 ден. ед. за изделие. Трудоемкость их производства задана отношением 1:2:3. Ранее предприятие изготавливало только прибор типа A в количестве 900 шт. за сутки. Однако изменение объема поставок экранированного провода (при сборке приборов каждого типа расходуется одинаковое количество этого материала) в планируемом году позволит выпускать за сутки 1000 приборов. Для укомплектования каждого прибора необходим датчик того же типа, что и тип прибора. Их предполагается получать по кооперированным поставкам в количестве, обеспечивающем в сутки сборку не более 400, 500 и 200 приборов типа A, B и C соответственно. Построить модель, на основе которой можно решить задачу определения напряженных месячных планов по объему реализации и ассортименту выпускаемой продукции. Найти оптимальные планы.

1.79. Фабрика выпускает кожаные брюки, куртки и пальто специального назначения в ассортименте, заданном отношением 2:1:3. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка: дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технология предъявляет высокие требования к квалификации рабочих. Численность их в рамках планируемого периода ограничена. Время обработки изделий на каждом участке, их плановая себестоимость, оптовая цена предприятия приведены в табл. 1.22.

Таблица 1.22

Показатель	Изделие		
	Брюки	Куртка	Пальто
Норма времени на участках, чел.-ч:			
дубильном	0,3	0,4	0,6
раскройном	0,4	0,4	0,7
пошивочном	0,5	0,4	0,8
Полная себестоимость, ден. ед.	15	40,5	97,8
Оптовая цена предприятия, ден. ед.	17,5	42,0	100,0

Ограничения на фонд времени для дубильного, раскройного и пошивочного участков составляют соответственно 3360, 2688 и 5040 ч. Учитывая заданный ассортимент, построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу определения напряженного месячного плана по прибыли от реализованной продукции. Найти оптимальный план.

1.80. В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ и $Д_4$. Данные о количестве квартир разного типа в каждом из указанных типов домов, их плановая себестоимость приведены в табл. 1.23. Годовой план ввода жилой площади составляет соответственно 1000, 900, 2000 и 7000 квартир указанных типов.

Таблица 1.23

Показатель	Тип дома			
	$Д_1$	$Д_2$	$Д_3$	$Д_4$
Тип квартиры:				
однокомнатная	10	18	20	15
двухкомнатная:				
смежная	40	—	20	—
несмежная	—	20	—	60
трехкомнатная	60	90	10	—
четырехкомнатная	20	10	—	5
Плановая себестоимость, тыс. ден. ед.	8300	8350	3600	4500

1. Исходя из необходимости выполнения плана ввода квартир (а возможно, и его перевыполнения по всем показателям) и обеспеченности строительными материалами и трудовыми ресурсами, построить модель и сформулировать на ее основе экстремальную задачу, анализ которой позволит обосновать объем капиталовложений в жилищное строительство на плановый год.

2. На жилищное строительство утвержден объем капиталовложений 40 млн ден. ед. (часть этих средств, которая не будет использована в плановом году по прямому назначению, предназначена для расширения сети коммунальных предприятий города). Построить модель и сформулировать на ее основе экстремальную задачу нахождения плана строительства на финансовый год, при котором себестоимость всех вводимых домов будет минимальной.

1.81. На производственном участке изготавливают изделия $И_1$, $И_2$, $И_3$ для сборочного конвейера предприятия-заказчика. Потребность в них — 300, 500 и 400 шт. соответственно. Запасы металла на изделие $И_1$ ограниченны, поэтому их можно производить не более 350 шт. Все изделия последовательно обрабатываются на станках C_1, C_2 и C_3. Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку, плановая себестоимость и оптовая цена предприятия на все изделия приведены в табл. 1.24. Плановый фонд времени работы станков составляет: для станков C_1 и C_3 — по 6048 ч, для C_2 — 3932 ч.

Таблица 1.24

Показатель	Изделие								
	$И_1$			$И_2$			$И_3$		
	Способ обработки								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Норма времени на обработку, ч :									
на станке C_1	3	7	0	8	4	5	4	3	2
на станке C_2	2	3	6	3	2	0	2	3	1
на станке C_3	7	5	6	9	3	6	5	6	3
Плановая себестоимость, ден. ед.	130	150	110	260	200	250	190	200	180
Оптовая цена предприятия, ден. ед.	160			250			260		

Построить модель, на основе которой можно решить задачу нахождения плана загрузки станков, обеспечивающего максимальную прибыль от реализации готовой продукции. Найти оптимальный план.

1.82. Четыре строительных участка потребляют щебень, вырабатываемый тремя дробильными установками. Суточная потребность в щебне строительных участков и стоимость перевозки 1 т его от дробильных установок до строительных площадок приведены в табл. 1.25. Суточная производительность дробильных установок составляет 65, 75 и 60 т соответственно. Недостающее количество щебня можно обеспечить за счет:

1) увеличения производительности дробильной установки II, что вызывает дополнительные затраты на выработку 1 т щебня в размере 30 ден. ед.;

2) увеличения производительности дробильной установки III (затраты на изготовление 1 т щебня возрастают на 20 ден. ед.);

3) введения в эксплуатацию дробильной установки IV (из карьера) при дополнительных затратах на изготовление 1 т щебня 50 ден. ед. и стоимости перевозки 1 т щебня 30, 20, 40 и 10 ден. ед. к 1, 2, 3, 4-й строительным площадкам соответственно. Построить модель и на ее основе сформулировать задачу, анализ которой позволит определить и обосновать оптимальный план закрепления строительных площадок за дробильными установками с учетом перечисленных возможностей увеличения производства щебня.

Таблица 1.25

Показатель	Номер участка			
	1	2	3	4
Цена перевозки 1 т щебня, ден. ед.:				
от установки *I*	4	3	8	5
от установки *II*	9	7	5	4
от установки *III*	3	6	2	8
Потребность в щебне строительного участка, т	50	50	70	70

1.83. Предприятие выпускает обычный, специальный и декоративный сплавы латуни и реализует их соответственно по 30, 45 и 60 ден. ед. за единицу массы. Его производственная мощность позволяет производить (за плановый период) не более 500 ед. массы обычного сплава, 700 ед. специального и 250 ед. декоративного. Обязательными составляющими сплавов являются медь, цинк, свинец и никель. Их цена — соответственно 9, 7, 5 и 11 ден. ед. за единицу массы. По технологии декоративный сплав должен содержать не менее 7 % никеля, 49 % меди и не более 29 % свинца, специальный — не менее 3 % никеля, 71 % меди, 9 % цинка и не более 21 % свинца. В обычный сплав составляющие входят без ограничений. Считая, что себестоимость сплавов складывается только из стоимости его ингредиентов, построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу нахождения плана выпуска сплавов, обеспечивающего максимальную прибыль.

1.84. Сухогруз может принять на борт не более 1000 т груза, общий объем которого не должен превышать 500 м^3. На причале находится груз 16 наименований (различные механизмы и нестандартное оборудование). Масса, объем и цена груза каждого наименования приведены в табл. 1.26.

Таблица 1.26

Номер груза	Масса, т	Объем, м^3	Цена, тыс. ден. ед.
1	50	45	15
2	100	31	21
3	70	25	13
4	91	44	18
5	60	37	14
6	75	40	19
7	89	29	20
8	67	35	11
9	73	46	16
10	81	33	20
11	78	39	15
12	88	36	16
13	80	41	18
14	76	43	19
15	72	34	12
16	63	38	9

1. На сухогруз нельзя погрузить более одной единицы груза каждого наименования. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу выбора варианта загрузки судна с максимальной стоимостью всего груза.

2. На причале находятся только две единицы груза первого наименования и три восьмого. Подобных ограничений на другие виды груза нет. Количество груза каждого наименования, которое можно погрузить на судно, зависит лишь от наличия груза и свободного места в трюмах. Построить модель и на ее основе сформулировать задачу выбора варианта загрузки судна наиболее ценным грузом.

1.85. На поточной линии, оборудованной прессами для холодной штамповки $Пр_1$, $Пр_2$, $Пр_3$, $Пр_4$, $Пр_5$, $Пр_6$, обрабатываются платы $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ и $П_5$. Они последовательно проходят все прессы, начиная с $Пр_1$. Перед обработкой каждой платы необходимо снять с прессов предыдущие штампы (если, конечно, это требуется) и установить новые. Штампы, необходимые для обработки плат, указаны в табл. 1.27.

Таблица 1.27

Плата	Пресс					
	$Пр_1$	$Пр_2$	$Пр_3$	$Пр_4$	$Пр_5$	$Пр_6$
$П_1$	$Ш_2$	$Ш_4$	$Ш_7$	$Ш_8$	$Ш_{10}$	$Ш_1$
$П_2$	$Ш_3$	$Ш_4$	$Ш_6$	$Ш_6$	$Ш_9$	$Ш_{11}$
$П_3$	$Ш_7$	$Ш_8$	$Ш_{10}$	$Ш_6$	$Ш_1$	$Ш_{11}$
$П_4$	$Ш_2$	$Ш_5$	$Ш_3$	$Ш_7$	$Ш_{10}$	$Ш_9$
$П_5$	$Ш_4$	$Ш_8$	$Ш_6$	$Ш_5$	$Ш_9$	$Ш_3$

Нормы времени на снятие и установку (будем считать, что они совпадают) каждого штампа приведены ниже:

Штамп	$Ш_1$	$Ш_2$	$Ш_3$	$Ш_4$	$Ш_5$	$Ш_6$	$Ш_7$	$Ш_8$	$Ш_9$	$Ш_{10}$	$Ш_{11}$
Норма времени на снятие (установку) штампов, мин	10	15	20	17	30	22	14	19	12	18	16

Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу нахождения последовательности запуска плат на линию с минимальным временем переналадок всего оборудования. Найти оптимальный план запуска плат на линию.

1.86. Четыре растворных узла строительного управления потребляют в сутки соответственно 170, 175, 220 и 190 т песка. Его производят три фабрики, суточная производительность которых соответственно 380, 340 и 300 т. Фабрики взимают плату за погрузку песка каждые сутки и не с количества отгруженного материала, а «с факта» его отгрузки за это время данному потребителю (что делается с целью закрепления его за фабрикой). В табл. 1.28 приведена стоимость перевозки 1 т песка от каждой фабрики к каждому узлу, цена 1 т песка и суточная стоимость погрузки. По приведенным данным построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу выбора оптимального варианта закрепления растворных узлов за фабриками.

Таблица 1.28

Показатель	Номер фабрики		
	1	2	3
Стоимость перевозки 1 т песка от фабрики, ден. ед., к узлу:			
первому	0,9	1,5	0,6
второму	1	0,8	0,9
третьему	0,7	0,4	1,2
четвертому	0,5	1	1,3
Цена 1 т песка, ден. ед.	3	2,9	2,2
Суточная стоимость погрузки, ден. ед.	19	25	15

1.87. Строительной организации необходимо выполнить четыре вида земляных работ, объем которых — соответственно 7000, 6500, 7600 и 8100 м^3. Для их осуществления предполагается использовать три механизма. Производительность механизмов и себестоимость 1 ч работы каждого из них приведены в табл. 1.29. Плановый фонд времени механизмов *I*, *II* и *III* составляет соответственно 350, 600 и 290 машино-часов.

1. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу нахождения плана организации работ с минимальными затратами на его осуществление.

Таблица 1.29

Показатель	Механизм											
	I				*II*				*III*			
	Виды работ											
	1	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*
Производительность механизма, $м^3/ч$	20	15	16	30	14	18	35	32	15	29	40	15
Себестоимость 1 ч работы механизма, ден. ед.	20	50	30	60	20	40	50	70	80	30	60	30

2. Объемы земляных работ заданы отношением 3:2:5:1. Построить модель и сформулировать на ее основе задачу, анализ которой позволит найти план работы механизмов с наименьшими затратами на его осуществление.

1.88. Нефтеперерабатывающий завод получает за плановый период четыре полуфабриката: 600 тыс. л алкилата, 316 тыс. л крекинг-бензина, 460 тыс. л бензина прямой перегонки и 200 тыс. л изопентана. В результате смешивания этих ингредиентов в пропорциях 2:3:1:5, 2:4:3:4, 5:1:6:2 и 7:1:3:2 получают бензин четырех сортов: $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ и $Б_4$. Цена его реализации — соответственно 1350, 1400, 1600 и 1250 ден. ед. за тысячу литров.

1. Предположив, что реализация любого сорта специального бензина не вызовет затруднений, построить модель и сформулировать на ее основе задачу, анализ которой позволит обосновать план реализации и планировать ассортимент выпускаемой продукции.

2. Завод выпускает четыре сорта бензина в ассортименте, заданном отношением 2:3:1:4. Построить модель и сформулировать на ее основе задачу, анализ которой позволит обосновать план реализации готовой продукции (при выполнении условий предыдущего пункта).

1.89. Производственные мощности каждого из семи заводов объединения позволяют в установленные сроки выполнять только один из пяти заказов, имеющихся в портфеле заказов объединения. Данные о затратах на выполнение заказов (в тыс. ден. ед.) приведены в табл. 1.30.

Таблица 1.30

Номер заказа	Номер завода						
	1	2	3	4	5	6	7
1	15	17	16	15,5	14	17	14
2	13	11	12	16	15	12,5	16
3	9	5	8	7	10	5,5	8
4	20	21	19	18,5	22	16	17
5	13	16	15	14	13,5	14,5	16

1. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу нахождения варианта распределения заказов с минимальными затратами объединения на его выполнение.

2. Заводы 6 и 7 не могут выполнить заказы. Построить модель и сформулировать на ее основе экстремальную задачу минимизации затрат объединения при распределении заказов между остальными пятью заводами.

1.90. Рацион стада крупного рогатого скота из 220 голов включает пищевые продукты *A*, *B*, *C*, *D* и *E*. В сутки одно животное должно съедать не менее 2 кг продукта *A*, 1,5 кг продукта *B*, 0,9 кг продукта *C*, 3 кг продукта *D* и 1,8 кг продукта *E*. Однако в чистом виде указанные продукты не производятся. Они содержатся в концентратах K_1, K_2 и K_3. Их цена — соответственно 0,5; 0,4; 0,9 ден. ед. за килограмм. Содержание продуктов в килограмме концентрата (в процентах) указано в табл. 1.31.

Таблица 1.31

Концентрат	Продукт				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K_1	15	22	0	0	4
K_2	19	17	0	14	7
K_3	5	12	25	5	8

Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу минимизации затрат на покупку концентратов для рационального кормления скота. Найти оптимальный план.

1.91. Потребность района в однородном продукте (на перспективу) составляет 150 тыс. т. В районе функционирует одно предприятие мощностью 30 тыс. т. Удовлетворение перспективной потребности может быть осуществлено как за счет расширения мощности действующего предприятия, так и за счет строительства новых. Затраты на годовой выпуск продукции (в тыс. ден. ед.) для всех вариантов строительства в трех возможных пунктах представлены в табл. 1.32.

Таблица 1.32

Номер пункта	Мощность предприятия, тыс. т				
	10	20	30	40	50
1	8	10	—	21	40
2	—	13	17	25	45
3	6	16	20	19	—

При расширении мощности действующего предприятия на 10 тыс. т затраты составляют 9 тыс. ден. ед., на 20 тыс. т — 14 тыс. ден. ед., на 30 тыс. т — 16 тыс. ден. ед., на 40 тыс. т — 19 тыс. ден. ед. и на 50 тыс. т — 39 тыс. ден. ед. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу минимизации производственных затрат с учетом удовлетворения потребности района на перспективу. Найти оптимальный план.

2

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

2.1. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной*. Многие задачи линейного программирования первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о паре взаимно двойственных задач линейного программирования. Пара симметричных двойственных ЗЛП имеет следующий вид:

прямая задача	*двойственная задача*
$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$	$\min f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m}),$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ (j = \overline{1, n}),$
$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}).$	$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1, m}).$

Рассмотренная пара взаимно двойственных задач может быть экономически интерпретирована, например, так.

Прямая задача: сколько и какой продукции $x_j\,(j = \overline{1, n})$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции c_j $(j = \overline{1, n})$, объемах имеющихся ресурсов b_i $(i = \overline{1, m})$ и нормах расходов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов y_i $(i = \overline{1, m})$, чтобы при заданных b_i, c_j и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

Пример 2.1. Сформулировать правила построения модели любой из задач данной пары, если другая модель известна. В п. «а» и «б» построены пары симметричных взаимно двойственных задач. В п. «в» приведен порядок построения двойственной задачи к несимметричной ЗЛП:

прямая задача	*двойственная задача*
а) $\max Z = 2x_1 + 7x_2;$ $\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 14,\\ x_1 + x_2 &\le 8,\end{aligned}\right\}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$	$\min f = 14y_1 + 8y_2;$ $\left.\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &\ge 2,\\ 3y_1 + y_2 &\ge 7,\end{aligned}\right\}$ $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0;$
б) $\min Z = 12x_1 + 24x_2 + 18x_3;$ $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\ge 12,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\ge 1,\\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 &\ge 3,\end{aligned}\right\}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$	$\max f = 12y_1 + y_2 + 3y_3;$ $\left.\begin{aligned} -y_1 + 3y_2 - 5y_3 &\le 12,\\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 &\le 24,\\ 3y_1 + y_2 + y_3 &\le 18,\end{aligned}\right\}$ $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0;$

в) пусть имеем ЗЛП в произвольной несимметричной форме. Построить ей двойственную:

$$\max Z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 \qquad\quad + x_4 &\ge 3,\\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 4x_1 - 5x_2 \qquad\quad + 2x_4 &\ge -1,\\ x_1 \qquad + 3x_3 + 2x_4 &\ge 2,\\ -2x_1 + x_2 \qquad\quad - 3x_4 &= -5,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_4 \ge 0,$$

x_2, x_3 — любого знака.

Прежде всего ограничения типа $\ge$ умножением на -1 сведем к ограничениям типа $\le$. Получим:

$$\max Z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4;$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +4x_2 & & -x_4 & \le & -3, \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 4, \\ -4x_1 & +5x_2 & & -2x_4 & \le & 1, \\ x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & \le & -2, \\ 2x_1 & +x_2 & & -3x_4 & = & -5, \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}$$

$x_1 \ge 0$, $x_4 \ge 0$,

x_2, x_3 — любого знака.

Р е ш е н и е. Для построения двойственной задачи необходимо пользоваться следующими правилами:

1) если прямая задача решается на максимум, то двойственная — на минимум, и наоборот;

2) в задаче на максимум ограничения-неравенства имеют смысл $\le$, а в задаче минимизации —смысл $\ge$;

3) каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, и наоборот, каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;

4) матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием;

5) свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, и наоборот;

6) если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же нет, то как ограничение-равенство;

7) если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

В результате применения указанных правил получим следующую модель двойственной задачи для модели ЗЛП, сформулированной в п. «в»:

$$\min f = -3y_1 + 4y_2 + y_3 - 2y_4 - 5y_5;$$

$$\left.\begin{aligned}
-2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + y_4 - 2y_5 &\geq -12,\\
4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 &= 10,\\
2y_2 - 3y_4 &= -15,\\
-y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 &\geq -11,
\end{aligned}\right\}$$

$y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$,

y_2 и y_5 — произвольного знака.

Пример 2.2. На кондитерской фабрике весь ассортимент выпускаемой карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные K_1, K_2 и K_3. Расход основного сырья и его запас указаны в табл. 2.1. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. В качестве критерия оптимальности плана принять максимум прибыли. Требуется составить математические модели прямой и двойственной задач.

Таблица 2.1

Основное сырье	Расход сырья на 1 т			Общий запас сырья
	K_1	K_2	K_3	
I (сахарный песок)	0,7	0,7	0,7	700
II (патока)	0,3	0,3	0,2	300
III (фруктовое пюре)	0	0,2	0,3	150
Уровень прибыли	100	110	120	

Решение. Пусть (x_1, x_2, x_3) — план выпуска карамели групп K_1, K_2 и K_3, а Z — суммарная прибыль, тогда математическая модель прямой задачи принимает следующий вид:

$$\max Z = 100x_1 + 110x_2 + 120x_3;$$

$$\left.\begin{aligned}
0{,}7x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}7x_3 &\leq 700,\\
0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 &\leq 300,\\
0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 &\leq 150,
\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Математическая модель двойственной задачи:

$$\min f = 700y_1 + 300y_2 + 150y_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 07y_1 + 0{,}3y_2 \geq 100, \\ 0{,}7y_1 + 0{,}3y_2 + 02y_3 \geq 110, \\ 0{,}7y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 \geq 120, \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Пример 2.3. Предприятие оптовой торговли, исходя из специализации, может реализовывать четыре вида товаров: T_1, T_2, T_3 и T_4. Лимитируемые при этом ресурсы и нормы расхода на единицу реализуемых товаров представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Лимитируемые ресурсы и показатели	Товарная группа				Объем ресурса	Знак ограничения
	T_1	T_2	T_3	T_4		
Складские площади, м^2	1,8	2,6	1,6	1,0	11 000	$\leq$
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1,5	1,4	0,5	0,8	9500	$\leq$
Издержки обращения, ден. ед.	17	23	28	12	12 000	$\leq$
Товарные запасы, ден. ед.	3,1	4,2	3,0	2,0	18 000	$\leq$
Уровень товарооборота, ден. ед.	200	150	170	50	750 000	$\geq$
Минимально допустимый план товарооборота по группе	$\geq$120	=1600	=1500	$\geq$1200	—	—
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	120	50	30	100		
План **x**	x_1	x_2	x_3	x_4		

Построить модели прямой и двойственной задач при условии, что заказ на T_2 должен составить 1600 ед., на T_3 — 1500 ед.

Р е ш е н и е. Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 — объемы реализации соответствующей группы товаров, Z — сумма прибыли.

Математическая модель прямой задачи:

$$\max Z = 120x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 100x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} 1{,}8x_1 + 2{,}6x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}0x_4 &\le 11000,\\ 1{,}5x_1 + 1{,}4x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}8x_4 &\le 9500,\\ 17x_1 + 23x_2 + 28x_3 + 12x_4 &\le 120000,\\ 3{,}1x_1 + 4{,}2x_2 + 3{,}0x_3 + 2{,}0x_4 &\le 18000,\\ 200x_1 + 150x_2 + 170x_3 + 50x_4 &\ge 750000, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 1200,\ x_2 = 1600,\ x_3 = 1500,\ x_4 \ge 1200.$$

Модель двойственной задачи:

$$\min f = 11\,000y_1 + 9500y_2 + 120\,000y_3 + 18\,000y_4 - {}$$
$$- 750\,000y_5 - 1200y_6 - 1600y_7 - 1500y_8 - 1200y_9;$$

$$\left.\begin{aligned} 1{,}8y_1 + 1{,}5y_2 + 17y_3 + 3{,}1y_4 - 200y_5 - y_6 &\le 120,\\ 2{,}6y_1 + 1{,}4y_2 + 23y_3 + 4{,}2y_4 - 150y_5 + y_7 &\ge 50,\\ 1{,}6y_1 + 0{,}5y_2 + 28y_3 + 3y_4 - 170y_5 + y_8 &\ge 30,\\ y_1 + 0{,}8y_2 + 12y_3 + 2y_4 - 50y_5 - y_9 &\ge 100, \end{aligned}\right\}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_5 \ge 0,\ y_6 \ge 0,\ y_9 \ge 0,$$
$$y_7,\ y_8 \text{ — любого знака.}$$

2.1. Построить двойственные задачи к следующим ЗЛП в симметричной форме:

а) $\max Z = 3x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 6,\\ 4x_1 + x_2 &\le 4, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

б) $\min Z = -10x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\ge 0,\\ -5x_1 + x_2 &\ge -5, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

в) $\min Z = 2x_1 - 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\ge -2,\\ -2x_1 + x_2 &\le 2,\\ x_1 + x_2 &\le 5,\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.2. К приведенным ниже ЗЛП построить двойственные ЗЛП в несимметричной форме:

а) $\min Z = 2{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 6,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\ge 9,\\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 11,\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$
x_2 — любого знака;

б) $\max Z = 6x_1 + 8x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6,\\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 10,\\ x_1 + x_5 &= 5,\\ 3x_2 + 2x_3 + x_6 &= 12,\end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 6});$

в) $\min Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\ge 6,\\ x_1 - x_3 &\le 8,\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$
x_3, x_4 — любого знака.

2.2. Теоремы двойственности и их экономическое содержание

Основное неравенство теории двойственности: для любых допустимых планов **x** и **y** пары взаимно двойственных задач справедливо неравенство $z(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{y})$. Его экономическое содержание состоит в том, что для любого допустимого плана производства **x** и любого допустимого вектора оценок ресурсов **y** общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

Критерий оптимальности Канторовича (достаточный признак оптимальности): если для некоторых допустимых планов $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ пары двойственных задач выполняется равенство $z(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{y}^*)$, то $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ являются оптимальными планами соответствующих задач. Экономический смысл критерия следующий: план производства **x** и вектор оценок ресурсов **y** являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Теорема существования оптимальных планов пары двойственных задач: для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существования допустимого плана для каждой из них.

Первая теорема двойственности: если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают: $z(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{y}^*)$. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадения значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т. е. равенство общей оценки продукции и ресурсов обусловливает убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставлять и балансировать затраты и результаты системы.

Связь между задачами двойственной пары глубже, чем указано в формулировке теоремы: решая симплексным методом одну из них, автоматически получаем решение другой. Для этого достаточно воспользоваться соответствием переменных прямой и двойственной задач и оценок в последней симплексной таблице:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
x_1 & x_2 & \dots x_j & & \dots x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots x_{n+i} & & \dots x_{n+m} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \dots y_{m+j} & & \dots y_{m+n} & y_1 & y_2 & \dots y_i & & \dots y_m \\
\hline
\Delta_1^* & \Delta_2^* & \dots \Delta_j^* & & \dots \Delta_n^* & \Delta_{n+1}^* & \Delta_{n+2}^* & \dots \Delta_{n+i}^* & & \dots \Delta_{n+m}^*
\end{array}$$

Отсюда имеем оптимальный план двойственной задачи. Если прямая задача решается на максимум, то

$$y_1^* = \Delta_{n+1}^*,\ y_2^* = \Delta_{n+2}^*,\ \dots,\ y_i^* = \Delta_{n+i}^*,\ \dots,\ y_m^* = \Delta_{n+m}^*,$$
$$y_{m+1}^* = \Delta_1^*,\ y_{m+2}^* = \Delta_2^*,\ \dots,\ y_{m+j}^* = \Delta_j^*,\ \dots,\ y_{m+n}^* = \Delta_n^*.$$

Если прямая задача решается на минимум, то

$$y_i^* = -\Delta_{n+i}^*\ (i = \overline{1, m}),\ y_{m+j}^* = -\Delta_j^*\ (j = \overline{1, n}).$$

Пример 2.4. Исходя из специализации, предприятие может выпускать четыре вида продукции $П_j$ $(j = \overline{1, 4})$, используя для этого три вида сырья $C_i (i = \overline{1, 3})$. Общие объемы имеющегося сырья b_i, нормы их расхода на единицу продукции и цена реализации единицы каждого вида продукции представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Вид сырья	Продукция				Объем сырья
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	5	1	3000
Цена реализации	75	30	60	120	

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий максимум реализации. Единственный ли оптимальный план имеет задача? Если нет, то записать выражение для всех оптимальных планов.

2. Составить модель двойственной задачи и, используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, найти оптимальный план двойственной задачи.

Р е ш е н и е. 1. Пусть $\mathbf{x} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4)$ — план выпуска. Математическая модель задачи:

$$\max Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + 4x_4 \le 2400, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 1200, \\ 3x_1 + 5x_3 + x_4 \le 3000, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,\ 4}).$$

В табл. 2.4 приведены две последние итерации решения задачи симплексным методом.

Т а б л и ц а 2.4

Номер итерации	БП	$\mathbf{c}_Б$	$\mathbf{A}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
				75	30	60	120	0	0	0
2	x_4	120	550	11/24	1/24	0	1	1/4	–1/24	0
	x_3	60	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0
	x_7	0	50	13/24	241/24	0	0	1/4	47/24	1
$z_j - c_j$			90 000	0	75	0	0	30	15	0
3	x_4	120	6600/13							
	x_3	60	4800/13							
	x_1	75	1200/13							
$z_j - c_j$			90 000	0	75	0	0	30	15	0

Так как все оценки после второй итерации неотрицательны, то найденный опорный план оптимален:

$$\mathbf{x}_2^* = (0;\ 0;\ 400;\ 550\ |\ 0;\ 0;\ 50),\ z(\mathbf{x}_2^*) = 90\ 000.$$

Основные переменные $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 400$, $x_4^* = 550$ показывают, что продукцию первого и второго вида выпускать нецелесообразно, продукции третьего вида следует выпускать 400 ед., четвертого — 550 ед. При этом, так как $x_5^* = x_6^* = 0$, первый и второй ресурсы используются полностью, а третьего остается 50 ед. ($x_7^* = 50$). Единствен ли полученный оптимальный план? Нет. Так как существует свободная переменная, оценка которой равна нулю ($\Delta_1 = 0$), то, введя в базис переменную x_1, после третьей итерации получим новый оптимальный план:

$$\mathbf{x}_3^* = \left(\frac{1200}{13};\ 0;\ \frac{4800}{13};\ \frac{6600}{13}\ \middle|\ 0;\ 0;\ 0\right),\quad z(\mathbf{x}_3^*) = 90\ 000.$$

Общее оптимальное решение выразится формулой

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1\mathbf{x}_1^* + \lambda_2\mathbf{x}_2^* =$$

$$= \left(\lambda_2 \cdot \frac{1200}{13};\ 0;\ \lambda_1 \cdot 400 + \lambda_2 \cdot \frac{4800}{13};\ \lambda_1 \cdot 550 + \lambda_2 \cdot \frac{6600}{13}\right),$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; $\lambda_1 \geq 0$; $\lambda_2 \geq 0$.

2. Составим модель двойственной задачи:

$$\min f = 2400y_1 + 1200y_2 + 3000y_3;$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq 75, \\ y_1 & + & 5y_2 & & & \geq 30, \\ 0{,}5y_1 & + & 3y_2 & + & 6y_3 & \geq 60, \\ 4y_1 & & & + & y_3 & \geq 120, \end{array}\right\}$$

$$y_i \geq 0\ (i = \overline{1,\ 3}).$$

Ее решение выпишем из индексной строки симплексной таблицы, используя соответствие переменных:

$$\begin{array}{cccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}.$$

Имеем: $\mathbf{y}^* = (30;\ 15;\ 0\ |\ 0;\ 75;\ 0;\ 0)$, $f(\mathbf{y}^*) = 90\ 000$.

Пример 2.5. Нужно составить диету (смесь), включающую питательные вещества $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Для составления диеты могут быть использованы продукты M_1, M_2 и M_3, содержащие указанные вещества в различных сочетаниях. Содержание питательных веществ в диете, продуктах и цены на них указаны в табл. 2.5.

Требуется составить пару двойственных задач, решить одну из них симплексным методом и получить решение другой.

Таблица 2.5

Питательное вещество	Содержание питательных веществ в продуктах			Минимальное содержание питательных веществ в диете	Двойственные переменные
	M_1	M_2	M_3		
$П_1$	4	4	6	62	y_1
$П_2$	6	1	2	30	y_2
$П_3$	4	6	4	44	y_3
Цена продукта	8	5	6		
План **x**	x_1	x_2	x_3		

Решение. Табл. 2.5 дополнена обозначениями переменных прямой и двойственной задач. Модель прямой задачи:

$$\min Z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\ge 62, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 30, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\ge 44, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Модель двойственной задачи:

$$\max f = 62y_1 + 30y_2 + 44y_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 4y_1 + 6y_2 + 4y_3 &\le 8, \\ 4y_1 + y_2 + 6y_3 &\le 5, \\ 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Так как двойственная задача имеет ограничения типа $\le$, то ее каноническая форма принимает предпочтительный вид:

$$\max f = 62y_1 + 30y_2 + 44y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 4y_1 + 6y_2 + 4y_3 + y_4 &= 8, \\ 4y_1 + y_2 + 6y_3 + y_5 &= 5, \\ 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_6 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

$$y_i \ge 0\ (i = \overline{1, 6}).$$

В табл. 2.6 представлены две последние итерации решения задачи.

Таблица 2.6

БП	$c_Б$	A_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			62	30	44	0	0	0
y_2	30	6/7	0	1	2/7	3/14	0	–1/7
y_5	0	9/7	0	0	$\boxed{24/7}$	1/14	1	–5/7
y_1	62	5/7	1	0	4/7	–1/14	0	3/14
$f - b$		70	0	0	0	2	0	9
y_2	30	3/4	0	1	0	5/24	–1/12	–1/12
y_3	44	3/8	0	0	1	1/48	7/24	–5/24
y_1	62	1/2	1	0	0	–1/12	–1/6	1/3
$f - b$		70	0	0	0	2	0	9
			x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3

Двойственная задача имеет два оптимальных опорных плана:

$$\mathbf{y}_1^* = \left(\frac{5}{7};\ \frac{6}{7};\ 0\ \middle|\ 0;\ \frac{9}{7};\ 0\right),\quad f(\mathbf{y}_1^*) = 70,$$

$$\mathbf{y}_2^* = \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{8}\ \middle|\ 0;\ 0;\ 0\right),\quad f(\mathbf{y}_2^*) = 70.$$

Используя соответствие переменных:

$$\begin{array}{ccc|ccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array},$$

записываем оптимальный план прямой задачи:

$$\mathbf{x}^* = (2;\ 0;\ 9\ |\ 0;\ 0;\ 0),\ z(\mathbf{x}^*) = 70.$$

2.3. Для приведенных ниже задач записать двойственную. Решить одну из них симплексным методом и получить решение другой:

а) $\max Z = 7x_1 + 13x_2 + 8x_3;$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_3 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 2, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 3});$$

б) $\max Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3;$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 > 11, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 3});$$

в) $\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4;$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 4, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 4});$$

г) $\min Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3;$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 15, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 \ge 17, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 3});$$

д) $\min Z = 3x_1 + 4x_2 - 6x_3;$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 7, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, 3});$$

е) $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 20, \\ -x_1 + 4x_2 \quad + x_4 &= 16, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

Вторая теорема двойственности (о дополняющей нежесткости): для того чтобы планы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \qquad (2.1)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0. \qquad (2.2)$$

Условия (2.1), (2.2) называются *условиями дополняющей нежесткости.* Из них следует: если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач не обращается в строгое равенство оптимальным планом этой задачи, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство, т. е. если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i$, то $y_i^* = 0$ $(i = \overline{1, m})$, если $y_i^* > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i$ $(i = \overline{1, m})$. Точно так же: если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j$ $(j = \overline{1, n})$, то $x_j^* = 0$, если $x_j^* > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j$ $(j = \overline{1, n})$. Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану $\mathbf{x}^*$ производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса b_i, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует вывод: двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а избыточный ресурс (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Пример 2.6. Продукция в цехе может производиться тремя технологическими способами T_j $(j = \overline{1, 3})$. Объемы ресурсов b_i ($i = \overline{1, 3}$) и их расход в единицу времени для каждой технологии, а также производительности технологий (в денежных единицах за единицу времени работы по данной технологии) представлены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Ресурсы	Технологический способ			Объем ресурса	y
	T_1	T_2	T_3		
Рабочая сила, чел.-ч	15	20	25	1200	y_1
Сырье, т	2	3	2,5	150	y_2
Электроэнергия, кВт-ч	35	60	60	3000	y_3
Производительность технологического способа	300	250	450		
План **x**	x_1	x_2	x_3		

Требуется определить оптимальный план использования каждого технологического способа x_j ($j = \overline{1, 3}$), т. е. время использования каждого способа. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости.

Решение. Запишем модели прямой и двойственной задач:

прямая задача

$$\max Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 &\le 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 &\le 3000, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$$

двойственная задача

$$\min f = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 &\ge 300, \\ 20y_1 + 3y_2 + 60y_3 &\ge 250, \\ 25y_1 + 2{,}5y_2 + 60y_3 &\ge 450, \end{aligned}\right\}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

В табл. 2.8 приведен результат решения прямой задачи симплексным методом.

Оптимальный план использования технологий $\mathbf{x}^* = (60; 0; 12 \mid 0; 0; 180)$, $z(\mathbf{x}^*) = 23\,400$, т. е. первую технологию целесообразно применять в течение 60 ч, третью — 12 ч, вторую технологию применять нецелесообразно. При этом продукции будет выпущено на 23 400 ден. ед.

Таблица 2.8

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			300	250	450	0	0	0
x_3	450	12	0	–0,4	1	0,16	–1,2	0
x_1	300	60	1	2	0	–0,2	2	0
x_6	0	180	0	14	0	–2,6	2	1
$z_j - c_j$		23 400	0	170	0	12	60	0

Решение двойственной задачи:

$$\mathbf{y} = (12;\ 60;\ 0 \mid 0;\ 170;\ 0),\ f(\mathbf{y}^*) = 23\ 400.$$

Так как $y_1^* = 12 > 0$, $y_2^* = 60 > 0$, то первый и второй ресурсы используются полностью. Третий ресурс избыточен: $x_6^* = 180$. Его двойственная оценка равна нулю: $y_3^* = 0$. Таким образом, если при j-м технологическом способе производства суммарная оценка ресурсов, идущих на выпуск единицы продукции, выше дохода c_j, то данный способ не должен внедряться ($x_j^* = 0$). Если же j-й технологический способ используется в оптимальном плане, то суммарная оценка ресурсов, необходимых для производства единицы продукции, равна доходу c_j. Проверим условия о дополняющей нежесткости.

Для прямой задачи:

$$\left.\begin{aligned} 15x_1^* + 20x_2^* + 25x_3^* &= 1200,\\ 2x_1^* + 3x_2^* + 2{,}5x_3^* &= 150,\\ 35x_1^* + 60x_2^* + 60x_3^* &= 2820 <\\ &< 3000, \end{aligned}\right| \begin{aligned} x_4^* &= 0,\\ x_5^* &= 0,\\ x_6^* &= 180 > 0, \end{aligned}\left|\begin{aligned} y_1^* &= 12 > 0,\\ y_2^* &= 60 > 0,\\ y_3^* &= 0. \end{aligned}\right.$$

Для двойственной задачи:

$$\left.\begin{aligned} 15y_1^* + 2y_2^* + 35y_3^* &= 300,\\ 20y_1^* + 3y_2^* + 60y_3^* &= 420 >\\ &> 250,\\ 25y_1^* + 2{,}5y_2^* + 60y_3^* &= 450, \end{aligned}\right| \begin{aligned} y_4^* &= 0,\\ &\\ y_5^* &= 170 > 0,\\ y_6^* &= 0, \end{aligned}\left|\begin{aligned} x_1^* &= 60 > 0,\\ &\\ x_2^* &= 0,\\ x_3^* &= 12 > 0. \end{aligned}\right.$$

Условия (2.1), (2.2) выполняются.

Третья теорема двойственности: двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения ЗЛП, т. е.

$$\partial z(\mathbf{x})/\partial b_i = y_i^* \ (i = \overline{1, m}). \tag{2.3}$$

Выясним экономическое содержание третьей теоремы двойственности. Для этого в выражении (2.3) дифференциалы заменим приращениями, т. е. $\partial b_i \approx \Delta b_i$, $\partial z(\mathbf{x}^*) \approx \Delta z(\mathbf{x}^*)$. Получим $\Delta z(\mathbf{x}^*) = y_i^* \Delta b_i$; при $\Delta b_i = 1$ имеем $\Delta z(\mathbf{x}^*) \approx y_i^*$. Отсюда двойственная оценка численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу. Двойственные оценки y_i часто называются ***скрытыми, теневыми*** или ***маргинальными оценками ресурсов.***

Пример 2.7. В задаче о выборе оптимальных технологий (пример 2.6, табл. 2.8) выяснить экономический смысл двойственных переменных.

Решение. Из табл. 2.8 найдено решение двойственной задачи:

$$\mathbf{y}^* = (12;\ 60;\ 0 \mid 0;\ 170;\ 0),\ f(\mathbf{y}^*) = 23\ 400.$$

Как следует из решения, первый и второй ресурсы потребляются полностью. Их двойственные оценки положительны. Приращение первого ограниченного ресурса на единицу ведет к увеличению целевой функции на 12, второго — на 60, третий ресурс избыточен: $x_6^* = 180$. Его двойственная оценка равна нулю: $y_3^* = 0$. Поэтому дальнейшее его увеличение не влияет на значение целевой функции. Что же показывают значения дополнительных двойственных оценок $y_4^* = 0$, $y_5^* = 170$, $y_6^* = 0$? Оптимальный план исходной задачи

$$\mathbf{x}^* = (60;\ 0;\ 12 \mid 0;\ 0;\ 180),\ z(\mathbf{x}^*) = 23\ 400$$

говорит о том, что первую технологию целесообразно использовать в течение 60 ч, третью — 12 ч. Вторая технология вообще не должна внедряться: она заведомо убыточная. Если ее все же использовать, то она в течение каждого часа работы будет снижать достигнутый уровень выпуска на $y_5^* = 170$ ден. ед. Значения $y_4^* = y_6^* = 0$ свидетельствуют о том, что первая и третья технологии являются неубыточными. В самом деле, из второго ограничения двойственной задачи следует:

$$20y_1 + 3y_2 + 60y_3 - y_5 = 250.$$

Стоимость ресурсов, используемых в единицу времени при работе по второму технологическому способу, составит

$$20y_1^* + 3y_2^* + 60y_3^* = 20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420 \text{ ден. ед.}$$

В единицу же времени этот способ может дать продукции на 250 ден. ед. Поэтому убыток в единицу времени при работе этим способом составит $y_5^* = 420 - 250 = 170$ (ден. ед.).

2.3. Применение оценок в послеоптимизационном анализе

Применение оценок в послеоптимизационном анализе покажем на примере задачи определения оптимального ассортимента выпускаемой продукции.

Пример 2.8. Предприятие может выпускать n видов продукции $П_j$ $(j = \overline{1, n})$. Для этого используется m видов ресурсов. Общий объем ресурсов b_i $(i = \overline{1, m})$ и нормы их расхода на единицу продукции j-го вида (a_{ij}) представлены в табл. 2.9*. Там же приведены цены реализации c_j единицы каждой продукции.

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, доставляющий предприятию максимум выручки.

2. Составить модель двойственной задачи. Используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, выписать оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач.

---

* Вариант * решен, остальные варианты (1—10) можно использовать в качестве упражнений.

Таблица 2.9

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	75	90	80	300	200	40	60	60	25	50	200
c_2	30	60	30	350	250	30	30	70	10	100	250
c_3	60	40	20	600	500	60	70	120	20	150	125
c_4	120	70	10	650	400	70	35	130	40	400	100
b_1	2400	1800	3000	1280	10000	2800	1000	1600	12 000	17 000	7400
b_2	1200	2100	700	2200	2600	800	300	1100	6000	350	5200
b_3	3000	8000	3400	8000	3700	2500	650	1000	15 000	15 000	20 000
a_{11}	2	1	2	4	25	4	20	20	20	3	15
a_{12}	1	0	1	4	25	2	10	10	10	1	20
a_{13}	0,5	2	1	4	20	2	60	10	5	1	25
a_{14}	4	1	3	4	15	2	10	10	40	2	25
a_{21}	1	0	1	6	4	2	5	6	10	1	6
a_{22}	5	1	0	5	10	0	30	5	50	2	4
a_{23}	3	3	2	4	4	2	40	4	30	0	10
a_{24}	0	2	1	3	6	2	15	33	0	1	4
a_{31}	3	4	1	16	8	2	60	4	30	0	10
a_{32}	0	2	2	24	7	4	40	6	0	1	4
a_{33}	6	0	1	40	4	2	10	10	60	2	7
a_{34}	1	4	8	52	10	0	40	13	10	1	8
a_5	80	75	40	500	300	65	50	100	30	120	300
a_{15}	2	1	2	5	20	2	20	20	25	2	20
a_{25}	4	2	1	6	7	1	15	3	10	2	5
a_{35}	3	5	3	20	8	4	30	5	15	1	10

3. Построить матрицу $[\eta_{ik}]$ коэффициентов взаимозаменяемости ресурсов. Дать экономическую интерпретацию ее элементов.

4. Оценить рентабельность новой продукции и ее цену, характеристики которой c_{n+1} и $a_{i,\,n+1}$ представлены в табл. 2.9.

5. Определить границы изменения коэффициентов целевой функции, в пределах которых ассортимент выпускаемой продукции не меняется.

6. Определить границы изменения ресурсов, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.

7. Проанализировать коэффициенты технологической матрицы (этот пункт выполнять не обязательно).

Решение. Сведем исходные данные варианта * в удобную для построения математической модели табл. 2.10.

Таблица 2.10

Ресурсы	Продукция				Объем ресурса	Π_5
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4		
I	2	1	0,5	4	2400	$a_{15} = 2$
II	1	5	3	0	1200	$a_{25} = 4$
III	3	0	6	1	3000	$a_{35} = 3$
Цена реализации	75	30	60	120	—	$c_5 = 180$
План **x**	x_1	x_2	x_3	x_4	—	x_5

1. Пусть $\mathbf{x} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4)$ — план выпуска продукции соответственно Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; Z — сумма выручки от реализации готовой продукции. Тогда математическая модель задачи примет вид

$$\max Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + 4x_4 &\le 2400,\\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\le 1200,\\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 &\le 3000,\end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,\,4}).$$

Решение задачи симплексным методом представлено в табл. 2.11.

Таблица 2.11

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			75	30	60	120	0	0	0
x_5	0	2400	2	1	1/2	$\boxed{4}$	1	0	0
x_6	0	1200	1	5	3	0	0	1	0
x_7	0	3000	3	0	6	1	0	0	1
$z_j - c_j$		0	–75	–30	–60	–120	0	0	0
x_4	120	600	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	1200	1	5	$\boxed{3}$	0	0	1	0
x_7	0	2400	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{47}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$z_j - c_j$		72 000	–15	0	–45	0	30	0	0
x_4	120	550	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{24}$	0
x_3	60	400	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_7	0	50	$\frac{13}{24}$	$-\frac{241}{24}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{47}{24}$	1
$z_j - c_j$		90 000	0	75	0	0	30	15	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Так как все оценки индексной строки в последней симплексной таблице 2.11 неотрицательны, то найденный опорный план оптимален:

$$\mathbf{x}^* = (0;\ 0;\ 400;\ 550;\ 0;\ 0;\ 50),\ z(\mathbf{x}^*) = 90\ 000.$$

Основные переменные $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 400$, $x_4^* = 550$ показывают, что продукцию первого и второго вида выпускать нецелесообразно, продукции третьего вида следует выпускать 400 ед., четвертого — 550 ед. При этом, так как $x_5^* = x_6^* = 0$, первый и второй ресурсы используются полностью, а третьего остается в избытке 50 ед. ($x_7^* = 50$). Единствен ли полученный в табл. 2.11

оптимальный план? Нет. Так как оценка, соответствующая свободной переменной x_1, равна нулю ($\Delta_1 = 0$), то, введя в базис переменную x_1, получим новый оптимальный план с тем же самым значением целевой функции.

2. Модель двойственной задачи имеет вид

$$\min f = 2400y_1 + 1200y_2 + 3000y_3;$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2y_1 + & y_2 + & 3y_3 \geq & 75, \\ y_1 + & 5y_2 + & 5y_3 \geq & 30, \\ 0{,}5y_1 + & 3y_2 + & 6y_3 \geq & 60, \\ 4y_1 & + & y_3 \geq & 120, \end{array}\right\}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 3}).$$

Ее решение выпишем из последней симплексной таблицы 2.11, используя соответствие переменных:

$$\begin{array}{cccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}.$$

Имеем: $\mathbf{y}^* = (30;\ 15;\ 0 \mid 0;\ 75;\ 0;\ 0)$, $f(\mathbf{y}^*) = 90\ 000$.

Двойственные переменные показывают меру дефицитности ресурсов, они численно равны изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу. Следовательно, увеличение первого ресурса на единицу ведет к увеличению объема реализации на $y_1^* = 30$, второго — на $y_2^* = 15$. Третий ресурс избыточен, поэтому его увеличение ни к чему не приведет, т. е. значение функции останется прежним ($y_3^* = 0$).

Дополнительные двойственные переменные являются мерой убыточности продукции, которую, согласно оптимальному плану, нецелесообразно выпускать. Следовательно, $y_5^* = 75$ говорит о том, что стоимость ресурсов, расходуемых на единицу производства продукции второго вида (в оптимальных оценках), превосходит стоимость единицы этой продукции ($c_2 = 30$) на $y_5^* = 75$. В самом деле,

$$a_{12}y_1^* + a_{22}y_2^* + a_{32}y_3^* = 1 \cdot 30 + 5 \cdot 15 + 0 \cdot 0 = 105,$$

$$105 - 30 = 75.$$

Раскроем состав двойственных переменных:

$$y_1^* = \frac{1}{4}\cdot 120 + 0\cdot 60 - \frac{1}{4}\cdot 0 = 30,$$

$$y_2^* = -\frac{1}{24}\cdot 120 + \frac{1}{3}\cdot 60 - \frac{47}{24}\cdot 0 = 15,$$

$$y_3^* = 0\cdot 120 + 0\cdot 60 + 1\cdot 0 = 0.$$

Экономически, например для $y_1^* = 30$, это означает следующее: при увеличении первого ресурса на единицу выпуск продукции первого вида возрастает на 1/4 и составит 550,25, выпуск продукции второго вида не изменится, остаток избыточного ресурса сократится на –0,25. Следовательно, значение целевой функции изменится на

$$550{,}25 \cdot 120 - 550 \cdot 120 = 30.$$

Аналогично для второго ресурса:

$$\left(550 - \frac{1}{24}\right)\cdot 120 + \left(400 + \frac{1}{3}\right)\cdot 60 + \left(50 - \frac{47}{24}\right)\cdot 0 - 90\,000 = 15.$$

3. Коэффициенты взаимозаменяемости η_{ik} показывают, сколько единиц ресурса i необходимо дополнительно иметь, чтобы компенсировать уменьшение ресурса k на единицу, т. е. чтобы значение целевой функции не изменилось: $\eta_{ik} = y_k^* / y_i^*$.

Построим матрицу взаимозаменяемости (табл. 2.12).

Таблица 2.12

i \ k	$1\ (y_1^* = 30)$	$2\ (y_2^* = 15)$	$3\ (y_3^* = 0)$
1 $(y_1^* = 30)$	1	1/2	0
2 $(y_2^* = 15)$	2	1	0
3 $(y_3^* = 0)$	∞	∞	1

Например, $\eta_{21} = 2$ означает, что уменьшение первого ресурса на единицу можно компенсировать двумя единицами второго ресурса и т. д.; $\eta_{31} = \infty$ означает, что уменьшение первого ресурса на единицу никаким увеличением третьего ресурса компенсировать нельзя; $\eta_{13} = 0$ означает, что, поскольку третий ресурс избыточен, его уменьшение на единицу компенсировать ничем не следует.

4. Оценим эффективность выпуска новой продукции с характеристиками $c_5 = 180$, $a_{15} = 2$, $a_{25} = 4$, $a_{35} = 3$. Стоимость ресурсов, расходуемых на единицу этой продукции, составит

$$a_{15}y_1^* + a_{25}y_2^* + a_{35}y_3^* = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 0 = 120.$$

Выручка же за каждую единицу равна $c_5 = 180$. Следовательно, выпускать эту продукцию целесообразно. Продукция $П_5$ будет рентабельной при установлении ее цены $c_5 \geq 120$.

5. Для определения границ изменения коэффициентов целевой функции c_j, в пределах которых сохраняется ассортимент выпускаемой продукции, рассмотрим два случая.

а) Анализ коэффициентов целевой функции при свободных переменных $c_1 = 75$, $c_2 = 30$. Заменив $c_1 = 75$ на $c_1' = 75 + \Delta c_1$, получим, что в последней симплексной таблице 2.11 изменится только строка $z_j - c_j$. Она примет вид, представленный в табл. 2.13.

Таблица 2.13

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			$75 + \Delta c_1$	30	60	120	0	0	0
…	…	…	…………						
$z_j - c_j$		90 000	$0 - \Delta c_1$	75	0	0	30	15	0

Отсюда $0 - \Delta c_1 \geq 0$, т. е. $\Delta c_1 \leq 0$, $-\infty < \Delta c_1 \leq 0$, $-\infty < c_1 \leq 75$. Так как $c_j \geq 0$, то $0 \leq c_1' \leq 75$. Аналогично для $c_2 = 30$ получим табл. 2.14.

Таблица 2.14

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			75	$30 + \Delta c_2$	60	120	0	0	0
…	…	…	…………						
$z_j - c_j$		90 000	0	$75 - \Delta c_2$	0	0	30	15	0

Отсюда $75 - \Delta c_2 \geq 0$, т. е. $-\infty < \Delta c_2 \leq 75$, $-\infty < c_2' \leq 30 + 75$. Так как $c_j \geq 0$, то $0 \leq c_2' \leq 105$.

б) Анализ коэффициентов целевой функции при базисных переменных $c_3 = 60$, $c_4 = 120$. Сделаем анализ коэффициента $c_3 = 60$. Заменив c_3 на $c_3' = 60 + \Delta c_3$, получим последнюю симплексную таблицу 2.15, откуда имеем:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{3}\Delta c_3 \geq 0, \\ 75 + \frac{5}{3}\Delta c_3 \geq 0, \\ 15 + \frac{1}{3}\Delta c_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta c_3 \geq 0, \\ \Delta c_3 \geq -45, \\ \Delta c_3 \geq -45 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \Delta c_3 < \infty, \ \ 60 \leq c_3' < \infty.$$

Аналогично для коэффициента $c_4 = 120$ получим табл. 2.16, откуда имеем:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{11}{24}\Delta c_4 \geq 0, \\ 75 + \frac{1}{24}\Delta c_4 \geq 0, \\ 30 + \frac{1}{4}\Delta c_4 \geq 0, \\ 15 - \frac{1}{24}\Delta c_4 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta c_4 \geq 0, \\ \Delta c_4 \geq -1800, \\ \Delta c_4 \geq -120, \\ \Delta c_4 \leq 360 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \Delta c_4 \leq 360,$$

$$120 \leq c_4' \leq 120 + 360, \ \ 120 \leq c_4' \leq 480.$$

6. При анализе ограничений по ресурсам возникает вопрос: в каких пределах может изменяться ресурс, чтобы структура оптимального плана сохранилась, т. е. чтобы по-прежнему рентабельной оставалась продукция $П_3$ и $П_4$?

Рассмотрим два случая.

а) Анализ дефицитных ресурсов $b_1 = 2400$, $b_2 = 1200$. Заменим b_1 на $b_1' = b_1 + \Delta b_1$. Тогда последняя симплексная таблица 2.11 примет вид табл. 2.17.

Таблица 2.15

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			75	30	$60 + \Delta c_3$	120	0	0	0
x_4	120	550	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{24}$	0
x_3	$60 + \Delta c_3$	400	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_7	0	50	$\frac{13}{24}$	$-\frac{241}{24}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{47}{24}$	1
$z_j - c_j$		$90\ 000 + 400\Delta c_3$	$0 + \frac{1}{3}\Delta c_3$	$75 + \frac{5}{3}\Delta c_3$	0	0	$30 + 0\Delta c_3$	$15 + \frac{1}{3}\Delta c_3$	0

Таблица 2.16

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			75	30	60	$120 + c_4$	0	0	0
x_4	$120 + c_4$	550	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{24}$	0
x_3	60	400	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_7	0	50	$\frac{13}{24}$	$-\frac{241}{24}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{47}{24}$	1
$z_j - c_j$		$90\ 000 + 550\Delta c_4$	$0 + \frac{11}{24}\Delta c_4$	$75 + \frac{1}{24}\Delta c_4$	0	0	$30 + \frac{1}{4}\Delta c_4$	$15 - \frac{1}{24}\Delta c_4$	0

Таблица 2.17

БП	$c_Б$	A_0	$\ldots x_5 \ldots$
			$\ldots 0 \ldots$
1	2	3	4
x_4	120	$550 + \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{1}{4}$
x_3	60	$400 + 0\Delta b_1$	0
x_7	0	$50 - \frac{1}{4}\Delta b_1$	$-\frac{1}{4}$
$z_j - c_j$		$90\,000 + 30\Delta b_1$	30

Так как оптимальный план — опорный, то $x_j^* \geq 0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 550 + \frac{1}{4}\Delta b_1 &\geq 0, \\ 50 - \frac{1}{4}\Delta b_1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta b_1 &\geq -2200, \\ \Delta b_1 &\geq 200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2200 \leq \Delta b_1 \leq 200,$$

$$b_1 - 2200 \leq b_1' \leq b_1 + 200,$$

$$2400 - 2200 \leq b_1' \leq 2400 + 200,$$

$$200 \leq b_1' \leq 2600.$$

Аналогично для $b_2 = 1200$. Заменив b_2 на $b_2' = 1200 + \Delta b_2$, получим:

$$\left.\begin{aligned} 550 - \frac{1}{24}\Delta b_2 &\geq 0, \\ 400 + \frac{1}{3}\Delta b_2 &\geq 0, \\ 50 - \frac{47}{24}\Delta b_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta b_2 &\leq 13\,200, \\ \Delta b_2 &\geq -1200, \\ \Delta b_2 &\leq 25{,}54 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1200 \leq \Delta b_2 \leq 25{,}54,$$

$$1200 - 1200 \leq b_2' \leq 1200 + 25{,}54,$$

$$0 \leq b_2' \leq 1225{,}54.$$

б) Анализ недефицитного ресурса $b_3 = 3000$. Заменив b_3 на $b_3' = 3000 + \Delta b_3$, получим:

$$50 + 1 \cdot \Delta b_3 \geq 0,\ -50 \leq \Delta b_3 < \infty,$$

$$30\,000 - 50 \leq b_3' < \infty,\ 29\,950 \leq b_3' < \infty.$$

7. Анализ коэффициентов технологической матрицы выполнять необязательно. Желающие проверить свои силы при выполнении этого пункта могут воспользоваться пособием [13].

2.4 (задача об оптимизации плана товарооборота). Торговое предприятие (предприятие оптовой торговли), исходя из специализации, может реализовать n групп товаров T_j $(j = \overline{1, n})$. Для этого используется m видов ресурсов.

Пусть общие объемы ресурсов по использованию площадей P_i $(i = \overline{1, m})$, p_{ij} — норматив складских площадей i-го вида по содержанию товаров j-й группы. Обозначим через R_i $(i = \overline{m_1 + 1, m_2})$ рабочее время работников i-й специальности, r_{ij} — плановый норматив затрат времени работников i-й специальности на единицу товарооборота j-й товарной группы. Пусть, далее, B_i $(i = \overline{m_2 + 1, m_3})$ — допустимые издержки обращения по i-й статье, b_{ij} — плановый норматив издержек обращения по i-й статье на единицу товарооборота j-й группы; S_i $(i = \overline{m_3 + 1, m_4})$ — общий объем товарных запасов i-го товара, S_{ij} — норматив товарных запасов на единицу товарооборота i-го товара (отдела, секции) j-й товарной группы; Q — плановый показатель товарооборота, q_j — параметр товарооборота (средняя цена реализации) по j-й товарной группе; Q_j — минимально допустимые значения плана товарооборота по j-й товарной группе. Требуется определить план хозяйственной деятельности торгового предприятия, обеспечивающий максимум торговой прибыли при заданных ограничениях на складские площади, трудовые ресурсы, издержки обращения, товарные запасы, величину товарооборота и др. Пусть, далее, c_j — торговая прибыль в расчете на единицу товарооборота j-й группы, x_j — неизвестная величина — объем товарооборота j-й товарной группы.

1. Определить оптимальный план товарооборота; сделать анализ полученного решения.

2. Построить математическую модель двойственной задачи, выписать ее решение и дать экономическую интерпретацию двойственных и дополнительных двойственных переменных.

3. Выявить «узкие места» на торговом предприятии и дать рекомендации по их «расшивке». Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.18. Вариант * решен, остальные (1—10) — для упражнений.

Математическая модель задачи 2.4: целевая функция — максимум торговой прибыли

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях:

на лимиты складских площадей

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \le P_i \ (i = \overline{1, m_1}),$$

на трудовые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \le R_i \ (i = \overline{m_1 + 1, m_2}),$$

на издержки обращения

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \le B_i \ (i = \overline{m_2 + 1, m_3}),$$

на товарные запасы

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \le S_i \ (i = \overline{m_3 + 1, m_4}),$$

на достигнутый (плановый) уровень товарооборота

$$\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \ge Q,$$

Таблица 2.18

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	120	40	60	50	100	80	130	90	110	70	140
c_2	50	15	25	70	30	40	30	35	50	60	35
c_3	30	10	15	20	80	20	10	20	10	15	30
c_4	100	35	50	80	50	120	80	100	40	60	25
P	110 000	60 000	50 000	65 000	75 000	8000	100 000	160 000	95 000	110 000	110 000
R	950 000	400 000	350 000	480 000	550 000	500 000	500 000	650 000	320 000	640 000	710 000
B	1 200 000	600 000	720 000	850 000	800 000	850 000	110 000	330 000	770 000	900 000	1 100 000
S	180 000	90 000	110 000	150 000	180 000	180 000	220 000	96 000	160 000	220 000	240 000
Q	150 000	300 000	510 000	500 000	450 000	420 000	710 000	320 000	350 000	330 000	750 000
p_1	18	9	15	12	13	15	20	10	14	25	22
p_2	26	13	16	20	21	20	27	30	20	32	28
p_3	16	8	10	10	11	13	18	20	10	23	18
p_4	10	5	1	12	14	11	12	15	15	15	12
r_1	150	75	100	120	115	110	160	25	35	165	165
r_2	140	70	90	100	95	90	150	70	80	155	150
r_3	50	25	30	40	45	40	60	30	40	65	70
r_4	80	40	60	50	60	55	90	40	50	85	95

Окончание табл. 2.18

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	170	85	120	150	140	130	170	68	135	176	175
b_2	230	115	200	190	180	170	200	92	185	205	200
b_3	280	140	220	200	190	185	270	96	190	275	265
b_4	120	60	90	110	100	105	130	55	110	134	140
s_1	31	15	20	18	20	19	33	14	10	35	35
s_2	42	21	36	30	30	32	45	20	30	48	47
s_3	20	15	16	20	15	17	31	10	20	33	32
s_4	20	10	18	12	10	11	22	16	15	24	24
q_1	200	100	160	120	115	117	210	70	75	120	215
q_2	150	75	110	90	85	80	165	80	85	90	170
q_3	170	85	100	130	125	120	180	120	125	60	185
q_4	50	25	80	60	50	45	60	50	50	45	65
Q_1	1200	600	1000	1100	1050	1000	1000	800	1020	500	980
Q_2	1000	500	800	850	800	900	11 000	950	850	700	1150
Q_3	1500	750	1200	1050	1000	750	14 000	800	950	450	1350
Q_4	1200	1100	1300	950	900	1100	1600	1000	800	600	1550

на минимально допустимые значения товарооборота по каждой группе

$$x_j \geq Q_j \ (j = \overline{1, n}).$$

Исходные данные для решения задачи 2.4 представлены в табл. 2.18. Для упрощения конкретной формулировки задачи каждая группа ограничений содержит только одно: $m_1 = 1$, $m_2 - m_1 = 1$, $m_3 - m_2 = 1$, $m_4 - m_3 = 1$.

Сведем исходные данные варианта * в табл. 2.19, удобную для построения математической модели.

Таблица 2.19

Лимитируемые ресурсы и показатели	Товарная группа				Объем ресурса	Вид ограничения
	T_1	T_2	T_3	T_4		
Складские площади P, м^2	$p_1 = 18$	$p_2 = 26$	$p_3 = 16$	$p_4 = 10$	110 000	$\leq$
Трудовые ресурсы R, чел.-ч	$r_1 = 150$	$r_2 = 140$	$r_3 = 50$	$r_4 = 80$	950 000	$\leq$
Издержки обращения B, ден. ед.	$b_1 = 170$	$b_2 = 230$	$b_3 = 280$	$b_4 = 120$	1 200 000	$\leq$
Товарные запасы S, ден. ед.	$s_1 = 31$	$s_2 = 42$	$s_3 = 30$	$s_4 = 20$	180 000	$\leq$
План товарооборота Q, ден. ед.	$q_1 = 200$	$q_2 = 150$	$q_3 = 170$	$q_4 = 50$	750 000	$\leq$
Минимально допустимый план Q_j товарооборота по j-й группе, ден. ед.	1200	1000	1500	1200	—	$\geq$
Прибыль c_j, ден. ед.	120	50	30	100		
План x	x_1	x_2	x_3	x_4		

Математическая модель задачи:

$$\max Z = 120x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 100x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} 18x_1 + 26x_2 + 16x_3 + 10x_4 &\le 110\,000,\\ 150x_1 + 140x_2 + 50x_3 + 80x_4 &\le 950\,000,\\ 170x_1 + 230x_2 + 280x_3 + 120x_4 &\le 1\,200\,000,\\ 31x_1 + 42x_2 + 30x_3 + 20x_4 &\le 180\,000,\\ 200x_1 + 150x_2 + 170x_3 + 50x_4 &\le 750\,000,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 1200,\ x_2 \ge 1000,\ x_3 \ge 1500,\ x_4 \ge 1200.$$

1. В результате решения задачи на ЭВМ (или ручным способом) получаем оптимальный план товарооборота:

$$\mathbf{x}^*_{\text{осн}} = (\overset{x_1^*}{1200};\ \overset{x_2^*}{1000};\ \overset{x_3^*}{1500};\ \overset{x_4^*}{2790}),\ Z_{\max} = 518\,000.$$

Из полученного решения следует, что товарооборот по первой группе составит 1200 ед., по второй — 1000, по третьей и четвертой — 1500 и 2790 ед. соответственно. При этом торговое предприятие получит прибыль 518 000 ден. ед.

Вектор дополнительных переменных имеет вид

$$\mathbf{x}^*_{\text{доп}} = (\overset{x_5^*}{10\,500};\ \overset{x_6^*}{331\,800};\ \overset{x_7^*}{11\,200};\ \overset{x_8^*}{0};\ \overset{x_9^*}{634\,500};\ \overset{x_{10}^*}{0};\ \overset{x_{11}^*}{0};\ \overset{x_{12}^*}{0};\ \overset{x_{13}^*}{1590}).$$

Переменные x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^* показывают величину неиспользованных ресурсов, т. е. складские площади недоиспользуются на 10 500 м^2, трудовые ресурсы — на 331 800 чел.-ч, издержки обращения можно уменьшить на 11 200 ден. ед. Товарные запасы используются полностью ($x_8^* = 0$). Переменная x_9^* показывает, что общий план товарооборота перевыполнен на 34 500 ден. ед. Переменные x_{10}^*, x_{11}^*, x_{12}^* показывают перевыполнение плана товарооборота по каждой товарной группе, т. е. имеем перевыполнение только по четвертой товарной группе на $x_{13}^* = 1590$ ден. ед.

2. Двойственная задача имеет вид

$$\min f = 110\,000y_1 + 950\,000y_2 + 1\,200\,000y_3 + 180\,000y_4 - \\ - 750\,000y_5 - 1200y_6 - 1000y_7 - 1500y_8 - 1200y_9;$$

$$\left.\begin{array}{l} 18y_1 + 150y_2 + 170y_3 + 31y_4 - 200y_5 - y_6 \ge 120, \\ 26y_1 + 140y_2 + 30y_3 + 42y_4 - 150y_5 - y_7 \ge 50, \\ 16y_1 + 50y_2 + 280y_3 + 30y_4 - 170y_5 - y_8 \ge 30, \\ 10y_1 + 80y_2 + 120y_3 + 20y_4 - 50y_5 - y_9 \ge 100, \end{array}\right\}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1, 9}).$$

Решение двойственной задачи:

$$\mathbf{y}^* = (0;\ 0;\ 0;\ 5;\ 0;\ 35;\ 160;\ 120;\ 0 \mid 0;\ 0;\ 0;\ 0),$$
$$f(\mathbf{y}^*) = 518\,000.$$

Двойственные переменные y_1—y_4 показывают степень дефицитности имеющихся ресурсов: чем выше значение двойственной переменной, тем дефицитнее ресурс. Так как $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, а $y_4 = 5$, то ресурс «товарные запасы» является «узким местом» на торговом предприятии, т. е. увеличение товарного запаса на единицу даст увеличение прибыли на 5 ден. ед. Переменные y_5—y_9 показывают, насколько увеличится прибыль при увеличении товарооборота по предприятию в целом и по каждой товарной группе на единицу. Переменные y_{10}—y_{13} равны нулю; это значит, что в оптимальный план товарооборота вошли все четыре группы товаров, т. е. все они рентабельны.

2.5 (задача определения оптимальной производственной программы предприятия). Под оптимальной производственной программой понимается такая программа (план) выпуска продукции в планируемый промежуток времени (год, квартал), при которой наиболее полно удовлетворяются запросы потребителей. Эта цель формализуется в системе ограничений. Мерой же эффективности достижения цели являются такие показатели, как прибыль предприятия Z_1, валовой объем выпуска в стоимостном выражении Z_2, себестоимость Z_3, уровень загрузки оборудования Z_4 и др. Ограничения налагаются на фонд времени работы оборудования, на лимитирующие ресурсы, затраты труда, фонд заработной платы, производственные площади, выпуск продукции в стоимостном выражении, на ассортимент и объем выпуска.

Введем обозначения: α_j и c_j — соответственно оптовая цена и себестоимость единицы j-й продукции; a_{ij} — количество единиц i-го оборудования, необходимого для изготовления единицы j-й продукции; a_i — фонд времени работы оборудования i-й группы; R_i — общий объем i-го материала; r_{ij} —норма расхода i-го вида лимитируемого материала на единицу j-й продукции; T_i — фонд времени рабочих i-й специальности; t_{ij} — норма времени, затрачиваемого рабочим i-й специальности на производство единицы j-й продукции; F_i — фонд заработной платы рабочих; f_i — стоимость часа занятости рабочего i-й специальности (часовая ставка заработной платы); P_i — производственная площадь i-го вида; p_{ij} — норматив площади i-го вида, приспособленной к размещению продукции j-го вида; q_j — процент сбытовой продукции в общем объеме выпуска j-й продукции (определяется по статистическим данным отчетных периодов); P — производственная площадь для размещения оборудования; p_i — норматив площади, занимаемой единицей оборудования i-й группы; b_i — реальный фонд времени работы единицы оборудования i-й группы; A —годовое плановое задание по выработке товарной продукции в стоимостном выражении; d_j и D_j — соответственно нижняя и верхняя границы производства продукции j-го вида; x_j — неизвестная величина — выпуск j-й продукции (в натуральных единицах).

Составим математическую модель задачи 2.5. Целевые функции задачи:

максимизация прибыли предприятия

$$\max Z_1 = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j - c_j)x_j,$$

максимизация валового выпуска продукции

$$\max Z_2 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,$$

минимизация себестоимости продукции при выполнении ограничения на минимальные объемы выпуска

$$\min Z_3 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

максимизация загрузки оборудования

$$\max Z_4 = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Ограничения задачи:

по фонду времени работы оборудования

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \ (i = \overline{1, m_1}),$$

по лимитируемым материалам

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \le R_i \ (i = \overline{m_1 + 1, m_2}),$$

по затратам труда

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \le T_i \ (i = \overline{m_2 + 1, m_3}),$$

по фонду заработной платы

$$\sum_{i=m_2+1}^{m_3} \sum_{j=1}^{n} f_i t_{ij} x_j \le F,$$

по площадям

$$\sum_{j=1}^{n} q_j p_{ij} x_{ij} \le P_i \ (i = \overline{m_3 + 1, m_4}),$$

по выпуску продукции

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \ge A,$$

по ассортименту и объему выпускаемой продукции

$$d_j \le x_j \le D_j \ (j = \overline{1, n}).$$

Исходные данные для решения задачи предстаблены в табл. 2.20. Для упрощения расчетов ограничим номенклатуру производственной программы пятью изделиями: $И_1$, $И_2$, $И_3$, $И_4$ и $И_5$, ограничения — четырьмя груп-

Таблица 2.20

Лимитируемые ресурсы и показатели	Номенклатура изделий					Объем ресурса	Вид ограничения
	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	$И_5$		
Станки, станко-ч:							
токарные	2	2	1	1	3	900 000	≤
фрезерные	1	2	3	4	2	800 000	≤
сверлильные	3	1	3	2	4	600 000	≤
шлифовальные	3	4	1	2	2	500 000	≤
Материалы, кг	3	2	3	4	1	950 000	≤
Комплектующие изделия	5	1	3	1	2	850 000	≤
Фонд заработной платы, ден. ед.	1	2	3	2	1	600 000	≥
Выпуск продукции в стоимостном выражении	10	12	8	16	11	2 500 000	≥
Ограничения по ассортименту	≥10 000	≤30 000	≥150 000	≥20 000	≥30 000		
Себестоимость, ден. ед.	3	4	4	2	1		
План x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		

пами оборудования, двумя видами лимитируемых материалов, фондом заработной платы, суммарным выпуском продукции в стоимостном выражении и ограничениями на выпуск некоторых видов изделий.

1. Построить математическую модель задачи, увеличив данные столбца «Объем ресурса» табл. 2.20 для варианта № 1 — на 10 %, № 2 — на 20, № 3 — на 30, № 4 — на 40, № 5 — на 50, № 6 — на 60, № 7 — на 70, № 8 — на 80, № 9 — на 90, № 10 — на 100 %. Найти оптимальный план выпуска по каждому из предлагаемых показателей эффективности.

2. Дать экономическую интерпретацию основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач.

3. Выявить «узкие места» на производстве и дать рекомендации по их «расшивке».

Р е ш е н и е. 1. Построим математическую модель задачи на максимизацию прибыли:

$$\max Z = (10 - 3)x_1 + (12 - 4)x_2 + (8 - 4)x_3 + (16 - 2)x_4 + (11 - 1)x_5;$$

$$\left.\begin{array}{rl}
2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \le & 90\,000, \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 \le & 800\,000, \\
3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le & 600\,000, \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \le & 500\,000, \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 \le & 950\,000, \\
5x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \le & 850\,000, \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \le & 600\,000, \\
10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 11x_5 \ge & 2\,500\,000, \\
x_1 \ge & 10\,000, \\
x_2 \le & 30\,000, \\
x_3 \ge & 15\,000, \\
x_4 \ge & 20\,000, \\
x_5 \ge & 30\,000,
\end{array}\right\}$$

$$x_2 \ge 0.$$

В результате решения задачи симплекс-методом получаем оптимальный план:

$$\mathbf{x}^*_{\text{осн}} = (29\,000;\ 0;\ 15\,000;\ 164\,000;\ 35\,000),$$

$$\mathbf{x}^*_{\text{доп}} = (658\,000;\ 0;\ 0;\ 0;\ 127\,000;\ 426\,000;\ 163\,000;$$
$$919\,000;\ 19\,000;\ 30\,000;\ 0;\ 144\,000;\ 5000),$$
$$Z_{\max} = 2\,909\,000.$$

Из полученного решения следует, что предприятию надо выпускать продукцию первого вида в количестве 29 000 ед., третьего — 15 000, четвертого — 164 000, пятого — 350 000 ед. Продукция второго вида в оптимальный план не вошла. При этом прибыль предприятия составит 2 905 000 ден. ед. Дополнительные переменные x_6—x_{13} показывают величину неиспользованных ресурсов, т. е. фонд времени работы токарных станков недоиспользован на 858 000 станко-ч, объем материалов — на 127 000 кг, комплектующих изделий — на 426 000, фонд заработной платы — на 163 000 ден. ед. Переменная x^*_{13} показывает, что выпуск продукции в стоимостном выражении превышает плановое задание на 919 000 ден. ед. Переменные x^*_{14} — x^*_{18} показывают отклонения от заданий по ассортименту.

2. Построим двойственную задачу:

$$\min f = 90\,000y_1 + 800\,000y_2 + 600\,000y_3 + 500\,000y_4 +$$
$$+ 950\,000y_5 + 850\,000y_6 + 600\,000y_7 - 2\,500\,000y_8 -$$
$$- 10\,000y_9 + 30\,000y_{10} - 15\,000y_{11} - 20\,000y_{12} - 30\,000y_{13};$$

$$\left.\begin{aligned}
2y_1 + y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 5y_6 + y_7 - 10y_8 - y_9 &\ge 7,\\
2y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 + 2y_5 + y_6 + 2y_7 - 12y_8 + y_{10} &\ge 8,\\
y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 3y_7 - 8y_8 - y_{11} &\ge 4,\\
y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6 + 2y_7 - 16y_8 - y_{12} &\ge 14,\\
3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + y_5 + 2y_6 + y_7 - 11y_8 - y_{13} &\ge 10,
\end{aligned}\right\}$$

$$y_j \ge 0 \ (j = \overline{1,\ 13}).$$

Решение двойственной задачи:

$$\mathbf{y}^* = (0;\ 2;\ 8;\ 0;\ 8;\ 0{,}6;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;7{,}4;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}8;\ 0;\ 0),$$
$$f_{\min} = 2\,909\,000.$$

3. Двойственные переменные $y_1^* - y_7^*$ характеризуют дефицитность ресурсов. Дефицитные ресурсы — время работы фрезерных, сверлильных и шлифовальных станков, причем наиболее дефицитно время работы фрезерных станков, так как значение y_2^* наибольшее. Значения переменных y_2^*, y_3^*, y_4^* показывают, насколько увеличится прибыль предприятий, если время работы увеличить на 1 станко-ч, т. е. если время работы фрезерных станков увеличить на 1 станко-ч, то прибыль возрастает на 2,8 ден. ед. Это и есть «узкое место» на производстве. Если выделить средства на «расшивку узких мест», то их надо распределить с учетом двойственных оценок (2,8; 0,8; 0,6), т. е. больше всего средств надо выделить на увеличение фонда рабочего времени фрезерных станков.

Дополнительные двойственные переменные $y_{14}^* - y_{18}^*$ характеризуют рентабельность выпуска продукции каждого вида. Поскольку $y_{15}^* = 0$, выпуск продукции второго вида не рекомендуется, и если ее выпускать, то выпуск единицы продукции принесет предприятию убыток в 0,8 ден. ед.

Решить задачу 2.5 по другим показателям эффективности.

2.6 (задача оптимального размещения заказов по исполнителям). Задача состоит в том, чтобы распределить заказ (производственную программу) между m исполнителями (предприятиями, цехами, станками и т. д.). Исполнители имеют различные производственные и технологические характеристики, но взаимозаменяемы в смысле выполнения заказов. Требуется составить такой план размещения заказов по исполнителям (загрузки оборудования), при котором задание, состоящее из выпуска n видов продукции в заданных объемах $П_j$ $(j = \overline{1, n})$, было бы выполнено, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Пусть для определенности в цехе имеются три группы $(\overline{I—III})$ взаимозаменяемого оборудования с мощностями b_i $(i = \overline{1, 3})$ нормо-часов в месяц. Цеху дан план выпуска продукции четырех видов соответственно в объемах $П_j$ $(j = \overline{1, 4})$. Время изготовления единицы продукции j-го вида на i-м оборудовании составляет a_{ij}. Известны также затраты c_{ij} на изготовление единицы продукции на оборудовании каждого вида и отпускная цена α_i единицы каждого вида продукции. Неизвестные величины x_{ij} — интенсивность использования i-го оборудования при выпуске j-й продукции, т. е. искомый объем выпуска на i-м оборудовании j-й продукции. Составить план:

1) размещения заказов x_{ij}, гарантирующий выполнение задания и доставляющий максимум прибыли при ограничениях на ресурсы оборудования и выпуск необходимой продукции;

2) минимизирующий затраты станочного времени работы оборудования;

3) минимизирующий время работы оборудования, т. е. реализуемый в минимальные сроки;

4) обеспечивающий выпуск максимального числа комплектов, каждый из которых включает l_j единиц продукции (изделий) j-го вида.

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.21. Сделать анализ решений.

Таблица 2.21

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_1	80	90	100	120	100	150	70	80	70	80	100
α_2	100	80	80	100	90	120	90	70	60	80	90
α_3	60	70	90	80	80	130	100	60	50	40	80
α_4	80	100	70	90	110	160	80	50	40	60	70
c_{11}	20	25	30	40	30	20	40	30	40	30	40
c_{12}	10	15	15	25	20	30	10	40	30	30	30
c_{13}	40	30	20	25	40	40	10	50	20	40	20
c_{14}	50	40	25	30	50	25	15	60	50	30	50
c_{21}	50	40	35	30	20	25	40	50	50	40	20
c_{22}	40	30	35	40	30	35	60	20	20	30	40
c_{23}	40	50	45	45	40	45	50	10	30	40	30
c_{24}	30	20	25	30	50	20	40	70	40	20	60
c_{31}	60	50	55	60	50	15	50	25	30	20	30
c_{32}	90	80	85	80	60	14	80	35	40	35	40
c_{33}	30	30	35	40	70	20	50	45	50	45	50
c_{34}	20	25	25	30	80	30	30	75	70	65	20

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	400	300	500	200	400	500	600	700	600	300	500
b_2	850	800	900	400	300	400	800	600	500	500	600
b_3	300	200	300	500	250	300	400	500	700	600	700
$П_1$	600	500	600	200	700	500	800	750	800	850	800
$П_2$	350	300	400	400	300	300	400	400	300	750	700
$П_3$	450	400	300	250	400	400	600	500	400	250	600
$П_4$	500	600	500	300	600	200	300	400	300	450	150
a_{11}	0,3	0,3	0,9	0,3,	0,2	0,4	0,3	0,2	0,8	0,3	0,9
a_{12}	0,6	0,5	0,8	0,8	0,1	0,5	0,9	0,8	1,2	0,4	0,8
a_{13}	0,4	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	2,3	0,5	0,7
a_{14}	0,8	0,7	0,5	0,4	0,4	0,8	0,7	2,1	1,5	0,9	0,6
a_{21}	0,6	0,5	0,4	0,2	0,5	0,7	0,8	1,8	2,3	0,9	1,2
a_{22}	0,8	0,7	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	0,5	1,5	1,2	1,1
a_{23}	0,7	0,8	0,8	1,2	0,9	0,9	0,6	0,9	0,9	3,1	1,0
a_{24}	1,2	1,1	1,3	2,1	1,5	1,2	0,8	0,8	0,8	0,4	0,9
a_{31}	1,4	1,3	1,2	2,1	1,5	2,1	0,9	0,8	0,9	0,8	0,7
a_{32}	0,5	0,4	2,1	3,1	2,3	2,3	0,8	1,2	1,5	0,9	0,8
a_{33}	0,9	1,2	0,9	4,2	3,5	1,3	1,0	1,5	1,8	0,7	1,4
a_{34}	0,6	0,5	0,4	3,5	0,9	0,8	2,1	2,3	1,2	1,5	1,6
l_1	3	2	1	2	3	4	2	3	1	4	4
l_2	1	3	3	1	4	2	1	2	2	3	3
l_3	2	2	4	3	2	1	4	1	3	2	2
l_4	4	5	2	4	1	3	3	4	4	1	3

Составим математическую модель задачи *. Целевые функции:

максимизация прибыли

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - c_{ij}) x_{ij},$$

минимизация затрат станочного времени работы оборудования

$$\min Z_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

минимизация времени работы оборудования, т. е. поиск плана, реализуемого в минимальные сроки,

$$\min Z_3 = \max_i \{t_i\},$$

где $t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$,

максимизация числа комплектов (x):

$$\max Z_4 = x. \tag{2.4}$$

Ограничения задачи:

на ресурсы оборудования

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i \ (i = \overline{1, m}),$$

на выпуск продукции

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \begin{Bmatrix} = \\ \ge \end{Bmatrix} \Pi_j \ (j = \overline{1, n}).$$

Условия неотрицательности $x_{ij} \ge 0$.

На целевую функцию (2.4) должно быть наложено дополнительное ограничение по комплектности выпускаемой продукции:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \ge l_j x \ (j = \overline{1, n}).$$

Для удобства построения математических моделей варианта * задачи ее условие сведем в табл. 2.22.

1. Математическая модель размещения заказов по максимуму прибыли при ограничениях на ресурсы I—III и объем выпуска Π_1—Π_4:

$$\begin{aligned} \max Z_1 = {} & (80 - 20)x_{11} + (100 - 10)x_{12} + (60 - 40)x_{13} + \\ & + (80 - 50)x_{21} + (100 - 40)x_{22} + (60 - 40)x_{23} + \\ & + (80 - 30)x_{24} + (80 - 60)x_{31} + (100 - 90)x_{32} + \\ & + (60 - 30)x_{33} + (80 - 20)x_{34} \end{aligned}$$

при ограничениях:

Таблица 2.22

Исполнители		План выпуска $П_j$				Объем ресурсов
		$П_1 = 600$	$П_2 = 350$	$П_3 = 450$	$П_4 = 500$	
I	a_{1j} c_{1j} x_{1j}	0,3 20 x_{11}	0,6 10 x_{12}	0,4 40 x_{13}	0,8 50 x_{14}	400
II	a_{2j} c_{2j} x_{2j}	0,6 50 x_{21}	0,8 40 x_{22}	0,7 40 x_{23}	1,2 30 x_{24}	850
III	a_{3j} c_{3j} x_{3j}	1,4 60 x_{31}	0,5 90 x_{32}	0,9 30 x_{33}	0,6 20 x_{34}	300
Отпускная цена		80	100	60	80	
Комплектность l_j		3	1	2	4	

на ресурсы оборудования

$$\left.\begin{aligned} 0{,}3x_{11} + 0{,}6x_{12} + 0{,}4x_{13} + 0{,}8x_{14} &\le 400,\\ 0{,}6x_{21} + 0{,}8x_{22} + 0{,}7x_{23} + 1{,}2x_{24} &\le 850,\\ 1{,}4x_{31} + 0{,}5x_{32} + 0{,}9x_{33} + 0{,}6x_{34} &\le 300, \end{aligned}\right\}$$

на объемы выпуска продукции (заказ должен быть выполнен)

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 600,\\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 350,\\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 450,\\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 500, \end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1,\ 3};\ \ j = \overline{1,\ 4}).$$

2. Математическая модель задачи по минимуму затрат станочного времени работы оборудования

$$\min Z_2 = 0{,}3x_{11} + 0{,}6x_{12} + 0{,}4x_{13} + 0{,}8x_{14} + 0{,}6x_{21} +$$

$$+ 0{,}8x_{22} + 0{,}7x_{23} + 1{,}2x_{24} + 1{,}4x_{31} + 0{,}5x_{32} + \\ + 0{,}9x_{33} + 0{,}6x_{34}$$

при ограничениях п. 1.

3. Модель задачи по минимуму времени реализации плана — это так называемая *минимаксная задача.* Обозначим через t_1, t_2 и t_3 время работы соответственно первой, второй и третьей групп оборудования. Получим:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3x_{11} + 0{,}6x_{12} + 0{,}4x_{13} + 0{,}8x_{14} = t_1, \\ 0{,}6x_{21} + 0{,}8x_{22} + 0{,}7x_{23} + 1{,}2x_{24} = t_2, \\ 1{,}4x_{31} + 0{,}5x_{32} + 0{,}9x_{33} + 0{,}6x_{34} = t_3. \end{array}\right\}$$

Поскольку все группы оборудования работают одновременно, время t реализации планового задания равно наибольшему из них: $\max\{t_1, t_2, t_3\} = t$. Отсюда модель задачи примет вид $\min Z = \max\{t_i\}$ при ограничениях на объемы выпуска продукции и условии неотрицательности. Она легко сводится к задаче линейного программирования

$$\min Z_3 = t$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3x_{11} + 0{,}6x_{12} + 0{,}4x_{13} + 0{,}8x_{14} \le t, \\ 0{,}6x_{21} + 0{,}8x_{22} + 0{,}7x_{23} + 1{,}2x_{24} \le t, \\ 1{,}4x_{31} + 0{,}5x_{32} + 0{,}9x_{33} + 0{,}6x_{34} \le t, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 600, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 350, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 450, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 500, \end{array}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ t \ge 0\ (i = \overline{1, 3};\ j = \overline{1, 4}).$$

4. Целевая функция — максимизация числа комплектов x:

$$\max Z_4 = x$$

при ограничениях:

на ресурсы оборудования

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3x_{11} + 0{,}6x_{12} + 0{,}4x_{13} + 0{,}8x_{14} \le 400, \\ 0{,}6x_{21} + 0{,}8x_{22} + 0{,}7x_{23} + 1{,}2x_{24} \le 850, \\ 1{,}4x_{31} + 0{,}5x_{32} + 0{,}9x_{33} + 0{,}6x_{34} \le 300, \end{array}\right\}$$

на комплектность выпуска

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 3x, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge x, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 2x, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 4x, \end{array}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ x \ge 0\ (i = \overline{1,\ 3};\ j = \overline{1,\ 4}).$$

2.7 (задача загрузки взаимозаменяемых групп оборудования). Пусть имеется m станков, на которых может изготавливаться (обрабатываться) любое из n изделий. Пусть c_{ij} — затраты на изготовление на i-м ($i = \overline{1,\ m}$) станке единицы j-го ($j = \overline{1,\ n}$) изделия. Пусть, далее, λ_{ij} — производительность i-го станка при производстве j-х изделий (ден. ед/ед. времени); T_i — фонд времени i-го станка; $П_j$ — плановое задание по выпуску изделий j-го вида. Необходимо распределить производство изделий на различных станках так, чтобы:

а) минимизировать суммарные затраты при выполнении планового задания;

б) определить максимальную загрузку оборудования из условий максимального суммарного объема выполненных работ;

в) определить оптимальную загрузку оборудования, обеспечивающую максимальный объем работ при соблюдении условия комплектности

$$П_1 : П_2 : \ldots : П_n = l_1 : l_2 : \ldots : l_n;$$

г) найти оптимальную загрузку оборудования при условии, что объемы работ $П_j$ ($j = \overline{1,\ n}$) должны быть выполнены при минимальном суммарном времени работы станков.

Неизвестная величина x_{ij} — время, в течение которого i-й станок занят изготовлением j-го изделия.

Составим математическую модель задачи.

а) Очевидно, что $C_{ij} = \lambda_{ij} c_{ij}$ —затраты, связанные с выпуском в течение единицы времени на i-м станке j-х изделий.

Целевая функция — минимизация затрат, связанных с работой по выпуску необходимой продукции:

$$\min Z_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij},$$

при ограничениях:

на фонд времени по всем станкам

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \ (i = \overline{1, m}),$$

на плановое задание по выпуску необходимой продукции

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} \ge \Pi_j \ (j = \overline{1, 4}),\ x_{ij} \ge 0.$$

Эту модель называют λ-*моделью.*

б) Максимальная загрузка оборудования

$$\max Z_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij}$$

отвечает требованию максимального суммарного объема выполненных работ при ограничении на фонд времени

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \ (i = \overline{1, m}),\ x_{ij} \ge 0.$$

в) Целевая функция — максимизация объема работ при соблюдении условия комплектности

$$\Pi_1 : \Pi_2 : \ldots : \Pi_n = l_1 : l_2 : \ldots : l_n.$$

Пусть $z = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij}$ — общий объем выполненной работы. Модель примет вид

$$\max Z_3 = z$$

при ограничениях:

на фонд времени работы оборудования

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \ (i = \overline{1, m}),$$

на комплектность выпускаемой продукции: так как $П_1 : П_2 : \ldots : П_n = l_1 : l_2 : \ldots : l_n$, то

$$П_j \ / \sum_{j=1}^{n} П_j = l_j \ / \sum_{j=1}^{n} l_j,$$

т. е. $П_j \ / \ z = l_j \ / \sum_{j=1}^{n} l_j$.

Ограничение на комплектность примет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} = \frac{l_j}{\sum_{j=1}^{n} l_i} z,$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}), z \ge 0.$$

г) Минимизировать суммарное время работы станков

$$\min Z_4 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

при ограничениях:

на фонд рабочего времени станков

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \ (i = \overline{1, m}),$$

на величину заказа

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} = П_j \ (j = \overline{1, n}), \ x_{ij} \ge 0.$$

Рассмотрим конкретную ситуацию. Три механизма могут выполнять три вида земляных работ. В табл. 2.23 указаны ресурсы рабочего времени T_i каждого из механизмов в машино-часах, производительность λ_{ij} в метрах кубических (в левом верхнем углу) и затраты c_{ij} в денежных единицах на выполнение i-м механизмом единицы земляных работ j-го вида (в правом верхнем углу клеток таблицы). Неизвестные величины задачи — x_{ij} (интенсивность использования в единицах времени i-го механизма при выполнении j-й работы).

Таблица 2.23

Механизмы	Работы			Фонд времени
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
I (T_1)	20 2 x_{11}	10 3 x_{12}	15 1,5 x_{13}	200
II (T_2)	40 4 x_{21}	30 5 x_{22}	35 4 x_{23}	180
III (T_3)	50 7 x_{31}	40 6 x_{32}	30 5 x_{33}	250
$П_j$	6000	5000	5600	
l_j	2	3	4	

Требуется найти план x_{ij}:

а) минимизирующий суммарные затраты по выполнению заданных объемов работ $П_1 = 6000$ м^3, $П_2 = 5000$ м^3 и $П_3 = 5600$ м^3;

б) максимизирующий суммарный объем выполненных работ;

в) максимизирующий объем работ при соблюдении условия комплектности выполненных видов работ $П_1 : П_2 : П_3 = 2:3:4$;

г) минимизирующий суммарное время по выполнению заданных в п. «а» работ.

В варианте № 1 значения T_i и $П_j$ увеличить на 10 %, в варианте № 2 — на 20, № 3 — на 30, № 4 — на 40, № 5 — на 50, № 6 — на 60, № 7 — на 70, № 8 — на 80, № 9 — на 90 и № 10 — на 100 %.

Математические модели задач для п. «а»—«г» имеют следующий вид:

а) $\min Z_1 = 2 \cdot 20x_{11} + 3 \cdot 10x_{12} + 1{,}5 \cdot 15x_{13} + 4 \cdot 40x_{21} + 5 \cdot 30x_{22} + 4 \cdot 35x_{23} + 7 \cdot 50x_{31} + 6 \cdot 40x_{32} + 5 \cdot 30x_{33}$;

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & \le & 200,\\
x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \le & 180,\\
x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & \le & 250,\\
20x_{11} & + & 40x_{21} & + & 50x_{31} & = & 6000,\\
10x_{12} & + & 30x_{22} & + & 40x_{32} & = & 5000,\\
15x_{13} & + & 32x_{23} & + & 30x_{33} & = & 5600,
\end{array}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4});$$

б) $\max Z_2 = 20x_{11} + 10x_{12} + 15x_{13} + 40x_{21} + 30x_{22} + 35x_{23} +$
$+ 50x_{31} + 40x_{32} + 30x_{33};$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & \le & 200,\\
x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \le & 180,\\
x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & \le & 250,
\end{array}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3});$$

в) $\max Z_3 = z;$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & \le & 200,\\
x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \le & 180,\\
x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & \le & 250,\\
20x_{11} & + & 40x_{21} & + & 50x_{31} & \le & \frac{2}{9}z,\\
10x_{21} & + & 30x_{22} & + & 40x_{32} & = & \frac{1}{3}z,\\
15x_{31} & + & 35x_{23} & + & 30x_{33} & = & \frac{4}{9}z,
\end{array}\right\}
\quad
\begin{array}{l}
\frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2}{2+3+4} = \frac{2}{9},\\
\frac{l_2}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},\\
\frac{l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{4}{9},
\end{array}$$

$$x_{ij} \ge 0;\ z \ge 0;$$

г) $\max Z_4 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} +$
$+ x_{33};$

$$\left.\begin{aligned}
x_{11} + \quad x_{12} + \quad x_{13} &\le 200,\\
x_{21} + \quad x_{22} + \quad x_{23} &\le 180,\\
x_{31} + \quad x_{32} + \quad x_{33} &\le 250,\\
20x_{11} + 40x_{21} + 50x_{31} &= 6000,\\
10x_{12} + 30x_{22} + 40x_{32} &= 5000,\\
15x_{13} + 35x_{23} + 30x_{33} &= 5600,
\end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1, 3};\ j = \overline{1, 3}).$$

2.8 (задача загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования). Пусть имеется m групп невзаимозаменяемого оборудования, на котором можно выпускать n видов продукции. Оборудование невзаимозаменяемо лишь в пределах одной технологии, т. е. при данной технологии одна и та же продукция на другом оборудовании не производится. При замене же технологических способов на данном оборудовании могут выпускаться другие виды продукции. Введем обозначения: a_i $(i = \overline{1, m})$ — общий полезный лимит (в станко-часах) мощности i-го оборудования; k $(k = \overline{1, K})$ — номер технологического способа; a_{ijk} — норма расхода (станко-часов) i-го оборудования на единицу j-й $(j = \overline{1, n})$ продукции по k-му технологическому способу; α_j — цена единицы j-й продукции; c_{jk} — затраты, связанные с изготовлением единицы j-й продукции по k-му технологическому способу; x_{jk} — неизвестная величина — объем выпуска j-й продукции по k-й технологии. Могут быть также заданы граничные условия на объемы выпуска каждого вида продукции d_j и D_j и требования к комплектности выпускаемой продукции. Возникает задача определения плана выпуска, доставляющего максимум прибыли или минимум затрат на реализацию заданных объемов выпуска каждой продукции.

Составим математическую модель задачи. Целевые функции:

максимизация прибыли

$$\max Z_1 = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}(a_j - c_{jk})x_{jk};$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{jk} \le a_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$d_j \le \sum_{k=1}^{K} x_{jk} \le D_j \ (j = \overline{1, n}),$$

минимизация затрат

$$\min Z_2 = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}x_{jk};$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{jk} \le a_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$d_j \le \sum_{k=1}^{K} x_{jk} \le D_j \ (j = \overline{1, n}),$$

максимизация комплектов при условии, что в комплект j-й продукции должно входить l_j единиц,

$$\max Z_3 = x;$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{jk} \le a_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} \ge l_j x \ (j = \overline{1, n}),$$

$$x_{jk} \ge 0 \ (j = \overline{1, n};\ k = \overline{1, K}),\ x \ge 0.$$

Рассмотрим конкретную ситуацию. Имеется три группы оборудования: фрезерные станки, токарные станки и сварочные аппараты. Необходимо выпускать три вида продукции: клапаны, распределительные валы и зубчатые колеса. Разработаны три технологии. Нормативные коэффициенты a_{ijk}, фонд времени a_i, цена реализации α_j и затраты c_{jk}, связанные с выпуском единицы j-й продукции по k-й технологии, представлены в табл. 2.24.

1. Определить план выпуска x_{jk} (объем выпуска j-й продукции по k-й технологии), доставляющий максимум прибыли при граничных условиях $x_1 \ge 0$, $x_2 \le 10\,000$, $x_3 \ge$ $\ge 50\,000$.

Таблица 2.24

Оборудование	Выпускаемая продукция									Фонд времени работы оборудования, тыс. станко-ч
	Клапаны			Валы			Зубчатые колеса			
	Вид технологии									
	$T_{к1}$	$T_{к2}$	$T_{к3}$	$T_{в1}$	$T_{в2}$	$T_{в3}$	$T_{з1}$	$T_{з2}$	$T_{з3}$	
Фрезерные станки	1,5	2	1	2,5	0,5	3	3	2	2,5	25
Токарные станки	3	1	2,5	1,5	2,5	0,5	5,5	6	4	40
Сварочные аппараты	0,5	4	3	2	3	5	4	8	7	50
Цена α_j	15			25			20			
Затраты c_{jk}	3	7	8	15	17	14	2	5	4	
x_j	≥0			≤10 000			≥50 000			
Вхождение в комплект l_j	3			2			5			
Интенсивность использования способа x_{jk}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	

2. Определить план загрузки оборудования x_{jk}, который можно реализовать с наименьшими затратами, при условии, что объемы выпуска не меньше полученных по целевой функции п. 1.

3. Найти максимальное число комплектов. В комплект должно входить: клапанов $l_1 = 3$, распределительных валов $l_2 = 2$ и зубчатых колес $l_3 = 5$.

Исходные данные для решения задачи по вариантам представлены в табл. 2.25.

Математические модели задач:

$$1)\ \max Z_1 = (15 - 3)x_{11} + (15 - 7)x_{12} + (15 - 8)x_{13} + (25 - 15)x_{21} + (25 - 17)x_{22} + (25 - 14)x_{23} + (20 - 2)x_{31} + (20 - 5)x_{32} + (20 - 4)x_{33};$$

Таблица 2.25

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	25 000	35 000	35 000	45 000	50 000	55 000	65 000	75 000	80 000	90 000	95 000
a_2	40 000	48 000	45 000	55 000	60 000	65 000	75 000	85 000	90 000	95 000	85 000
a_3	50 000	60 000	55 000	60 000	55 000	60 000	60 000	70 000	75 000	70 000	90 000
D_1	0	0	0	0	100	4000	0	0	0	0	500
D_2	10 000	80 000	20 000	25 000	1000	10 000	30 000	80 000	35 000	5000	15 000
D_3	5000	6000	8000	10 000	12 000	500	13 000	8000	9500	15 000	12 000
α_1	15	14	15	18	19	15	13	16	12	14	17
α_2	25	21	22	20	20	25	15	18	13	20	19
α_3	20	19	22	25	24	22	20	19	17	21	18
c_{11}	3	4	2	3	3	1	3	7	4	3	5
c_{12}	7	3	6	10	9	3	7	11	5	4	4
c_{13}	8	2	7	9	11	5	8	12	7	8	7
c_{21}	15	12	11	77	7	11	6	10	6	7	10
c_{22}	17	15	13	10	8	16	8	12	8	11	12
c_{23}	14	11	10	6	9	12	9	10	6	8	9
c_{31}	2	7	3	7	7	3	8	8	7	6	5
c_{32}	5	9	6	11	11	6	8	9	6	5	3
c_{33}	4	8	5	6	4	9	9	10	9	8	8

$$\left.\begin{array}{l}
1{,}5x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2{,}5x_{21} + 0{,}5x_{22} + \\
\quad + 3x_{23} + 3x_{31} + 2x_{32} + 2{,}5x_{33} \le 25\,000, \\
3x_{11} + x_{12} + 2{,}5x_{13} + 1{,}5x_{21} + 2{,}5x_{22} + \\
\quad + 0{,}5x_{23} + 5x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} \le 40\,000, \\
0{,}5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + \\
\quad + 5x_{23} + 4x_{31} + 8x_{32} + 7x_{33} \le 50\,000, \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} \ge 0, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 10\,000, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \ge 5000,
\end{array}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0;$$

2) $\min Z_2 = 3x_{11} + 7x_{12} + 8x_{13} + 15x_{21} + 17x_{22} + 14x_{23} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33};$

$$\left.\begin{array}{l}
1{,}5x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2{,}5x_{21} + 0{,}5x_{22} + \\
\quad + 3x_{23} + 3x_{31} + 2x_{32} + 2{,}5x_{33} \le 25\,000, \\
3x_{11} + x_{12} + 2{,}5x_{13} + 1{,}5x_{21} + 2{,}5x_{22} + \\
\quad + 0{,}5x_{23} + 5x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} \le 40\,000, \\
0{,}5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + \\
\quad + 5x_{23} + 4x_{31} + 8x_{32} + 7x_{33} \le 50\,000, \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} \ge \sum_{k=1}^{3} x_{1k}^{*}, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \ge \sum_{k=1}^{3} x_{2k}^{*}, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \ge \sum_{k=1}^{3} x_{3k}^{*},
\end{array}\right\}$$

$$x_{jk} \ge 0;$$

3) $\max Z_3 = x;$

$$\begin{array}{l}
1{,}5x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2{,}5x_{21} + 0{,}5x_{22} + \\
\quad + 3x_{23} + 3x_{31} + 2x_{32} + 2{,}5x_{33} \le 25\,000, \\
3x_{11} + x_{12} + 2{,}5x_{13} + 1{,}5x_{21} + 2{,}5x_{22} + \\
\quad + 0{,}5x_{23} + 5x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} \le 40\,000,
\end{array}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
0{,}5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + \\
\quad + 5x_{23} + 4x_{31} + 8x_{32} + 7x_{33} \le 50\,000, \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} \ge 3x, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \ge 2x, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \ge 5x,
\end{array}\right\}
$$

$$x_{jk} \ge 0;\ x \ge 0.$$

2.9. Сортамент металлургического комбината иногда включает ряд профилей, производство которых возможно на нескольких станах, причем вследствие различий в технических характеристиках станов их производительность и затраты на производство этих профилей также различны. Кроме того, один и тот же профиль на одном и том же стане можно прокатывать из заготовок различных размеров. В этих условиях возможно множество вариантов загрузки оперативных планов-графиков. Для каждого этапа возникает задача такой загрузки прокатных станов заказами, которая позволила бы при обязательном выполнении производственной программы по сортаменту достичь оптимальных результатов работы с точки зрения того или иного критерия оптимальности.

Введем обозначения: a_i — фонд времени работы i-го стана, который можно использовать для выпуска n видов проката; a_{ij} — нормативное время прокатки единицы проката j-го вида на i-м стане; x_j^* — плановое задание на производство проката j-го вида; c_{ij} — затраты, связанные с производством единицы проката j-го вида на i-м стане; x_{ij} — задание i-му стану на производство проката j-го вида.

Пусть на металлургическом комбинате имеется три мелкосортных стана. Из общего сортамента станов четыре профиля можно прокатывать на любом из трех станов. В табл. 2.26 приведены затраты времени на прокатку 100 т каждого из этих профилей на каждом стане, фонд времени станов, составляющий для *I* стана 110 ч, для *II* 175 и для *III* 100 ч и который можно использовать для прокатки этих профилей, и месячная программа производства каждого профиля.

Требуется распределить задание на производство указанных профилей между станами таким образом, чтобы

Таблица 2.26

Стан	Вид проката				Фонд станов
	Круглая сталь диаметром, мм		Стальные полосы размерами, мм		
	16	18	2,5×4	25×5	
I	1,6 x_{11}	1,3 x_{12}	1,9 x_{13}	1,9 x_{14}	110
II	3,2 x_{21}	2,8 x_{22}	3,3 x_{23}	2,7 x_{24}	175
III	1,2 x_{31}	1,0 x_{32}	2,0 x_{33}	2,0 x_{34}	100
x_j^*	100	50	30	20	

выполнить месячную программу по этим профилям с минимальными затратами времени (в стано-часах).

Математическая модель задачи имеет вид

$$\min Z = 1{,}6x_{11} + 1{,}3x_{21} + 1{,}9x_{31} + 1{,}9x_{41} + 3{,}2x_{12} +$$
$$+ 2{,}8x_{22} + 3{,}3x_{32} + 2{,}7x_{42} + x_{13} + 1{,}0x_{23} + 2{,}0x_{33} + 2{,}0x_{43}.$$

Ограничения задачи:
на фонд времени работы станов

$$\left.\begin{aligned} 1{,}6x_{11} + 1{,}3x_{21} + 1{,}9x_{31} + 1{,}9x_{41} &\le 110, \\ 3{,}2x_{12} + 2{,}8x_{22} + 3{,}3x_{32} + 2{,}7x_{42} &\le 175, \\ 1{,}2x_{13} + 1{,}0x_{23} + 2{,}0x_{33} + 2{,}0x_{43} &\le 100, \end{aligned}\right\}$$

на выполнение планового задания заводу

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\ge 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\ge 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\ge 30, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\ge 20, \end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

Решить задачу на ПЭВМ. Сделать анализ решения.

2.10 (задача определения оптимальных составов смесей). В ряде отраслей промышленности, торговли и сельского хозяйства стоит задача о составлении смесей минимальной стоимости, удовлетворяющих определенным требованиям (задача о составлении оптимальной шихты, диеты, кормового рациона, бетоносмесей, горюче-смазочных материалов и т. д.).

Задачу о выборе оптимальной смеси сформулируем как задачу составления оптимальной шихты. Пусть a_{ij} — доля i-го ($i = \overline{1, m}$) химического элемента в исходном шихтовом материале j-го вида ($j = \overline{1, n}$). В результате окислительных процессов содержание некоторых химических элементов в расплаве уменьшится (происходит угар). Обозначим величину угара через u_i, тогда поправка к a_{ij} составит $1 - u_i$. Реальное содержание i-го химического элемента в расплаве должно колебаться между нижним b_i и верхним B_i пределами. Неизвестная величина задачи x_j — доля j-го материала, включаемого в состав шихты. Задача состоит в определении составов шихт минимальной стоимости, удовлетворяющих всем технологическим требованиям.

Перейдем к формированию конкретной модели задачи. Пусть в состав шихты нужно включить n видов исходных материалов. Необходимые сведения о содержании a_{ij} ($i = \overline{1, m}$) в них m химических элементов (кремния, марганца, фосфора, хрома и т. д.), пределы содержания в расплаве этих химических элементов (b_i и B_i), цены единицы материалов, а также потери от угара и граничные условия D_j представлены в табл. 2.27. Учитывая ограничения на комплектность долевого участия исходных материалов, определить его оптимальный состав. Дать анализ решения.

Таблица 2.27

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	1,5	1,6	1,75	1,4	1,7	1,4	1,8	0,7	1,6	0,6	1,8
b_2	0,3	0,2	0,6	0,1	0,36	0,3	0,5	0,12	0,4	0,14	0,5
b_3	0	0,1	0,01	0,05	0,02	0	0,02	0,05	0,01	0,04	0,02
b_4	0,15	0,05	0,18	0,08	0,15	0,1	0,18	0,07	0,15	0	0,18

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_1	2,7	2,8	2,7	2,3	2,55	2,7	2,6	2,3	2,5	2,5	2,6
B_2	0,7	0,8	0,9	0,5	0,7	0,7	0,8	0,53	0,65	0,63	0,8
B_3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,3	0,4	0,28	0,5	0,3
B_4	0,6	0,2	0,5	0,7	0,65	0,6	0,5	0,6	0,6	0,7	0,5
u_1	0,15	0,13	0,15	0,13	0,15	0,13	0,15	0,13	0,15	0,13	0,15
u_2	0,20	0,25	0,20	0,25	0,20	0,25	0,20	0,25	0,20	0,25	0,20
u_3	0	0,1	0	0,2	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0
u_4	0,25	0	0,25	0	0,25	0	0,25	0	0,25	0	0,25
a_{11}	1,8	1,6	1,8	1,6	1,8	1,6	1,8	1,6	1,8	1,6	1,8
a_{12}	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2
a_{13}	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4
a_{14}	2	2,1	2	2,1	2	2,1	2	2,1	2	2,1	2
a_{15}	1,5	1,4	1,5	1,4	1,5	1,4	1,5	1,4	1,5	1,4	1,5
a_{16}	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3	2,2	2,3
a_{21}	1,7	0,7	1,7	0,7	1,7	0,7	1,7	0,7	1,7	0,7	1,7
a_{22}	0,6	1,4	0,6	1,4	0,6	1,4	0,6	1,4	0,6	1,4	0,6
a_{23}	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
a_{24}	1	1,5	1	1,5	1	1,5	1	1,5	1	1,5	1
a_{25}	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0
a_{26}	0,6	0,9	0,6	0,9	0,6	0,9	0,6	0,9	0,6	0,9	0,6
a_{31}	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
a_{32}	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01
a_{33}	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
a_{34}	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01
a_{35}	0,05	3,3	0,05	3,3	0,05	3,3	0,05	3,3	0,05	3,3	0,05
a_{36}	0,02	0,5	0,02	0,5	0,02	0,5	0,02	0,5	0,02	0,5	0,02
a_{41}	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0
a_{42}	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0
a_{43}	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0
a_{44}	0	0,15	0	0,15	0	0,15	0	0,15	0	0,15	0
a_{45}	6,5	0,06	6,5	0,06	6,5	0,06	6,5	0,06	6,5	0,06	6,5
a_{46}	0,3	0,03	0,3	0,03	0,3	0,003	0,3	0,03	0,3	0,03	0,3
D_1	0,12	0,25	0	0	0	0	0	0,45	0,2	0,55	0
D_2	0	0	0	0,35	0,4	0,12	0,3	0,5	0	0,6	0,5
D_3	0,3	0,5	0,5	0	0	0,3	0,1	0	0	0	0
D_4	0	0	0,6	0,4	0	0	0	0	0,1	0	0,6
D_5	0	0	0	0,7	0,1	0,5	0,1	0,6	0	0,7	0,1
D_6	0,5	0,6	0,3	0	0,2	0	0	0	0,45	0	0

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	171	200	90	210	80	160	171	170	65	96	95
c_2	40	50	60	40	40	60	40	90	50	120	50
c_3	51	80	150	70	50	70	51	75	39	75	64
c_4	78	60	85	55	64	90	78	35	80	65	92
c_5	230	120	130	150	125	170	230	80	150	130	160
c_6	60	90	70	10	72	75	60	110	45	120	210

Составим математическую модель задачи. Целевая функция — минимизация затрат за шихту:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Ограничения задачи:

на нижний и верхний уровни содержания в расплаве химических элементов

$$b_i \le \sum_{j=1}^{n} (1 - u_i) a_{ij} x_j \le B_i \ (i = \overline{1, m}),$$

на комплектность долевого участия исходных материалов

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

на граничные условия, определяемые технологией выплавки и ограниченностью отдельных исходных материалов,

$$0 \le x_j \le D_j \ (j = \overline{1, n}).$$

Построим математическую модель задачи, используя исходные данные из табл. 2.27 (вариант *).

Минимизировать затраты на шихту

$$\min Z = 17x_1 + 40x_2 + 51x_3 + 78x_4 + 230x_5 + 60x_6$$

при ограничениях:

на нижний уровень содержания химических элементов

$$\left.\begin{array}{r}(1-0{,}15)(1{,}8x_1+2{,}2x_2+0{,}4x_3+2x_4+1{,}5x_5+2{,}3x_6)\geq 1{,}5,\\(1-0{,}2)(1{,}7x_1+0{,}6x_2+0{,}4x_3+x_4+0\cdot x_5+0{,}6x_6)\geq 0{,}3,\\0{,}1x_1+0{,}01x_2+0{,}1x_3+0{,}1x_4+0{,}05x_5+0{,}02x_6\geq 0,\\(1-0{,}25)(6{,}5x_5+0{,}3x_6)\geq 0{,}15,\end{array}\right\}$$

на верхний уровень содержания химических элементов

$$\left.\begin{array}{r}(1-0{,}15)(1{,}8x_1+2{,}2x_2+0{,}4x_3+2x_4+1{,}5x_5+2{,}3x_6)\leq 2{,}7,\\(1-0{,}2)(1{,}7x_1+0{,}6x_2+0{,}4x_3+x_4+0\cdot x_5+0{,}6x_6)\leq 0{,}7,\\0{,}1x_1+0{,}01x_2+0{,}1x_3+0{,}1x_4+0{,}05x_5+0{,}02x_6\leq 0{,}3,\\(1-0{,}25)(6{,}5x_5+0{,}3x_6)\leq 0{,}6,\end{array}\right\}$$

на комплектность долевого участия исходных материалов

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1,$$

на граничные условия

$$\left.\begin{array}{l}x_1\leq 0{,}12,\\x_3\leq 0{,}3,\\x_6\leq 0{,}5,\end{array}\right\}$$

$$x_j\geq 0\ (j=\overline{1,6}).$$

2.11 (задача определения оптимальной рецептуры сырья). Рецептура сырьевой смеси для производства пищевых продуктов с определенными вкусовыми достоинствами и пищевой ценностью разрабатывается на основе всесторонних лабораторных и органолептических исследований качества сырья и готовой продукции. Лабораторными и органолептическими методами определяются химические, физические и вкусовые свойства смеси сырья, ее компонентов и готовой продукции, получаемой из этой смеси. По результатам многочисленных и тщательных анализов устанавливается состав смеси сырья и соотношение питательных веществ в готовом продукте. На пищеконцентратном предприятии запланирован выпуск продукта, содержащего 30 % (0,3) белков, 20 % (0,2) жиров, 40 %

(0,4) углеводов и 10 % (0,1) прочих питательных веществ. Для получения указанного продукта может быть использовано три вида исходного сырья с различным соотношением пищевых веществ и неодинаковой ценой за единицу сырья. Исходная информация задачи представлена в табл. 2.28.

Таблица 2.28

Питательные вещества	Исходное сырье			Содержание питательных веществ в продукте
	M_1	M_2	M_3	
Белки $П_1$	0,3	0,1	0,6	0,3
Жиры $П_2$	0,1	0,2	0,2	0,2
Углеводы $П_3$	0,5	0,6	0,1	0,4
Прочие вещества $П_4$	0,1	0,1	0,1	0,1
Цена единицы сырья	4	2	3	

Математическая модель задачи:

$$\min Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}6x_3 \geq 0{,}3, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 \geq 0{,}2, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0{,}4, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0{,}1. \end{array}\right\}$$

Если в задаче предусмотреть, чтобы общее количество входящего в смесь сырья равнялось какому-то заданному значению, например единице, то данное условие будет выражено уравнением

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Неизвестные обозначают содержание сырья каждого вида, входящего в исходную смесь, коэффициенты при неизвестных — соотношения питательных веществ. Коэффициенты в целевой функции — цена за единицу сырья. Правая часть равенства — заданное соотношение питательных веществ в готовом продукте. Например, неизвестная x_2 означает содержание входящего в состав смеси сырья M_2, коэффициенты при ней 0,1; 0,2; 0,6; 0,1 выражают содержание в данном виде сырья соответственно белков, жиров, углеводов и прочих веществ. В целевой функции коэффициент 2 при x_2 означает цену единицы сырья M_2. В правой части неравенств постоянные величины 0,3; 0,2; 0,4; 0,1 характеризуют заданное минимальное соотношение соответственно белков, жиров, углеводов и прочих веществ в готовом продукте.

В результате решения задачи на ЭВМ получен следующий оптимальный план:

$$\mathbf{x}^* = (0;\ 0{,}6;\ 0{,}4),\ Z^* = 2{,}4,$$

т. е. для получения продукта с заданным содержанием белков, жиров и углеводов надо использовать сырье второго и третьего вида (60 и 40 % соответственно). Тогда единица продукта будет иметь минимальную стоимость 2,4.

2.12 (задача об оптимальной диете). Требуется составить диету (смесь), включающую питательные вещества трех видов $П_1$, $П_2$ и $П_3$ в количествах соответственно не менее 62, 30 и 44 ед. Для составления смеси могут быть использованы три вида сырья M_1, M_2 и M_3, содержащего указанные вещества в различных сочетаниях. Закупочная цена каждого вида сырья также различна. Содержание питательных веществ в сырье, готовом продукте и цены на каждый вид сырья приведены в табл. 2.29.

Таблица 2.29

Питательное вещество	Сырье			Минимальное содержание веществ в продукте
	M_1	M_2	M_3	
$П_1$	4	4	6	62
$П_2$	6	1	2	30
$П_3$	4	6	4	44
Цена единицы сырья	8	5	6	

Определить такой набор сырья, который обеспечил бы необходимое содержание питательных веществ в продукте и суммарная стоимость его при этом была бы наименьшей. В качестве неизвестных принимаются объемы каждого вида сырья, входящего в оптимальный набор x_1, x_2, x_3.

Математическая модель задачи:

$$\min Z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\geq 62, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 30, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\geq 44, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3}).$$

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.30.

Таблица 2.30

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	62	93	70	78	95	90	95	90	85	60	35
a_2	30	45	40	45	70	50	80	60	70	45	20
a_3	44	70	50	60	80	65	90	75	80	58	28
a_{11}	4	6	7	8	12	9	13	11	11	10	12
a_{12}	4	5	5	6	9	7	10	8	12	11	7
a_{13}	6	8	8	9	6	8	7	9	8	9	8
a_{21}	6	8	8	9	11	10	12	10	10	8	9
a_{22}	1	2	2	3	6	4	7	5	9	6	5
a_{23}	2	3	3	4	7	5	8	6	7	9	7
a_{31}	4	7	9	6	9	7	7	8	8	9	6
a_{32}	6	9	6	8	11	9	12	10	13	10	9
a_{33}	4	6	7	6	9	7	8	8	9	5	4
c_1	8	12	9	10	8	8	9	7	8	5	9
c_2	5	7	6	7	7	9	5	6	6	9	8
c_3	6	9	7	8	11	11	12	10	10	4	7

2.13 (задача оптимального раскроя по одному измерению длинномерных материалов (прутков, труб, профильного проката и др.)). Пусть L — длина исходного материала, который нужно раскроить на заготовки m видов с длинами Δ_i $(i = \overline{1, m})$; a_i — потребное количество заготовок i-го вида; a_{ij} — количество заготовок i-го вида, получаемое при раскрое единицы исходного материала по j-му варианту; c_j — отход при раскрое единицы исходного материала j-м способом; x_j —количество единиц исходного материала, который будет раскраиваться по j-му варианту. Требуется свести к минимуму отходы при раскрое

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge a_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Наиболее трудоемкий этап в процессе построения экономико-математической модели раскройной задачи — определение вариантов раскроя.

Исходная формула для составления вариантов раскроя следующая:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_j b_{ij} + c_j = L \ (j = \overline{1, n}),$$

$$0 \le c_j \le \min\{\Delta_j\}.$$

Реализуем требования задачи на конкретном числовом материале. Пусть предприятие получает от поставщиков прутки стального проката длиной 800 см. Требуется получить заготовки трех видов: $\Delta_1 = 250$ см — 150 тыс. шт., $\Delta_2 = 190$ см — 140 тыс. шт., $\Delta_3 = 100$ см — 48 тыс. шт.

Составим таблицу возможных вариантов раскроя (табл. 2.31).

Математическая модель задачи:

$$\min Z = 50x_1 + 10x_2 + 70x_4 + 60x_5 + 50x_6 + 40x_7 + 30x_8 + 20x_9 + 10x_{10};$$

$$\left.\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 150, \\ &x_2 + x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} = 140, \\ &x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_8 + 4x_9 + 6x_{10} + 8x_{11} = 48, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 11}).$$

Оптимальное решение, полученное при решении задачи на ЭВМ:

$$\mathbf{x}^* = (8;\ 48;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 23;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0),\ Z^* = 2300,$$

Таблица 2.31

Номер варианта	b_{ij}			Остатки c_j	Количество прутков, раскроенных j-м способом
	$\Delta_1 = 250$	$\Delta_2 = 190$	$\Delta_3 = 100$		
1	3	0	0	50	x_1
2	2	1	1	10	x_2
3	3	0	3	0	x_3
4	1	2	1	70	x_4
5	1	1	3	60	x_5
6	1	0	5	50	x_6
7	0	4	0	40	x_7
8	0	3	2	30	x_8
9	0	2	4	20	x_9
10	0	1	6	10	x_{10}
11	0	0	8	0	x_{11}
Потребное количество заготовок		150	140	48	

т. е. первым способом следует раскроить 18 прутков, вторым — 48, седьмым — 23, тогда заявки потребителей удовлетворятся полностью и отходы будут минимальными.

Исходные данные для решения различных вариантов рассмотренной задачи представлены в табл. 2.32.

Таблица 2.32

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	800	900	700	800	900	700	800	900	700	800	900
Δ_1	250	200	180	200	250	190	180	190	200	190	180
Δ_2	120	180	150	180	190	150	150	140	180	150	150
Δ_3	100	120	100	120	110	80	100	100	120	80	100
a_1	150	160	180	190	200	170	140	130	120	110	87
a_2	140	150	160	120	160	130	170	85	90	100	110
a_3	48	70	90	100	80	75	60	120	115	175	200

2.14 (задача комплектного раскроя длинномерных материалов). На раскрой поступает m различных материалов в объеме b_i $(i = \overline{1, m})$ каждого. Требуется изготовить комплекты, содержащие по k ($k = \overline{1, K}$) изделий, входящих в комплект по l_k штук. Каждая единица i-го материала может быть раскроена n_j ($j = \overline{1, n_j}$) различными способами. При раскрое единицы i-го материала j-м способом получается a_{ijk} единиц k-го изделия. Обозначим через x_{ij} количество единиц i-го материала, раскраиваемого j-м способом, а количество изготавливаемых комплектов — через x.

Математическая модель задачи:

$$\max Z = x$$

при ограничениях:

на объемы материалов, поступивших на раскрой,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i \ (i = \overline{1, m}),$$

на комплектность выпускаемой продукции

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij} \ge l_k x \ \ (k = \overline{1, K}),$$

$$x_{ij} \ge 0 \ \ (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}).$$

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.33.

Таблица 2.33

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
l_2	2	1	2	3	1	2	2	3	1	3	3
Δ_1	2	1	2,5	1,25	0,75	1,5	2,25	1,75	1	2	2
Δ_2	1,25	1,75	1	2	2,25	0,75	1	1,5	2,5	0,75	1,25
L_1	5	4	3	7	8	4	5	6	6	7	6,5
L_2	4	8	6	5	7	6	7	4	5	5	4
b_1	100	175	125	200	150	100	175	125	200	150	100
b_2	175	125	200	150	100	200	150	100	175	125	250

Рассмотрим построение модели на конкретном числовом материале. Составим таблицу возможных вариантов раскроя (табл. 2.34).

Таблица 2.34

Длина заготовки, м	Вариант раскроя	Размер детали, м		Число заготовок	План раскроя
		$\Delta_1 = 2$	$\Delta_2 = 1{,}25$		
5	1 2 3	1 2 0	2 0 4	100	x_{11} x_{12} x_{13}
4	1 2 3	2 1 0	0 1 3	175	x_{21} x_{22} x_{23}
Количество деталей в комплекте		1	2		

Математическая модель задачи примет вид

$$\max Z = x$$

при ограничениях:

по ресурсам заготовок

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\le 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\le 175, \end{aligned}\right\}$$

по комплектности

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + 2x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 0 \cdot x_{23} &\ge x, \\ 2x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 4x_{13} + 0 \cdot x_{21} + x_{22} + 3x_{23} &\ge 2x. \end{aligned}\right\}$$

Условия неотрицательности $x_{ij} \ge 0$ $(i = 1, 2;\ j = \overline{1, 3})$.

При решении задачи на ЭВМ получаем следующий план раскроя:

$$\mathbf{x}^* = (0;\ 0;\ 100;\ 132;\ 0;\ 43),\ Z^* = 264,$$

т. е. прутки длиной 5 м следует раскроить третьим способом, а прутки длиной 4 м — первым и третьим способами в количествах 132 и 43 соответственно. Тогда получим максимальное количество комплектов — 264.

2.15 (задача оптимального раскроя картона). Из листов картона размерами 60×100 см требуется выкроить заготовки трех типов, из которых первая ($П_1$) имеет размеры 20×30 см, вторая ($П_2$) — 30×40 см и третья ($П_3$) — 40×40 см. Требуется определить, какое число листов картона нужно разрезать каждым способом, чтобы была удовлетворена потребность в заготовках $П_1$, $П_2$ и $П_3$ при минимуме отходов.

Для построения математической модели задачи построим карту вариантов раскроя. На рис. 2.1 показаны возможные способы раскроя картона. Заштрихованные места — это отходы, получаемые при разрезе листов. Варианты раскроя сведены в табл. 2.35.

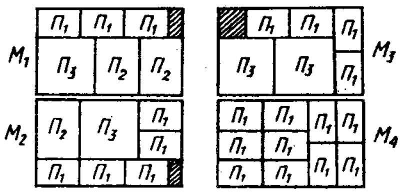


Рис. 2.1

Таблица 2.35

Вид заготовки	Размеры заготовки, см	Способ раскроя				Потребность в заготовках, шт.
		M_1	M_2	M_3	M_4	
$П_1$	20×30	3	4	5	10	240
$П_2$	30×40	2	0	1	0	100
$П_3$	40×40	1	2	1	0	80
Отходы, см^2		200	400	200	0	

Обозначив через x_j $(j = \overline{1, 4})$ число листов картона, раскраиваемых соответственно способами M_1, M_2, M_3 и M_4, получим математическую модель задачи:

$$\min Z = 200x_1 + 400x_2 + 200x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 240, \\ 2x_1 + x_3 &= 100, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 80, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

Таблица 2.36

Параметры задачи	Номер варианта										
	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	60×100	80×100	60×80	70×90	60×80	80×100	70×90	60×100	80×100	60×80	70×90
Δ_1	20×30	10×30	20×30	15×30	10×30	20×30	10×20	10×30	15×30	15×40	10×30
Δ_2	30×40	20×40	30×40	20×35	20×35	30×40	25×30	20×40	20×40	20×35	20×40
Δ_3	40×40	30×40	40×40	30×40	30×40	40×40	30×45	40×40	40×40	30×40	30×45
a_1	240	120	200	100	220	140	260	180	160	100	120
a_2	100	150	130	160	110	170	120	200	190	140	200
a_3	80	60	100	120	80	60	70	90	100	80	60

Решив задачу на ЭВМ, получим оптимальный план раскроя картона:

$$\mathbf{x}^* = (44;\ 12;\ 12;\ 0),\ Z^* = 16000,$$

т. е. первым способом следует раскроить 44 листа картона, вторым — 12, третьим — 12. Тогда будет удовлетворена потребность в заготовках и отходы будут минимальными.

Исходные данные для решения задачи 2.15 представлены в табл. 2.36.

3

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

3.1. Парные матричные игры с нулевой суммой

Игрой называют упрощенную модель конфликтной ситуации. Игра ведется по определенным правилам. Суть игры в том, что каждый из ее участников принимает такие решения, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший результат (исход). *Исход игры* — это значение некоторой функции, называемой *функцией выигрыша (платежной функцией)*. Если сумма выигрышей игроков равна нулю, то игру называют *игрой с нулевой суммой*. Если в игре участвуют два игрока, то ее называют *парной*.

Пусть игроки A и B располагают конечным числом возможных действий — чистых стратегий. Обозначим их соответственно $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$. Игрок A может выбрать любую чистую стратегию A_i $(i = \overline{1, m})$, в ответ на которую игрок B может выбрать любую свою чистую стратегию B_j $(j = \overline{1, n})$. Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары стратегий (A_i, B_j) однозначно определяет результат a_{ij} — выигрыш игрока A. При этом проигрыш игрока B составит $-a_{ij}$. Если известны значения a_{ij} выигрыша для каждой пары (A_i, B_j) чистых стратегий, то можно составить матрицу выигрышей игрока A (проигрышей игрока B) (табл. 3.1). Эту матрицу называют также *платежной*.

Таблица 3.1

	B_1 … B_n	α_i
A_1	a_{11} … a_{1n}	α_1
…	. . . .	…
A_m	a_{m1} … a_{mn}	α_m
β_j	β_1 … β_n	

В табл. 3.1 приведены числа $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ — минимально возможный выигрыш игрока A, применяющего стратегию A_i $(i = \overline{1, m})$, и $\beta_j = \max_i a_{ij}$ — максимально возможный проигрыш игрока, если он пользуется стратегией B_j $(j = \overline{1, n})$.

Число $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$ называют *нижней чистой ценой игры (максимином)*, а соответствующую ему чистую стратегию — *максиминной*. Число $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$ называют *верхней чистой ценой игры (минимаксом)*, а соответствующую чистую стратегию — *минимаксной*. Ясно, что максимин не превосходит минимакса, т. е. $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры $v = \alpha = \beta$. Пару чистых стратегий A_{i_*} и B_{j_*}, соответствующих α и β, называют *седловой точкой матричной игры*, а элемент $a_{i_*j_*}$ платежной матрицы, стоящий на пересечении i_*-й строки и j_*-го столбца, — *седловым элементом платежной матрицы*. Он одновременно является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, т. е. $a_{ij_*} \le a_{i_*j_*} \le a_{i_*j}$. Стратегии A_{i_*} и B_{j_*}, образующие седловую точку, являются оптимальными. Тройку $\left\{A_{i_*};\ B_{j_*};\ v\right\}$ называют *решением игры*.

Пример 3.1. Каждый из игроков A и B записывает одно из чисел 1, 4, 6 или 9, затем они одновременно показывают написанное. Если оба числа оказались одинаковой четности, то игрок A выигрывает столько очков, какова сумма этих чисел, если разной четности — выигрывает игрок B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Решение. Чистыми стратегиями игрока A будут: A_1 — записать число 1, A_2 — число 4, A_3 — число 6, A_4 — число 9. У игрока B чистыми будут аналогичные стратегии (табл. 3.2).

Таблица 3.2

	$B_1(1)$	$B_2(4)$	$B_3(6)$	$B_4(9)$	α_i
$A_1(1)$	2	−5	−7	10	−7
$A_2(4)$	−5	8	10	−13	−13
$A_3(6)$	−7	10	12	−15	−15
$A_4(9)$	10	−13	−15	18	−15
β_j	10	10	12	18	

Элемент $a_{11} = 2$, так как в ситуации (A_1, B_1) оба игрока записывают нечетное число 1 и выигрыш игрока A равен $1 + 1 = 2$. Элемент $a_{12} = -5$, так как в ситуации (A_1, B_2) игрок A записывает число 1, а игрок B — число 4, т. е. числа разной четности, поэтому выигрыш игрока B равен 5, тогда как выигрыш игрока A составит -5. Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы. После определения α_i и β_j замечаем, что нижняя чистая цена игры $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = -7$ не равна верхней чистой цене игры $\beta = \min\limits_j \beta_j = 10$, поэтому данная игра не имеет седловой точки. Максиминной для игрока A будет чистая стратегия A_1. Пользуясь ею, игрок A «выиграет» не менее -7 (проиграет не более 7). Минимаксными для игрока B будут чистые стратегии B_1 и B_2, при которых он проиграет не более 10.

Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий. *Смешанной стратегией* игрока A называют вектор $\mathbf{p} = (p_1; \ldots; p_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$; $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. *Смешанной стратегией* игрока B называют вектор $\mathbf{q} = (q_1; \ldots; q_n)$, где $q_j \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$; $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$; p_i и q_j — вероятности, с которыми игроки A и B выбирают свои чистые стратегии A_i и B_j. При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B). Эта величина является функцией смешанных стратегий $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и определяется по формуле

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Функцию $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ называют платежной или функцией выигрыша.

Смешанные стратегии $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ называются *оптимальными*, если они образуют седловую точку для платежной функции $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, т. е. удовлетворяют неравенству $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q})$. Пользуются и другим определением оптимальных смешанных стратегий: стратегии $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ называют оптимальными, если

$$\min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*).$$

Величину $f(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = v$ называют *ценой игры.*

Поиск оптимальных стратегий начинают с упрощения платежной матрицы. Если в платежной матрице элементы k-й строки не меньше соответствующих элементов s-й строки, т. е. $a_{kj} \geq a_{sj}$ $(j = \overline{1, n})$, то говорят, что стратегия A_k *доминирует* над стратегией A_s. Аналогично, если элементы l-го столбца не превосходят соответствующих элементов r-го столбца, т. е. $a_{il} \leq a_{ir}$ $(i = \overline{1, m})$, то говорят, что стратегия B_l *доминирует* над стратегией B_r. Частным случаем доминирования является *дублирование стратегий,* когда $a_{kj} = a_{sj}$ $(j = \overline{1, n})$ или $a_{il} = a_{ir}$ $(i = \overline{1, m})$. Исключение из платежной матрицы доминируемых стратегий (ими игрокам пользоваться заведомо невыгодно) позволяет уменьшать ее размерность, а это упрощает решение игры. Вероятность применения доминируемых стратегий равна нулю.

Оптимальные смешанные стратегии $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ в игре с платежной матрицей $[a_{ij}]_{m \times n}$ и ценой v остаются оптимальными и для игры с платежной матрицей $[ba_{ij} + c]_{m \times n}$ (где $b > 0$) и ценой $bv + c$. На этом основании платежную матрицу можно всегда преобразовать так, что ее элементы будут целыми неотрицательными числами, а это упрощает расчеты.

Пример 3.2. Выполнить возможные упрощения платежных матриц:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. а) Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк равны, то опустим, например, четвертую строку. Элементы первой строки меньше соответствующих элементов второй, а элементы пятой не превосходят соответствующих элементов третьей строки. Поэтому игроку A, стремящемуся максимизировать выигрыш, выгоднее применять стратегии A_2 и A_3, а не A_1 и A_5. В связи с этим опустим доминируемые первую и пятую строки. В преобразованной матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

элементы первого и второго столбцов больше соответствующих элементов четвертого, поэтому игроку B, стремящемуся проиграть как можно меньше, выгоднее использовать стратегию B_4, чем B_1 или B_2. В связи с этим доминируемые столбцы B_1 и B_2 следует опустить. По аналогичной причине после сравнения пятого и третьего столбцов опускаем пятый столбец. В результате приходим к матрице

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

не подлежащей дальнейшему упрощению.

б) Вторая строка доминирует над первой, а поэтому доминируемую первую строку опускаем. В полученной матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

третий столбец доминирует над остальными. Опуская последние, приходим к матрице $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, из которой видно, что наилучшей для игрока A является чистая стратегия A_2, обеспечивающая ему наибольший выигрыш, равный 4, а для игрока B — чистая стратегия B_3. В данном примере в результате упрощения платежной матрицы удалось найти решение игры в чистых стратегиях. Объясняется это тем, что данная платежная матрица обладает седловым элементом $a_{23} = 4$, в чем легко убедиться, проанализировав платежную матрицу в исходной записи.

3.1. Игроки A и B записывают цифры 1 и 2. Игра состоит в том, что кроме цифры 1 или 2 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

3.2. Игрок A может записать одну из цифр: 2, 4 либо 7; игрок B может записать 1, 3, 4 либо 8. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок A получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности — то очки достаются игроку B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

3.3. Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 3, 5 или 8. Если разность между цифрами, записанными игроками A и B, окажется положительной, то игрок A выигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет отрицательной, то соответствующее количество очков выигрывает игрок B; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.

3.4. Каждый из игроков A и B может показать один или два пальца. Если число одновременно показанных пальцев у обоих игроков одинаково, то игрок A получает одно очко; если же число пальцев разное, то очко получает игрок B. Составить платежную матрицу.

3.5. Для игр, заданных следующими платежными матрицами, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков, установить наличие седловых элементов в платежных матрицах (в последнем случае найти решение игры):

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 7 & 9 & 7 & 5 & 6 & 12 \\ 9 & 10 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 8 & -5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{г)} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

д) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

3.6. Выполнить возможные упрощения платежных матриц в задаче 3.5.

3.7. Упростить следующие платежные матрицы:

а) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

3.2. Методы решения матричных игр

Решение матричной игры сведением к задаче линейного программирования. Пусть игра задана платежной матрицей (см. табл. 3.1). Оптимальные смешанные стратегии $\mathbf{p}^* = (p_1^*;\ldots;p_i^*;\ldots;p_m^*)$ и $\mathbf{q}^* = (q_1^*;\ldots;q_j^*;\ldots;q_n^*)$ игроков A и B могут быть найдены в результате решения пары двойственных ЗЛП.

Для игрока A:

$$\left.\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^{m} x_i; \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i &\ge 1 \ (j = \overline{1, n}), \\ x_i &\ge 0 \ (i = \overline{1, m}). \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

В результате решения задачи (3.1) находят оптимальный вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*;\ldots;x_i^*;\ldots;x_m^*)$ и $f^* = f_{\min}$, а затем

$$v = 1/f_{\min},\ p_i^* = vx_i^* \ (i = \overline{1, m}). \tag{3.2}$$

Для игрока B:

$$\left.\begin{aligned} \max\varphi &= \sum_{j=1}^{n} y_j; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j &\le 1 \ (i = \overline{1, m}), \\ y_j &\ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Решая задачу (3.3), находят оптимальный вектор $\mathbf{y}^* = (y_1^*;\ldots;y_j^*;\ldots;y_n^*)$ и $\varphi^* = \varphi_{\max}$, а затем

$$v = 1/\varphi_{\max},\ q_j^* = vy_j^* \ (j = \overline{1, n}). \tag{3.4}$$

Поскольку задачи (3.1) и (3.3) образуют пару симметричных двойственных ЗЛП, нет необходимости решать обе задачи. Получив решение одной из них, достаточно воспользоваться соответствием между переменными в канонических записях задач

$$\begin{matrix} \overbrace{x_1 \quad \ldots \quad x_m}^{\text{Свободные}} & \overbrace{x_{m+1} \quad \ldots \quad x_{m+n}}^{\text{Базисные}} \\ \underbrace{y_{n+1} \quad \ldots \quad y_{n+m}}_{\text{Базисные}} & \underbrace{y_1 \quad \ldots \quad y_n}_{\text{Свободные}} \end{matrix} \tag{3.5}$$

и из строки целевой функции последней симплекс-таблицы, содержащей компоненты оптимального вектора, выписать значения компонент оптимального вектора двойственной задачи.

При поиске оптимальных стратегий в матричных играх размерностей $2{\times}n$ и $m{\times}2$ целесообразно использовать графический метод решения ЗЛП и свойства оптимальных планов пары двойственных задач: если в оптимальном плане задачи переменная положительна, то соответствующее ограничение двойственной задачи ее оптимальным планом обращается в равенство; если оптимальным планом задачи ограничение обращается в строгое неравенство, то в оптимальном плане двойственной задачи соответствующая переменная равна нулю.

Пример 3.3. Решить игры с данными платежными матрицами, сведя их к ЗЛП:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. а) Прежде всего проверим, не имеет ли игра седловой точки. Находим:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 2.$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то решением игры будут смешанные стратегии, а цена v игры заключена в пределах $1 \le v \le 2$. По матрице игры составляем задачи (3.1) и (3.3):

$$\left.\begin{aligned} \min f = {} & x_1 + x_2 + x_3; \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1, \\ & x_1 + 2x_3 \ge 1, \\ & x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ & x_i \ge 0 \ (i = \overline{1, 3}), \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

$$\left.\begin{aligned} \max \varphi = {} & y_1 + y_2 + y_3; \\ & 2y_1 + y_2 \le 1, \\ & 3y_1 + y_3 \le 1, \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 1, \\ & y_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 3}). \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Решим, например, задачу (3.7). После приведения модели к каноническому виду дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 составят начальный базис, а основные переменные y_1, y_2, y_3 будут свободными. В результате симплексных преобразований приходим к табл. 3.3, содержащей компоненты оптимального плана $\mathbf{y}^* = (y_1^*; y_2^*; y_3^*; y_4^*; y_5^*; y_6^*) = (1/3; 1/3; 0; 0; 0; 0)$ и $\varphi_{\max} = 2/3$. По формулам (3.4) по-

Т а б л и ц а 3.3

БП	1	СП		
		$-y_3$	$-y_4$	$-y_6$
$y_2 =$ $y_1 =$ $y_5 =$	1/3 1/3 0			
$\varphi =$	2/3	1/3	1/3	1/3

лучаем цену игры $v = 1/\varphi_{\max} = 3/2$ и компоненты q_j^* оптимальной смешанной стратегии $\mathbf{q}^*$ игрока B:

$$q_1^* = vy_1^* = 3 / 2 \cdot 1 / 3 = 1 / 2, \;\; q_2^* = 1 / 2, \;\; q_3^* = 0.$$

Введя дополнительные переменные x_4, x_5, x_6 в ограничения задачи (3.6), приведем модель к каноническому виду. Эти переменные составят начальный базис, а x_1, x_2, x_3 будут свободными. Между переменными канонических форм рассматриваемых двойственных ЗЛП соответствие (3.5) примет вид

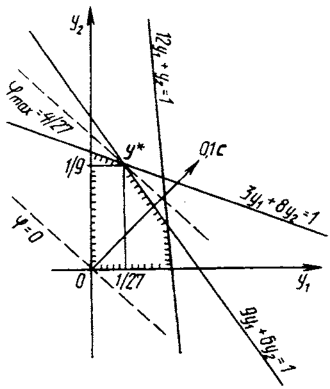
$$\begin{array}{cc} \overbrace{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3}^{\text{Свободные}} & \overbrace{x_4 \;\; x_5 \;\; x_6}^{\text{Базисные}} \\ \underbrace{y_4 \;\; y_5 \;\; y_6}_{\text{Базисные}} & \underbrace{y_1 \;\; y_2 \;\; y_3}_{\text{Свободные}} \end{array}$$

Учитывая это соответствие, выписываем из строки целевой функции φ табл. 3.3 значения компонент оптимального вектора задачи (3.6): $x_1^* = 1/3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1/3$. Теперь, пользуясь формулами (3.2), находим компоненты p_i^* оптимальной смешанной стратегии $\mathbf{p}^*$ игрока A: $p_1^* = vx_1^* = 3/2 \cdot 1/3 = 1/2$, $p_2^* = 0$, $p_3^* = 1/2$. Итак, решение игры найдено: $\mathbf{p}^* = (1/2; 0; 1/2)$, $\mathbf{q}^* = (1/2; 1/2; 0)$, $v = 3/2$.

б) В данном случае $\alpha = 6$, $\beta = 8$, т. е. $\alpha \neq \beta$, а поэтому для определения оптимальных смешанных стратегий игроков составляем задачи (3.1) и (3.3):

$$\left.\begin{aligned} \min f = {} & x_1 + x_2 + x_3; \\ & 3x_1 + 12x_2 + 9x_3 \geq 1, \\ & 8x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 1, \\ & x_i \geq 0 \; (i = \overline{1, 3}), \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \max \varphi = {} & y_1 + y_2; \\ & 3y_1 + 8y_2 \leq 1, \\ & 12y_1 + y_2 \leq 1, \\ & 9y_1 + 6y_2 \leq 1, \\ & y_j \geq 0 \; (j = 1, 2). \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$



Р и с. 3.1

Поскольку задача (3.9) содержит две переменные, то, решая ее графически (рис. 3.1), находим: $y_1^* = 1/27$, $y_2^* = 1/9$, $\varphi_{\max} = 4/27$. Используя формулы (3.4), получаем: $v = 27/4$, $q_1^* = 1/4$, $q_2^* = 3/4$.

Для определения оптимальной смешанной стратегии $\mathbf{p}^* = (p_1^*; p_2^*; p_3^*)$ найдем сначала решение двойственной задачи (3.8). В оптимальном плане задачи (3.9) $y_1^* > 0$ и $y_2^* > 0$, поэтому оба ограничения двойственной задачи (3.8) ее оптимальным планом $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; x_3^*)$ обращаются в равенства. Кроме того, значениями y_1^* и y_2^* второе ограничение задачи (3.9) обращается в строгое неравенство. Следовательно, в оптимальном плане задачи (3.8) соответствующая ему вторая переменная равна нулю, т. е. $x_2^* = 0$. Учитывая сказанное, для определения x_1^* и x_3^* получаем уравнения $3x_1 + 9x_3 = 1$ и $8x_1 + 6x_3 = 1$, совместное решение которых дает $x_1^* = 3/54$, $x_3^* = 5/54$. Используя формулы (3.2), определяем $p_1^* = 3/8$, $p_2^* = 0$, $p_3^* = 5/8$. Итак, решение игры найдено: $\mathbf{p}^* = (3/8;\ 0;\ 5/8)$, $\mathbf{q}^* = (1/4;\ 3/4)$, $v = 27/4$.

Решение ЗЛП может быть сведено к решению соответствующей матричной игры. Паре симметричных двойственных задач

$$\max f = CX; \qquad AX \le B;\ X \ge 0; \tag{3.10}$$

$$\min \varphi = B^T Y; \qquad Y^T A \ge C^T;\ Y \ge 0, \tag{3.11}$$

где $C = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$,

эквивалентна игра с платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} O & A & -B \\ A^T & O & C^T \\ B^T & -C & O \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Поскольку матрица (3.12) кососимметрическая, то цена игры v равна нулю, а оптимальной для обоих игроков будет одна и та же смешанная стратегия

$$\mathbf{u}^* = (u_1^*; \dots; u_i^*; \dots; u_m^*; u_{m+1}^*; \dots; u_{m+j}^*; \dots; u_{m+n}^*; u_{m+n+1}^*),$$

где $u_{m+n+1}^* > 0$. Компоненты оптимальных планов $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_j^*; \dots; x_n^*)$ и $\mathbf{y}^* = (y_1^*; \dots; y_i^*; \dots; y_m^*)$ задач (3.10) и (3.11) связаны с компонентами оптимальной смешанной стратегии $\mathbf{u}^*$ формулами:

$$x_j^* = -\frac{u_{m+j}^*}{u_{m+n+1}^*} \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_i^* = \frac{u_i^*}{u_{m+n+1}^*} \quad (i = \overline{1, m}). \tag{3.13}$$

Пример 3.4. Найти оптимальные планы пары двойственных ЗЛП путем решения эквивалентной матричной игры, если одна из двойственных задач имеет вид

$$\max f = 3x_1 + 4x_2;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 &\le 21, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Р е ш е н и е. Для данной задачи

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ B^T = \begin{bmatrix} 6 & 21 \end{bmatrix},\ C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Платежная матрица (3.12) эквивалентной игры принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 21 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Известно, что при использовании игроком A (B) оптимальной смешанной стратегии против любой чистой стратегии игрока B (A) его выигрыш (проигрыш) будет не меньше (не больше) цены игры v. В данном случае оба игрока имеют одну и ту же оптимальную смешанную стратегию, а цена игры равна нулю. Поэтому компоненты искомой оптимальной стратегии **u*** являются неотрицательными и удовлетворяют системе

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} & & u_3 + & u_4 - & 6u_5 & \le 0, \\ & & 2u_3 + & 4u_4 - & 21u_5 & \le 0, \\ -u_1 - & 2u_2 & & + & 3u_5 & \le 0, \\ -u_1 - & 4u_2 & & + & 4u_5 & \le 0, \\ 6u_1 + & 21u_2 - & 3u_3 - & 4u_4 & & \le 0, \\ u_1 + & u_2 + & u_3 + & u_4 + & u_5 & = 1. \end{array}\right\} \qquad (3.14)$$

Последнее равенство этой системы следует из определения смешанной стратегии.

Для решения системы (3.14) можно сначала заменить неравенства на равенства и решить систему уравнений. Если для всех переменных получатся неотрицательные значения, то решение игры найдено. Если будет хотя бы одно отрицательное значение, то надо лишь часть неравенств заменить равенствами и решить смешанную систему. Перебрав последовательно все возможные комбинации равенств и неравенств и решив их, мы найдем решение игры, так как, согласно основной теореме теории игр, оно всегда существует.

В нашем случае из уравнений $u_3 + u_4 - 6u_5 = 0$ и $2u_3 + 4u_4 - 21u_5 = 0$ находим $u_3 = 3/2u_5$, $u_4 = 9/2u_5$, а из уравнений $-u_1 - 2u_2 + 3u_5 = 0$, $-u_1 - 4u_2 + 4u_5 = 0$ получаем $u_1 = 2u_5$, $u_2 = 1/2u_5$. Подставляя найденные значения u_1,

u_2, u_3, u_4 в последнее уравнение системы (3.14), определяем $u_5 = 2/19$, а затем получаем $u_1 = 4/19$, $u_2 = 1/19$, $u_3 = 3/19$, $u_4 = 9/19$. Легко проверить, что найденные значения удовлетворяют и уравнению $6u_1 + 21u_2 - 3u_3 - 4u_4 = 0$. Так как $u_k \geq 0$ $(k = \overline{1, 5})$, то они будут компонентами оптимальной смешанной стратегии игроков, т. е. $\mathbf{u}^* = (u_1^*; u_2^*; u_3^*; u_4^*; u_5^*) = (4/19; 1/19; 3/19; 9/19; 2/19)$.

В соответствии с формулами (3.13) при $m = 2$ и $n = 2$ получаем компоненты оптимальных планов $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ двойственных задач: $x_1^* = u_{2+1}^*/u_{2+2+1}^* = u_3^*/u_5^* = 3/19 : 2/19 = 3/2$, $x_2^* = u_4^*/u_5^* = 9/2$, $y_1^* = u_1^*/u_5^* = 2$, $y_2^* = u_2^*/u_5^* = 1/2$. При этом $f_{\max} = \varphi_{\min} = 3 \cdot 3/2 + 4 \cdot 9/2$.

Итак, $\mathbf{x}^* = (3/2;\ 9/2)$, $\mathbf{y}^* = (2;\ 1/2)$, $f_{\max} = \varphi_{\min} = 45/2$.

3.8. Решить матричные игры, заданные приведенными ниже платежными матрицами, сведя их к парам двойственных ЗЛП:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -6 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

и) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

3.9. Выполнить возможные упрощения следующих платежных матриц и найти решения игр, используя графический метод решения соответствующих ЗЛП, к которым сводятся данные игры:

а) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

3.10. Отрасли A и B осуществляют капитальные вложения в четыре объекта. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль отрасли A в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для упрощения задачи принять, что убыток отрасли B равен прибыли отрасли A. Найти оптимальные стратегии отраслей.

3.11. Найти оптимальные планы следующих симметричных двойственных ЗЛП, сводя их к эквивалентным матричным играм, при условии, что известна одна из пары двойственных задач:

а) $\max f = -6x_1 + 5x_2;$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 2, \\ -3x_1 + x_2 &\le 1, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

б) $\max f = 2x_1 - x_2;$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 6, \\ x_1 - 2x_2 &\le 1, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Приближенный метод решения матричных игр. Если точное решение матричной игры оказывается громоздким, можно ограничиться приближенным решением. В частности, когда нижняя чистая цена игры α мало отличается от верхней чистой цены β, иногда пользуются чистыми максиминной и минимаксной стратегиями, принимая их за оптимальные. В противном случае целесообразно использовать метод итераций. В основе этого метода лежит предположение, что игра состоит из большого количества партий и игроки выбирают свои чистые стратегии в очередной партии, руководствуясь накапливающимся опытом уже сыгранных партий и обоснованно полагая, что партнер и дальше будет действовать так, как он действовал до этого момента. Если каждый игрок имеет единственную оптимальную смешанную стратегию, то при неограниченном увеличении числа партий приближенные смешанные стратегии стремятся к оптимальным стратегиям игроков, а средние выигрыши — к цене игры v. Используя ЭВМ, вычислительную процедуру можно значительно ускорить и получить решение игры с любой точностью, даже при матрицах больших размерностей.

Итеративный метод можно рекомендовать для получения приближенного плана больших по размеру ЗЛП, с тем чтобы этот план преобразовать затем в оптимальный с помощью более громоздкой симплексной процедуры.

Проследим за ходом рассуждений игроков, начиная с первой партии, если игра задана платежной матрицей, помещенной в табл. 3.4. Все результаты будем записывать в табл. 3.5.

В первой партии допускаем, что игрок A выбрал некоторую стратегию A_k (например, максиминную). Запишем в первую строку табл. 3.5 все возможные значения $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ выигрыша, которые игрок A может получить при применении игроком B любой из его чистых стратегий B_j. Игрок B ответит той стратегией, при которой

Таблица 3.4

	B_1	…	B_s	…	B_t	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1s}	…	a_{1t}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_k	a_{k1}	…	a_{ks}	…	a_{kt}	…	a_{kn}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_l	a_{l1}	…	a_{ls}	…	a_{lt}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mt}	…	a_{mn}

Таблица 3.5

Номер партии	Игрок A		Игрок B		Приближенные значения цены		
	Стратегия	Накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока B	Стратегия	Накопленный проигрыш при различных стратегиях игрока A	v'_h	v''_h	$v_h^{\text{ср}}$
		B_1 … B_n		A_1 … A_m			
1	A_k	a_{k1} … a_{kn}	B_s	a_{1s} … a_{ms}	v'_1	v''_1	$v_1^{\text{ср}}$
2	A_l	b_{l1} … a_{ln}	B_t	b_{1t} … b_{mt}	v'_2	v''_2	$v_2^{\text{ср}}$
…	…	…	…	…	…	…	…
r	A_p	c_{p1} … c_{pn}	B_q	c_{1q} … c_{mq}	v'_r	v''_r	$v_r^{\text{ср}}$

его проигрыш будет наименьшим. Эта стратегия соответствует наименьшему из элементов a_{k1}, …, a_{kn}. Пусть им будет элемент a_{ks}. Тогда наилучшей для игрока B будет стратегия B_s.

Заполнение первой строки табл. 3.5 завершаем записью значений выигрышей a_{1s}, …, a_{ms}, соответствующих всем возможным стратегиям игрока A. В последние три столбца запишем: v'_h — наименьший из выигрышей игрока A, накопленных за h партий, деленный на число партий h; v''_h — наибольший из проигрышей игрока B, накопленных за h партий, деленный на число партий h; $v_h^{\text{ср}}$ — среднее арифметическое v'_h и v''_h (приближенное значение цены игры).

Во второй партии игрок A предполагает, что игрок B и в данной партии воспользуется стратегией B_s, а поэтому A отвечает стратегией, которая обеспечивает ему при стратегии B_s наибольший выигрыш. Эта стратегия соответствует наибольшему из элементов a_{1s}, …, a_{ms}. Пусть им будет, например, элемент a_{ls}. Тогда наилучшей для игрока A будет чистая стратегия A_l.

Во вторую строку табл. 3.5 запишем суммарные значения выигрыша за первую (при стратегии A_k) и вторую (при стратегии A_l) партии — накопленный выигрыш: $a_{kj} + a_{lj} = b_{lj}$ $(j = \overline{1, n})$. В свою очередь игрок B, анализируя суммарные выигрыши b_{lj} игрока A и предполагая, что A и далее будет пользоваться стратегией A_l, аккумулирующей опыт первых партий (в накопленном выигрыше), выбирает стратегию B_t, отвечающую b_{lt} — наименьшему из элементов b_{lj}. Заканчивая заполнение второй строки табл. 3.5, записываем накопленный проигрыш игрока B за две партии при различных стратегиях игрока A: $b_{it} = a_{is} +$ $(i = \overline{1, m})$. Заполняем и последние три столбца: v_2', v_2'', $v_2^{\text{ср}}$.

Аналогично игроки выбирают свои стратегии в ходе всей игры. Приближенные оптимальные стратегии игроков находят после прекращения итерационного процесса. Предположим, что он закончился на r-й партии и за всю игру стратегия A_l была использована $m(A_l)$ раз, а стратегия B_j — $m(B_j)$ раз. Тогда за вероятности применения стратегий (чистых) принимаются значения частостей:

$$p_i^* = m(A_i)/r \quad (i = \overline{1, m}), \quad q_j^* = m(B_j)/r \quad (j = \overline{1, n}).$$

Приближенное значение цены игры $v \approx v_r^{\text{ср}} = 0{,}5(v_r' + v_r'')$.

Пример 3.5. В матричной игре (табл. 3.6) получить приближения цены игры и оптимальных смешанных стратегий игроков, выполнив 20 итераций.

Таблица 3.6

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	2
A_2	2	5	0
A_3	0	2	5

Решение. Поскольку $\alpha = 2$, $\beta = 4$ и, следовательно, $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки. Решаем игру в смешанных стратегиях.

Пусть в первой партии игрок A избрал стратегию A_1. Выигрыши его при различных стратегиях игрока B составляют 4, 2 или 2. Запишем их в первую строку табл. 3.7.

Игроку B в первой партии выгоднее использовать либо вторую, либо третью стратегию, так как в обоих случаях

Таблица 3.7

Номер партии	Игрок A				Игрок B				Приближенные значения цены		
	Стратегия	Накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока B			Стратегия	Накопленный проигрыш при различных стратегиях игрока A			v'_h	v''_h	$v_h^{\text{ср}}$
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3			
1	A_1	4	2	2	B_2	2	5	2	2	5	7/2
2	A_2	6	7	2	B_3	4	5	7	1	7/2	9/4
3	A_3	6	9	7	B_1	8	7	7	2	8/3	7/3
4	A_1	10	11	9	B_3	10	7	12	9/4	3	21/8
5	A_3	10	13	14	B_1	14	9	12	2	14/5	12/5
6	A_1	14	15	16	B_1	18	11	12	7/3	9/3	8/3
7	A_1	18	17	18	B_2	20	16	14	17/7	20/7	37/14
8	A_1	22	19	20	B_2	22	21	16	19/8	11/4	41/16
9	A_1	26	21	22	B_2	24	26	18	7/3	26/9	47/18
10	A_2	28	26	22	B_3	26	26	23	11/5	13/5	12/5
11	A_1	32	28	24	B_3	28	26	28	24/11	28/11	26/11
12	A_1	36	30	26	B_3	30	26	33	13/6	33/12	59/24
13	A_3	36	32	31	B_3	32	26	38	31/13	38/13	69/26
14	A_3	36	34	36	B_2	34	31	40	17/7	20/7	37/14
15	A_3	36	36	41	B_1	38	33	40	12/5	40/15	38/15
16	A_3	36	38	46	B_1	42	35	40	9/4	21/8	39/16
17	A_1	40	40	48	B_1	46	37	40	40/17	46/17	43/17
18	A_1	44	42	50	B_2	48	42	42	7/3	8/3	5/2
19	A_1	48	44	52	B_2	50	47	44	44/19	50/19	47/19
20	A_1	52	46	54	B_2	52	52	46	23/10	13/5	49/20

его проигрыш будет наименьшим и равняется 2. Условимся в случае равенства выигрышей (проигрышей) при нескольких стратегиях брать стратегию с меньшим индексом. Итак, игрок B выберет стратегию B_2, при которой он проиграет либо 2, либо 5, либо 2 в зависимости от выбора игроком A своей чистой стратегии (см. табл. 3.6). Внесем эти значения в первую строку табл. 3.7 и заполним эту строку до конца: $v_1' = 2 : 1 = 2$, $v_1'' = 5 : 1 = 5$, $v_1^{\text{ср}} = 0{,}5(2 + 5) = 7/2$.

Переходим ко второй партии. Предполагая, что игрок B и во второй партии может воспользоваться стратегией B_2, игрок A выберет стратегию A_2, при которой его выигрыш является наибольшим и равняется 5. При стратегии A_2 игрок A может выиграть либо 2, либо 5, либо 0. Во вторую строку табл. 3.7 записываем выигрыши игрока A в двух партиях, т. е. $4 + 2 = 6$, $2 + 5 = 7$, $2 + 0 = 2$. Игроку B в данной ситуации выгоднее всего применить стратегию B_3, соответствующую наименьшему проигрышу, равному 2. Записываем во вторую строку его суммарные проигрыши в двух первых партиях: $2 + 2 = 4$, $5 + 0 = 5$, $2 + 5 = 7$. В последние три столбца записываем: $v_2' = 2 : 2 = 1$, $v_2'' = 7 : 2 = 7/2$, $v_2^{\text{ср}} = (1 + 7/2) : 2 = 9/4$.

В третьей партии игроку A выгоднее всего применить стратегию A_3, игроку B после этого лучше использовать стратегию B_1 и т. д. После 20 итераций подсчитываем, сколько раз игроки использовали каждую из своих чистых стратегий. Получаем: $m(A_1) = 12$, $m(A_2) = 2$, $m(A_3) = 6$, $m(B_1) = 6$, $m(B_2) = 8$, $m(B_3) = 6$. После этого определяем вероятности применения игроками своих чистых стратегий: $p_1^* = 12/20 = 0{,}6$, $p_2^* = 2/20 = 0{,}1$, $p_3^* = 6/20 = 0{,}3$, $q_1^* = 6/20 = 0{,}3$, $q_2^* = 8/20 = 0{,}4$, $q_3^* = 6/20 = 0{,}3$. Таким образом, приближенными оптимальными смешанными стратегиями игроков будут: $\mathbf{p}^* \approx (0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}3)$, $\mathbf{q}^* \approx (0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}3)$, а приближенное значение цены игры $v \approx v_{20}^{\text{ср}} = 0{,}5(v_{20}' + v_{20}'') = 49/20 = 2{,}45$.

Для сравнения приведем точное решение игры:

$$\mathbf{p}^* = (19/35;\ 6/35;\ 10/35) = (0{,}544;\ 0{,}171;\ 0{,}285),$$
$$\mathbf{q}^* = (9/35;\ 14/35;\ 12/35) = (0{,}257;\ 0{,}400;\ 0{,}343),$$
$$v = 2{,}514.$$

3.12. Выполнив двадцать итераций, найти приближенное решение игр, заданных платежными матрицами в задаче 3.8.

3.13. Для двойственных ЗЛП, заданных в задаче 3.11, составить эквивалентную матричную игру и, сделав тридцать итераций, найти приближенное решение и приближенные планы данных двойственных задач.

3.3. Игры с природой

Игры с природой образуют специальный класс матричных игр, в которых одним из участников является человек или группа лиц, объединенных общностью цели (игрок A), а другим — «природа» (игрок Π). Под термином «природа» подразумевается весь комплекс внешних условий, при которых игроку A приходится принимать решение. Природа безразлична к выигрышу и не стремится обратить в свою пользу промахи игрока A. Игрок A может использовать m стратегий $A_1, \ldots, A_m$, а природа может реализовать n различных состояний $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$. Игроку A могут быть известны вероятности q_j, с которыми природа реализует свои состояния Π_j. Действуя против природы, игрок A может пользоваться как чистыми A_i, так и смешанными $\mathbf{p} = (p_1; \ldots; p_m)$ стратегиями. Если он имеет возможность численно оценить (величиной a_{ij}) последствия применения каждой своей чистой стратегии A_i при любом состоянии Π_j природы, то игру можно задать платежной матрицей (табл. 3.8). При упрощении платежной матрицы игры с природой имеется своя специфика: отбрасывать те или иные состояния природы (стратегии игрока Π) нельзя, так как она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно оно или нет.

При выборе оптимальной стратегии игрока A пользуются различными критериями. При этом опираются как на платежную матрицу, так и на матрицу рисков. *Риском r_{ij} игрока A*, когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии Π_j природы, называется разность между максимальным выигрышем $\max\limits_i a_{ij}$, который он мог бы получить, если бы достоверно знал, что природой будет реализовано именно состояние Π_j, и тем выигрышем a_{ij}, который он получит, используя стратегию A_i, не зная, какое же состояние Π_j природа реализует. Таким образом, элементы r_{ij} матрицы рисков (табл. 3.9) определяются по формуле $r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij} \geq 0$, где β_j — максимально возможный выигрыш игрока A при состоянии Π_j (максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы (табл. 3.8)), т. е. $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$.

Таблица 3.8

	$П_1$	...	$П_n$	p_i
A_1	a_{11}	...	a_{1n}	p_1
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mn}	p_m
β_j	β_1	...	β_n	

Таблица 3.9

	$П_1$	...	$П_n$	r_i
A_1	r_{11}	...	r_{1n}	r_1
...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	...	r_{mn}	r_m
q_j	q_1	...	q_n	

Если вероятности q_j состояний $П_j$ природы известны, то пользуются критериями Байеса и Лапласа. В качестве оптимальной по *критерию Байеса* принимается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j$ $(i = \overline{1, m})$ игрока A, т. е. обеспечивается $\max_i \overline{a_i} = \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j$. Если игроку A представляются в равной мере правдоподобными все состояния $П_j$ природы, то $q_1 = \ldots = q_n = 1/n$ и оптимальной по *критерию Лапласа* считается чистая стратегия A_i, обеспечивающая

$$\max_i \overline{a_i} = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Если вероятности q_j состояний $П_j$ природы неизвестны, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Оптимальной по *критерию Вальда* считается чистая стратегия A_i, при которой наименьший выигрыш $\min_j a_{ij}$ игрока A будет максимальным, т. е. ему обеспечивается $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$. Для смешанных стратегий критерий Вальда формулируется так: оптимальной считается та смешанная стратегия, при которой минимальный средний выигрыш игрока A $\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i$ будет максимальным, т. е. стратегия $\mathbf{p}^*$, найденная из условия $\max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i$.

Оптимальной по *критерию Сэвиджа* считается та чистая стратегия A_i, при которой минимизируется величина r_i максимального риска, т. е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Для смешанных стратегий критерий Сэвиджа формулируется так: оптимальной считается та смешанная стратегия, при которой максимальный средний риск игрока A $\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}p_i$ минимизируется, т. е. стратегия $\mathbf{p}^*$, найденная из условия $\min\limits_{\mathbf{p}}\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij}p_i$.

Оптимальной по *критерию Гурвица* считается чистая стратегия A_i, найденная из условия

$$\max_i(\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma)\max_j a_{ij}), \tag{3.15}$$

где γ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений.

Анализ практических ситуаций проводится по нескольким критериям одновременно, что позволяет глубже исследовать суть явления и выбрать наиболее обоснованное решение.

Пример 3.6. После k лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) необходимо заменить отдельные детали; 3) дальнейшая эксплуатация возможна лишь после капитального ремонта. Накопленный на предприятии опыт свидетельствует о том, что вероятности указанных состояний оборудования составляют соответственно 0,3; 0,6; 0,1. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения: 1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат, равных 2, 6 или 10 ед. в зависимости от состояния оборудования (в затраты включены стоимость ремонта и заменяемых деталей, убытки, связанные с ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования); 2) произвести ремонт при помощи специалистов-ремонтников, что вызовет затраты, равные 10, 4 или 8 ед.; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 14, 12 или 6 ед. Используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Р е ш е н и е. В рассматриваемой ситуации в качестве игрока A выступает руководство предприятия, обладающее тремя стратегиями: A_1 — произвести ремонт своими силами; A_2 — ремонт производят приглашенные специалисты; A_3 — заменить оборудование. Вторым игроком здесь следует считать «природу» $П$ — комплекс внешних условий, в которых функционировало оборудование в течение k лет и которые определили три возможных состояния $П_1$, $П_2$ и $П_3$, указанных в задаче. «Выигрышами» игрока A будут затраты, связанные с реализацией решений (стратегий) A_1, A_2 и A_3 и составляющие платежную матрицу (табл. 3.10).

Таблица 3.10

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\overline{a_i}$	α_i
A_1	–2	–6	–10	–5,2	–10
A_2	–10	–4	–8	–6,2	–10
A_3	–14	–12	–6	–12,0	–14
q_j	0,3	0,6	0,1		
β_j	–2	–4	–6		

Для обоснования рекомендаций руководству предприятия проведем исследование по различным критериям.

Оптимальной по Байесу будет чистая стратегия A_1, так как именно при ней средний выигрыш $\overline{a_i}$ достигает максимального значения: $\max\limits_i \overline{a_i} = \max\limits_i(-5{,}2;\ -6{,}2;\ -12{,}0) = -5{,}2 = \overline{a_1}$ (см. табл. 3.10).

Оптимальной по Вальду чистой стратегией будет A_1 или A_2, так как в этом случае достигается максимин:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i =$$

$$= \max_i(-10;\ -10;\ -14) = -10 = \alpha_1 = \alpha_2.$$

Чтобы воспользоваться критерием Сэвиджа, составим по табл. 3.10 матрицу рисков с элементами $r_{ij} = \max\limits_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ (табл. 3.11).

Таблица 3.11

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	r_i
A_1	0	2	4	4
A_2	8	0	2	8
A_3	12	8	0	12

Так, $r_{11} = \beta_1 - a_{11} = -2 - (-2) = 0$, $r_{12} = \beta_2 - a_{12} = -4 - (-6) = 2$ и т. д.

Оптимальной по Сэвиджу будет чистая стратегия A_1, так как при ней выполняется условие

$$\min_i \max_j r_{ij} = \min_i r_i = \min (4, 8, 12) = 4 = r_1.$$

Для применения критерия Гурвица выберем $\gamma = 0{,}6$, тогда равенство (3.15) примет вид

$$\max_i(0{,}6\min_j a_{ij} + 0{,}4\max_j a_{ij}) = \max_i h_i.$$

Все промежуточные результаты запишем в табл. 3.12. Из последнего столбца этой таблицы видно, что максимальное значение h_i равно –6,8 и соответствует чистой стратегии A_1; она и будет оптимальной по Гурвицу.

Таблица 3.12

	Π_1	Π_2	Π_3	$\min\limits_j a_{ij}$	$0{,}6\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	$0{,}4\max\limits_j a_{ij}$	h_i
A_1	–2	–6	–10	–10	–6,0	–2	–0,8	–6,8
A_2	–10	–4	–8	–10	–6,0	–4	–1,6	–7,6
A_3	–14	–12	–6	–14	–8,4	–6	–2,4	–10,8

Проведенное исследование по совокупности критериев показало, что чаще других оптимальной называлась чистая стратегия A_1; правомерно ее и рекомендовать руководству предприятия для реализации, т. е. произвести ремонт своими силами.

3.14. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет 10—12 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 ед. в расчете на единицу сырья. Придать описанной производственной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу. Дать рекомендации по созданию оптимального запаса сырья на предприятии.

3.15. В новом жилом массиве создается телевизионное ателье для ремонта в стационарных условиях не более 8 тыс. телевизоров в год. Для упрощения примем, что поток заявок на ремонт в условиях стационара выражается числами 2, 4, 6 и 8 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта телевизора составляет 9 ден. ед., потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 ден. ед., а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходятся в 6 ден. ед. в расчете на каждый телевизор. Придав рассматриваемой ситуации игровую схему, составить платежную матрицу. Дать рекомендации о мощности создаваемого телеателье.

3.16. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке *А* повышенной влажности, *Б* средней влажности, *В* сухом. Урожайность картофеля зависит от погодных условий, в частности от количества осадков, выпадающих в течение сезона. Если осадков выпадает меньше нормы, то средняя урожайность на участке *А* составляет 270 ц с 1 га; при количестве осадков, близком к норме, — 220 ц; если же осадков выпадет больше нормы, — 110 ц; на участке *Б* — соответственно 210, 250 и 140 ц; на участке *В* — 120, 260 и 280 ц. Используя игровой подход, составить платежную матрицу. Установить, на каком участке следует выращивать картофель в предстоящем году, если, по данным службы долгосрочного прогнозирования погоды, вероятность выпадения осадков меньше нормы ожидается равной 0,3, близко к норме — 0,6, больше нормы — 0,1.

3.17. Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объем выпуска неосновной сезонной продукции *А* и *Б*. Не проданная в течение сезона часть продукции позднее полностью реализуется по сниженным ценам. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации в зависимости от уровня покупательского спроса приведены в табл. 3.13. Установить объемы выпуска продукции к предстоящему сезону, обеспечивающие предприятию возможно большую сумму прибыли.

Таблица 3.13

Вид продукции	Себестоимость единицы продукции	Отпускная цена единицы продукции		Объем реализации (тыс. ед.), если уровень спроса		
		в течение сезона	после уценки	повышенный	средний	пониженный
А	7	15	12	50	40	30
Б	6	13	9	70	60	50

Указание. Для уменьшения размерности платежной матрицы ограничиться рассмотрением лишь тех трех случаев, когда одновременно на оба вида продукции имеет место либо повышенный, либо средний, либо пониженный спрос.

3.18. Для отопления дома в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 7,5 ден. ед., в мягкую зиму — 8,5, в обычную — 9,0, а в холодную — 9,5 ден. ед. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную требуется 7 т, а в холодную зиму расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества запасенного им с лета угля. При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой. Кроме того, надо учесть, что продать непотребовавшийся уголь возможности не будет. Используя игровой подход, составить платежную матрицу, анализируя которую, дать рекомендации по созданию запаса угля, гарантирующего домовладельцу минимальные затраты.

3.19. Объем реализации товара *Т* за рассматриваемый период времени колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от 4 до 7 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара *Т* равна 2 ден. ед. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере 4 ден. ед. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удасться, то расходы на содержание и хранение остатка составят 3 ден. ед. в расчете на единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара T на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказывание и доставку товара, содержание и хранение остатка.

Указание. Решение найти в чистых стратегиях на основе критериев Байеса ($q_1 = 0{,}15$, $q_2 = 0{,}20$, $q_3 = 0{,}40$, $q_4 = 0{,}25$), Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр γ Гурвица принять равным 0,7).

3.20. На некотором участке предполагается выращивать сельскохозяйственные культуры *I* и *II*. Урожайность культур зависит от ряда факторов, а прибыль сельскохозяйственного предприятия по этим культурам определяется их урожайностью. Для упрощения задачи ограничимся рассмотрением лишь одного из факторов — погодных условий. Значения прибыли, рассчитанные на основе накопившегося опыта для различных погодных условий, приведены в табл. 3.14. Найти оптимальное сочетание площадей под культуры *I* и *II*, обеспечивающее наибольшую прибыль.

Таблица 3.14

Сельскохозяйственная культура	Лето					
	жаркое сухое	жаркое влажное	теплое сухое	теплое влажное	прохладное сухое	прохладное влажное
I	9	7	8	4	5	3
II	5	1	3	3	9	6

3.21. На технологическую линию поступает сырье с малым или большим количеством примесей. В среднем используется 80 % сырья первого вида и 20 % второго. Технологическая линия может работать в четырех режимах. Доход предприятия от единицы продукции, изготовленной из сырья первого вида при различных режимах работы технологической линии, составляет соответственно 1, 2, 5 и 6 ден. ед., а из сырья второго вида — 2, 5, 3 и 1 ден. ед. В каких режимах и сколько времени должна работать технологическая линия, чтобы доход от выпущенной продукции был максимальным?

3.22. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию *I* и *II*. Данные о ее себестоимости, отпускных ценах и объемах реализации приведены в табл. 3.15. На реализацию всей произведенной продукции расходуется 200 ден. ед. Определить ежедневный объем производства продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Таблица 3.15

Вид продукции	Себестоимость единицы продукции, ден. ед.	Отпускная цена, ден. ед.		Объем реализации, ед.	
		в день изготовления	позже	в теплую погоду	в холодную погоду
I	0,8	1,2	0,3	1000	4000
II	0,5	0,8	0,2	6000	1200

4

ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА СЕТЯХ

4.1. Графы. Способы задания графов. Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм Фалкерсона

Чтобы составить наглядное представление о *графе*, достаточно вообразить некоторое множество точек плоскости или пространства и множество отрезков, соединяющих все или некоторые из этих точек. Точки множества называют *вершинами*, а отрезки, их соединяющие, — *дугами*, если указано, какая вершина является начальной, и *ребрами*, если ориентация не указана. Граф, состоящий из дуг, называют *ориентированным (орграфом)*, а образованный ребрами — *неориентированным*. Рассматриваются и *смешанные графы* — графы, состоящие из ребер и дуг. Поскольку вершины графа можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму линий, их соединяющих, один и тот же граф можно изобразить по-разному. В этом проявляется *изоморфизм графа*.

Степенью вершины x_i называют число дуг (ребер), которым она принадлежит (инцидентна). Степень вершины обозначают $P(x_i)$. Для орграфов различают *полустепень захода* $P^+(x_i)$ *вершины* x_i (количество дуг, заходящих в x_i) и *полустепень исхода* $P^-(x_i)$ (количество дуг, исходящих из x_i).

Формально граф G определяется заданием двух множеств X и U, где X — множество вершин, U — множество дуг (ребер).

При большом числе элементов рисунок графа теряет наглядность. В таком случае граф целесообразно задать матричным способом. Этот способ удобен и для анализа графов на ЭВМ. Граф можно задать различными матрицами, выбор которых диктуется особенностями конкретной задачи.

Матрица смежности вершин орграфа — это квадратная матрица n-го порядка (n — число вершин). Строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам графа. Элементы p_{ij} матрицы равны числу дуг, направленных из i-й вершины в j-ю.Если орграф состоит из однократных дуг, то элементы матрицы равны либо 0, либо 1.

В случае неориентированного графа ему вместе с ребром (x_i, x_j) принадлежит и ребро (x_j, x_i), поэтому матрица будет симметрической. Справедливо и обратное утверждение: любой симметрической матрице с целыми неотрицательными элементами можно поставить в соответствие граф.

Матрица смежности дуг орграфа — это квадратная матрица m-го порядка (m — число дуг). Строки и столбцы матрицы соответствуют дугам графа. Элементы q_{ij} равны 1, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j, и 0 в остальных случаях.

Матрицей смежности ребер неориентированного графа является матрица m-го порядка (m — число ребер) с элементами q_{ij}, равными 1, если ребра u_i и u_j имеют общую вершину, и 0 в остальных случаях.

Матрица инциденций (инцидентности) орграфа — это прямоугольная матрица размерности $n \times m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы—дугам орграфа. Элементы r_{ij} равны 1, если дуга u_j исходит из i-й вершины; –1, если дуга заходит в i-ю вершину; 0, если дуга не инцидентна i-й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут лишь 1 и 0.

Пример 4.1. Для графа, изображенного на рис. 4.1, составить матрицу смежности вершин и определить полустепени захода и исхода вершин.

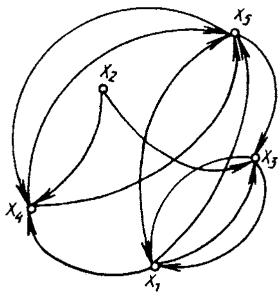


Рис. 4.1

Решение. Граф содержит пять вершин, поэтому матрица будет пятого порядка (табл. 4.1). Из вершины x_1 идет по одной дуге в вершины x_3 и x_4 и две дуги в вершину x_5, поэтому элементы p_{13} и p_{14} матрицы равны 1, а $p_{15} = 2$. Поскольку других дуг с начальной вершиной x_1 не существует, остальные элементы первой строки матрицы равны 0. Рассуждая аналогично, можно найти и все остальные элементы матрицы. Полустепени захода (исхо-

Таблица 4.1

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$P^-(x_i)$
x_1	0	0	1	1	2	4
x_2	0	0	1	1	0	2
x_3	2	0	0	0	0	2
x_4	0	0	0	0	2	2
x_5	0	0	1	1	0	2
$P^+(x_i)$	2	0	3	3	4	

да) вершин определяются суммированием элементов столбцов (строк) составленной матрицы.

Пример 4.2. По данной матрице построить наглядное изображение графа:

а) матрица смежности вершин

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

б) матрица смежности дуг

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. а) Поскольку данная матрица является симметрической матрицей четвертого порядка с неотрицательными элементами, то ей соответствует неориентированный граф с четырьмя вершинами. Расположив вершины x_1, ..., x_4 на плоскости произвольным образом (рис. 4.2), соединяем их с учетом кратности ребер. Так,

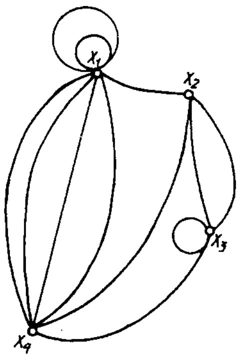


Рис. 4.2

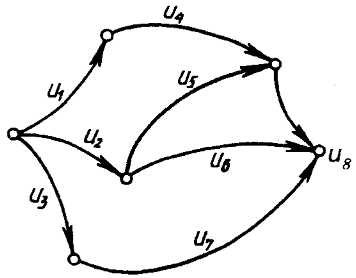


Рис. 4.3

элемент $p_{11} = 2$, поэтому вершина x_1 инцидентна двум ребрам, начала и концы которых совпадают с этой вершиной (петли). Поскольку $p_{12} = 1$, то вершины x_1 и x_2 соединены одним ребром. Так как $p_{13} = 0$, то ребра (x_1, x_3) не существует (вершины x_1 и x_3 не соединяются). Вершины x_1 и x_4 соединяются тремя ребрами и т. д.

б) Три первых столбца матрицы состоят из нулей. Это означает, что у дуг u_1, u_2 и u_3 нет непосредственно предшествующих дуг, а потому их можно изобразить исходящими из одной общей вершины. Элемент $q_{14} = 1$. Это означает, что за дугой u_1 непосредственно следует дуга u_4 (рис. 4.3). По аналогичной причине за дугой u_2 идут дуги u_5 и u_6, а за u_3 — дуга u_7. При изображении этих дуг на рисунке необходимо учесть, что дуге u_8 непосредственно предшествуют дуги u_4 и u_5 (в матрице $q_{48} = 1$ и $q_{58} = 1$), следовательно, u_4 и u_5 должны оканчиваться общей вершиной, из которой и исходит дуга u_8. Ввиду того, что последние три строки матрицы состоят только из нулей, дуги u_6, u_7 и u_8 не имеют следующих непосредственно за ними дуг. По этой причине их можно направить в одну общую вершину.

Важной является задача упорядочения элементов графа. Под *упорядочением вершин* связного орграфа без контуров понимают такое разбиение его вершин на группы (ранги, слои), при котором:

1) вершины первой группы не имеют предшествующих, а вершины последней — последующих;

2) вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе;

3) вершины одной и той же группы дугами не соединены.

Аналогичным образом вводится понятие *упорядочения дуг*. В результате упорядочения элементов получают граф, изоморфный данному. Упорядочение элементов можно выполнить графическим или матричным способом.

Пример 4.3. Дуги орграфа, приведенного на рис. 4.4, *а*, упорядочить графическим способом.

Решение. *Алгоритм Фалкерсона* упорядочения дуг состоит в следующем: 1) найти дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют I группу); 2) вычеркнуть найденные дуги; после этого появится по крайней мере одна новая дуга, не имеющая непосредственно предшествующей (в графе без дуг I группы). Такие дуги составят II группу. Повторять этот шаг, пока все дуги не будут разбиты на группы.

В нашем примере к I группе относятся дуги u_2, u_4 и u_6. После их вычеркивания непосредственно предшествующих не будут иметь дуги u_5 и u_8 (это дуги II группы). К III группе отойдут дуги u_1 и u_3 и к IV группе — дуга u_7.

На рис. 4.4, *б* изображены группы упорядоченных дуг в новых обозначениях v_1, ..., v_8. Штриховыми линиями показаны связи между дугами, существующие в исходном орграфе. На рис. 4.4, *в* изображен орграф с упорядоченными дугами, изоморфный данному.

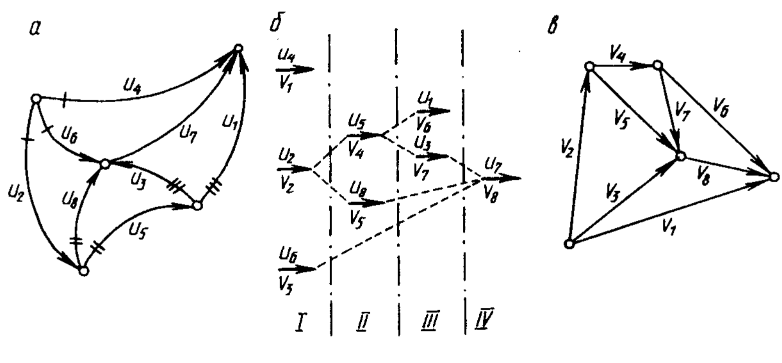


Рис. 4.4

Пример 4.4. Для изображенного на рис. 4.5, *а* орграфа построить изоморфный граф с упорядоченными вершинами.

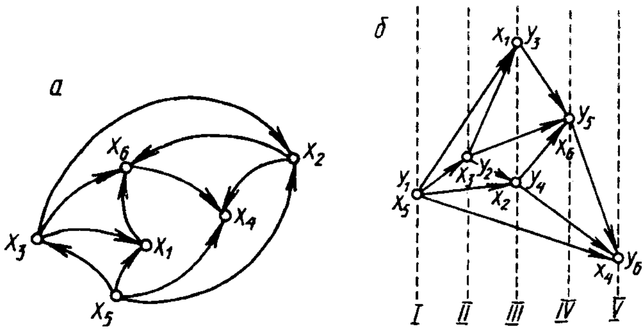


Рис. 4.5

Р е ш е н и е. Используем матричный способ упорядочения. Прежде всего составим для данного орграфа матрицу смежности вершин (табл. 4.2) и обозначим через $\mathbf{v}_{x_1}, \ldots, \mathbf{v}_{x_6}$ ее вектор-строки. Далее вычислим компоненты вектора $\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{v}_{x_i}$, представляющие собой полустепени захода вершин графа. Полустепень захода вершины x_5 оказалась равной 0. Значит, в вершину x_5 не заходит ни одна дуга. Следовательно, эта вершина не имеет предшествующих; она образует I группу. Исключив из

Т а б л и ц а 4.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\mathbf{v}_{x_i}$	Группа
x_1	0	0	0	0	0	1	$\mathbf{v}_{x_1}$	III
x_2	0	0	0	1	0	1	$\mathbf{v}_{x_2}$	III
x_3	1	1	0	0	0	1	$\mathbf{v}_{x_3}$	II
x_4	0	0	0	0	0	0	$\mathbf{v}_{x_4}$	V
x_5	1	1	1	1	0	0	$\mathbf{v}_{x_5}$	I
x_6	0	0	0	1	0	0	$\mathbf{v}_{x_6}$	IV
$\mathbf{v}_1$	2	2	1	3	0	3		
$\mathbf{v}_2$	1	1	0	2	–	3		
$\mathbf{v}_3$	0	0	–	2	–	2		
$\mathbf{v}_4$	–	–	–	1	–	0		
$\mathbf{v}_5$	–	–	–	0	–	–		

рассмотрения вершину x_5 и дуги, из нее исходящие, вычислим компоненты вектора $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{x_5}$. Здесь нулевая компонента соответствует вершине x_3. Значит, вершина x_3 в графе без вершины x_5 и дуг, исходящих из нее, не имеет предшествующих и образует, таким образом, II группу. Так продолжаем до получения вектора, у которого есть часть нулевых компонент, а остальные вычеркнуты. В нашем случае последним оказался вектор $\mathbf{v}_5$. На рис. 4.5, *б* изображен орграф, изоморфный данному, но с упорядоченными вершинами, которые получили новые обозначения $y_1, \ldots, y_6$.

4.1. Для данных графов (рис. 4.6) составить матрицы смежности вершин, смежности дуг (ребер), инциденций.

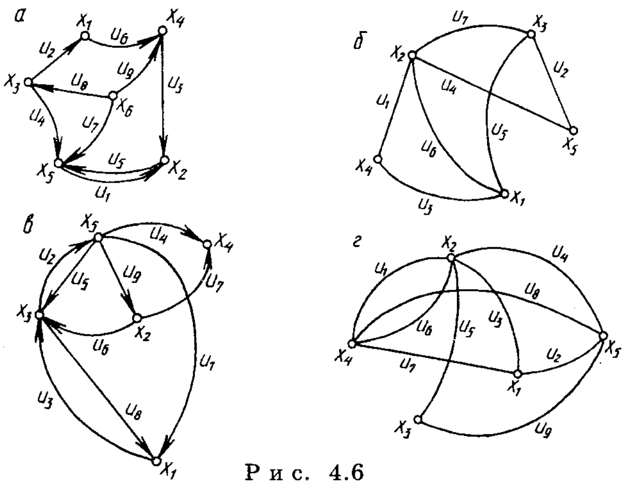


Рис. 4.6

В задачах 4.2—4.4 по матрицам смежности вершин построить наглядные изображения графов.

4.2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **4.3.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4.4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

В задачах 4.5, 4.6 по матрицам смежности дуг построить наглядные изображения графов.

4.5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

4.6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

4.7. Упорядочить вершины и дуги орграфов, изображенных на рис. 4.7, *а—г*, графическим и матричным способами. Построить наглядные изображения изоморфных графов.

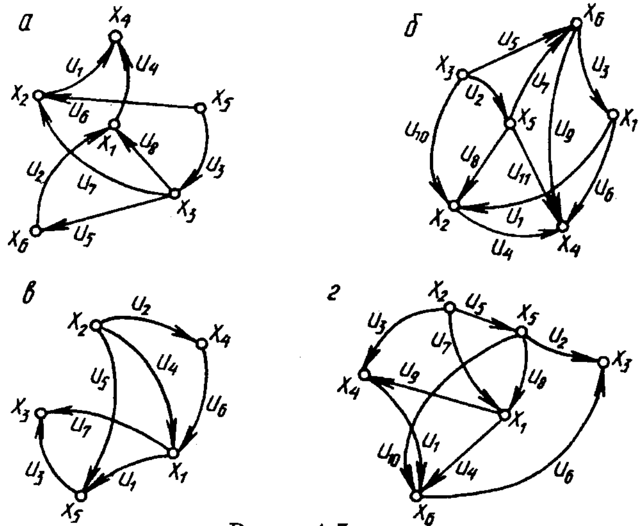


Рис. 4.7

В задачах 4.8—4.11 упорядочить вершины орграфа, заданного матрицей смежности вершин, и построить наглядное изображение изоморфного графа.

4.8. $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

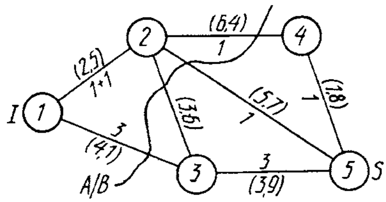
4.9. $$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

4.10. $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}.$$

4.11. $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

4.2. Сети. Потоки на сетях. Задача о максимальном потоке и ее приложения

Сеть — это конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины I, являющейся *входом (истоком) графа*, к вершине S, являющейся *выходом (стоком) графа* (рис. 4.8).



Р и с. 4.8

Для наглядности будем представлять, что по ребрам (i, j), где $i < j$, из истока I в сток S направляется некоторое вещество (груз, ресурс, информация и т. п.).

Максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i, j), называется его *пропускной способностью*. В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если вершины k и l на сети не соединены, то $r_{kl} = r_{lk} = 0$. На рис. 4.8 пропускные способности ребер указаны в скобках: первое число — это пропускная способность в направлении от вершины i к вершине j, второе — в противоположном направлении.

Пропускные способности ребер сети можно задать квадратной матрицей n-го порядка (n — число вершин сети). Поскольку $r_{ii} = 0$, то главная диагональ матрицы состоит из нулей. В табл. 4.3 приведена матрица R пропускных способностей сети, изображенной на рис. 4.8.

Т а б л и ц а 4.3

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	2	4	0	0
2	5	0	3	6	5
3	1	6	0	0	3
4	0	4	0	0	1
5	0	7	9	8	0

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро (i, j) в единицу времени, называется *потоком по ребру* (i, j). В теории потоков предполагается, что если из вершины i в вершину j направляется поток величиной x_{ij}, то величина потока из j в i равна $-x_{ij}$, т. е.

$$x_{ji} = -x_{ij}. \tag{4.1}$$

Принимается также, что $x_{ii} = 0$.

Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем ребрам (i, j) сети называют *потоком по сети* или просто *потоком*.

Поток по каждому ребру не превышает его пропускную способность:

$$x_{ij} \le r_{ij} \ (i, j = \overline{1, n}). \tag{4.2}$$

Количество вещества, притекающее в вершину, равно количеству вещества, вытекающего из нее:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 \ (i \ne I, S). \tag{4.3}$$

Формируя поток на сети, необходимо учитывать свойства (4.1)—(4.3).

Пример 4.5. Сформировать какой-либо поток на сети, изображенной на рис. 4.8. Записать построенный поток в матричной форме.

Решение. Рассмотрим, например, полный путь *1—2—4—5*. Ребро (*4, 5*) этого пути не позволяет пропустить по нему поток, мощность которого превышает единицу. По полному пути *1—2—5* можно было бы пропустить 2 ед. Однако по ребру (*1, 2*) уже предусмотрен поток в 1 ед. Учитывая это, пропускаем по пути *1—2—5* дополнительно 1 ед. Рассматривая полный путь *1—3—5*, замечаем, что по нему можно пропустить 3 ед. (здесь лимитирующим является ребро (*3, 5*)). Таким образом, мы организовали на сети поток, мощность f которого можно подсчитать, просуммировав либо потоки x_{Ij} по ребрам (I, j), исходящим из истока I (у нас из вершины *1*): $x_{12} + x_{13} = 2 + 3 = 5$, либо потоки x_{iS} по ребрам (i, S), заходящим в сток S (у нас в вершину *5*): $x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 + 3 + 1 = 5$. Числа x_{ij} образуют квадратную матрицу 5-го порядка, на главной диагонали которой стоят нули ($x_{ii} = 0$), а элементы, расположенные симметрично главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (см. соглашение (4.1)). На основании этих соображений и построена матрица сформированного потока (табл. 4.4).

Таблица 4.4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	2	3	0	0
2	–2	0	0	1	1
3	–3	0	0	0	3
4	0	–1	0	0	1
5	0	–1	–3	–1	0

Чтобы ответить на вопрос: будет ли этот поток максимальным, необходимо дополнительное исследование.

Из свойств потоков по ребрам сети следует, что общее количество вещества, исходящего из истока I, совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток S, т. е.

$$f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}. \tag{4.4}$$

Линейную функцию (4.4) называют *мощностью потока на сети*.

Возникает следующая ЗЛП о максимальном потоке: найти совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков x_{ij} по всем ребрам (i, j) сети, которая удовлетворяет условиям (4.1)—(4.3) и максимизирует функцию (4.4).

Чтобы привести алгоритм решения этой задачи, потребуются некоторые важные понятия. Предположим, что дана некоторая сеть. Разобьем множество вершин этой сети на два непересекающихся подмножества A и B так, чтобы исток I попал в подмножество A, а сток S — в подмножество B. В этом случае говорят, что на сети произведен разрез, отделяющий исток I от стока S. Точнее: совокупность ребер (i, j), начальные вершины которых принадлежат подмножеству A, а конечные — подмножеству B, называют *разрезом сети* и обозначают A/B. На рис. 4.8 показан разрез A/B, при котором вершины сети оказались разбитыми на подмножества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$, а ребрами, образующими разрез, стали $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ и $(2, 5)$.

Если на сети задан некоторый поток $X = \{x_{ij}\}$, то ребро (i, j) называют *насыщенным*, если поток x_{ij} по нему совпадает с его пропускной способностью r_{ij} $(x_{ij} = r_{ij})$, и *ненасыщенным*, если поток меньше пропускной способности $(x_{ij} < r_{ij})$. Так, на рис. 4.8 ребро $(1, 2)$ насыщенное, как и ребра $(4, 5)$, $(3, 5)$, а все остальные ребра ненасыщенные.

Величина

$$R(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij},$$

представляющая собой сумму пропускных способностей r_{ij} всех ребер разреза, называется *пропускной способностью разреза.* Для разреза на рис. 4.8 $R(A/B) = 4 + 3 + 5 + 6 = 18$.

Величина

$$X(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij},$$

представляющая собой сумму потоков x_{ij} по всем ребрам разреза, называется *потоком через разрез.*

Для разреза на рис. 4.8 $X(A/B) = 3 + 0 + 1 + 1 = 5$.

В приложениях имеет важное значение *теорема Форда—Фалкерсона:* на любой сети максимальная величина потока из истока I в сток S равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего I от S.

Приведем алгоритм построения максимального потока.

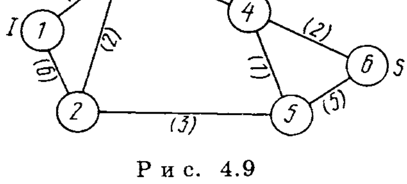
1. Построить некоторый начальный поток $X^0 = \{x_{ij}^0\}$.

2. Организовать процедуру составления подмножества A вершин, достижимых из истока I по ненасыщенным ребрам. Если в этом процессе сток S не попадет в подмножество A, то построенный поток максимальный и задача решена. Если же S попал в A, то перейти к п. 3 алгоритма.

3. Выделить путь из I в S, состоящий из ненасыщенных ребер, и увеличить поток x_{ij} по каждому ребру этого пути на $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берется по ребрам (i, j) упомянутого пути. Тем самым будет построен новый поток $X^1 = \{x_{ij}^1\}$. После этого надо возвратиться к п. 2 алгоритма.

Пример 4.6. На сети, изображенной на рис. 4.9, сформировать поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S, при условии, что пропускные способности ребер в обоих направлениях одинаковы. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

Р е ш е н и е. В соответствии с п. 1 алгоритма на сети необходимо сформировать начальный поток X^0. Сделаем



Р и с. 4.9

это, например, следующим образом. По пути *1—3—4—6* пропустим 1 ед., по пути *1—2—3—4—6* — 1 ед., по пути *1—2—5—6* — 3 ед. В результате потоки x_{ij} по ребрам сети будут равны: $x_{12} = 4$, $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{25} = 3$, $x_{34} = 2$, $x_{46} = 2$, $x_{56} = 3$; потоки по остальным ребрам сети равны нулю. Совокупность перечисленных потоков по ребрам и составит поток X^0 по сети. Легко видеть, что условия (4.2) и (4.3), налагаемые на потоки по ребрам сети, выполняются. Матрица пропускных способностей ребер данной сети приведена в табл. 4.5, а матрица построенного потока — в табл. 4.6.

Таблица 4.5

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	6	1	0	0	0
2	6	0	2	0	3	0
3	1	2	0	3	0	0
4	0	0	3	0	1	2
5	0	3	0	1	0	5
6	0	0	0	2	5	0

Таблица 4.6

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	4	1	0	0	0
2	–4	0	1	0	3	0
3	–1	–1	0	2	0	0
4	0	0	–2	0	0	2
5	0	–3	0	0	0	3
6	0	0	0	–2	–3	0

Приступая к выполнению п. 2 алгоритма, составим матрицу $R—X^0$ (табл. 4.7), элементы $r_{ij} - x_{ij}$ которой позволяют судить о ненасыщенности ребер сети. Насыщенным ребрам будут соответствовать нулевые элементы, а ненасыщенным — ненулевые. Так, ребро (*1, 2*) ненасыщенное, поэтому элемент $r_{12} - x_{12}^0 = 6 - 4 = 2 \neq 0$, а вот ребро (*2, 5*) насыщенное, поэтому $r_{25} - x_{25}^0 = 3 - 3 = 0$.

Таблица 4.7

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	2	0	0	0	0
2	10	0	1	0	0	0
3	2	3	0	1	0	0
4	0	0	5	0	1	0
5	0	6	0	1	0	2
6	0	0	0	4	8	0

Зная матрицу $R—X^0$, можно сформировать подмножество A вершин, в которые можно попасть из истока I, двигаясь только по ненасыщенным путям (т. е. выполнить п. 2 алгоритма), а также выделить (если поток X^0 немаксимален) эти пути и с их помощью увеличить мощность потока (т. е. выполнить п. 3 алгоритма).

Вершины подмножества A выделяют постепенно, начиная с истока I. С этой целью просматривают первую строку матрицы $R - X^0$ (строку I) и выписывают номера $i_1, i_2, \ldots, i_k$ вершин, соответствующих ненулевым элементам строки. Это и будут вершины, в которые можно попасть из истока I, перемещаясь по ненасыщенным ребрам. Будем записывать выявленные таким образом вершины в виде $I \| i_1, i_2, \ldots, i_k$ и называть подобную запись *списком вершины* I. Далее рассматривают каждую из вершин i_t полученного списка и составляют для нее аналогичным образом свой список. При этом вершины, встречавшиеся в прежних списках, повторно не выписываются. Если в этом процессе сток S не встретится, — поток максимален и задача решена, если же при составлении очередного списка в нем появится сток S, то поток немаксимален и мощность его можно увеличить.

Обратимся к нашему примеру. В данном случае $I = 1$, $S = 6$. Построим подмножество A, последовательно составляя списки вершин, начиная с вершины *1*. Судя по первой строке матрицы $R—X^0$ (см. табл. 4.7), в список вершины *1* войдет одна вершина *2*, поскольку только элемент второго столбца этой строки отличен от нуля. Итак, запишем: *1* || *2*. Теперь переходим к составлению списка вершины *2* как вершины, вошедшей в список вершины *1*. Во второй строке матрицы два элемента отличны от нуля: 10 и 1. Но 10 соответствует вершине *1*, которая уже значится в подмножестве A, поэтому повторно ее в списки не включаем. Элемент 1 соответствует вершине *3*, она встречается впервые, а потому включаем ее в список вершины *2*. Таким образом приходим к следующему списку: *2* || *3*. Рассуждая аналогично, получаем и остальные списки. В результате имеем набор:

$$\boxed{1 \| 2},\ \boxed{2 \| 3},\ \boxed{3 \| 4},\ \boxed{4 \| 5},\ \boxed{5 \| 6}. \qquad (4.5)$$

Анализируя списки (4.5), замечаем, что сток *6* попал в подмножество A, поскольку оказался в списке одной из вершин подмножества A (в данном случае вершины *5*). Значит, существует путь из истока I в сток S (у нас из *1* в *6*), состоящий из ненасыщенных ребер.

Продолжим детализацию алгоритма. Построение ненасыщенного пути из I в S начинают с последнего ребра этого пути. Им будет ребро (i_{n-1}, S), где i_{n-1} — вершина, в список которой попал сток S. Далее выписывают ребро (i_{n-2}, i_{n-1}), где i_{n-2} — вершина, в список которой попала вершина i_{n-1}, и так до тех пор, пока на очередном шаге не встретится ребро (I, i_1), которым и начинается искомый ненасыщенный путь. Таким образом, ненасыщенный путь из I в S состоит из ребер (I, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_{n-2}, i_{n-1}), (i_{n-1}, S).

Вернемся к нашему примеру. Просматривая списки (4.5) от конца к началу, замечаем, что ребром (i_{n-1}, S) в данном случае является ребро (*5*, *6*), ребром (i_{n-2}, i_{n-1}) — ребро (*4*, *5*), ..., и, наконец, ребром (I, i_1) — ребро (*1*, *2*). Таким образом, путь из истока *1* в сток *6* по ненасыщенным ребрам пройдет через вершины *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*.

После выделения ненасыщенного пути из истока I в сток S остается с помощью матрицы $R—X^0$ определить величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, на которую нужно увеличить поток по каждому ребру (i, j) выделенного пути, чтобы получить новый поток X^1 большей мощности (на Δ единиц).

В нашем примере, как видно из табл. 4.7, по ребру (*1*, *2*) дополнительно можно пропустить 2 ед., по ребрам (*2*, *3*), (*3*, *4*), (*4*, *5*) и (*5*, *6*) — соответственно 1, 1, 1 и 2 ед., так что увеличить поток по всему пути *1—2—3—4—5—6*, составленному из указанных ненасыщенных ребер, можно на величину

$$\Delta = \min_{1-2-3-4-5-6}(2, 1, 1, 1, 2) = 1.$$

Для построения матрицы нового потока X^1 к соответствующим элементам x_{ij}^0 матрицы X^0 прибавляется найденное значение Δ, после чего возвращаются к п. 2 алгоритма, и так до получения максимального потока.

В рассматриваемом примере на величину $\Delta = 1$ возрастут элементы x_{12}^0, x_{23}^0, x_{34}^0, x_{45}^0 и x_{56}^0 матрицы X^0 (см.

табл. 4.6). С учетом соглашения (4.1) приходим к матрице нового потока X^1 (табл. 4.8). Мощность этого потока стала равной 5 + 1 = 2 + 4 = 6 ед.

Построенный поток X^1 вновь надо исследовать на оптимальность, т. е. вернуться к операциям п. 2 алгоритма. С этой целью, как и при исследовании потока X^0, составляем матрицу R—X^1 (табл. 4.9), а по ней — списки вершин, достижимых из истока *1* по ненасыщенным путям. В результате получаем такие списки:

$$\boxed{1 \,\|\, 3}\,, \boxed{3 \,\|\, .}\,. \qquad (4.6)$$

Таблица 4.8

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	5	1	0	0	0
2	–5	0	2	0	3	0
3	–1	–2	0	3	0	0
4	0	0	–3	0	1	2
5	0	–3	0	–1	0	4
6	0	0	0	–2	–4	0

Таблица 4.9

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	11	0	0	0	0	0
3	2	4	0	0	0	0
4	0	0	6	0	0	0
5	0	6	0	2	0	1
6	0	0	0	4	9	0

Как видно из списков (4.6), сток *6* не попал в список вершин, достижимых из *1* по ненасыщенным ребрам. Значит, поток X^1 максимален. Остается нанести его на сеть с указанием направления потоков по отдельным ребрам (рис. 4.10).

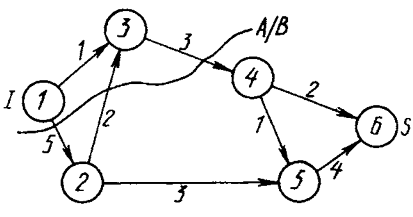
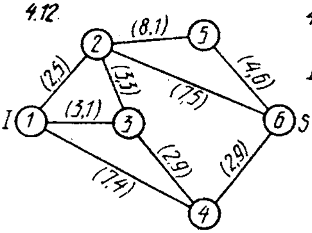


Рис. 4.10

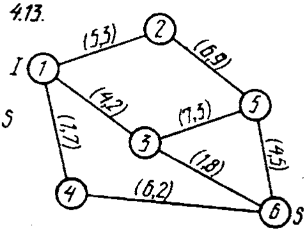
Используя списки (4.6), выделим подмножества A и B, на которые оказалось разбито множество всех вершин: $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$. А теперь выпишем ребра, образующие разрез A/B минимальной пропускной способности: (*1*, *2*), (*3*, *2*) (*3*, *4*).

В задачах 4.12, 4.13 составить матрицу R пропускных способностей ребер сети.

4.12.



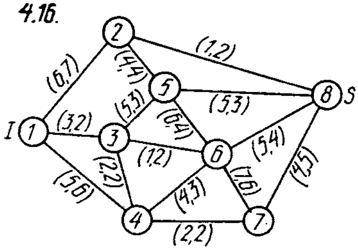
4.13.



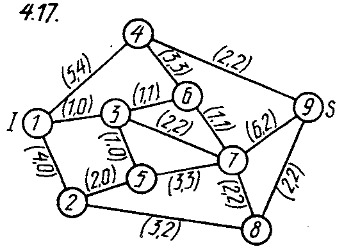
4.14, 4.15. На сетях к задачам 4.12, 4.13 соответственно сформировать какой-либо поток X^0, направленный из истока I в сток S, и составить матрицу этого потока. Построить матрицу $R-X^0$ и установить с ее помощью, какие ребра сети оказались насыщенными и какие — ненасыщенными.

В задачах 4.16—4.21 на сети с истоком I и стоком S построить поток максимальной мощности. Выписать ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.

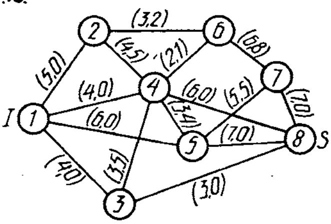
4.16.



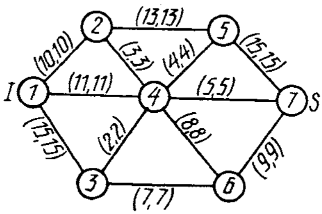
4.17.



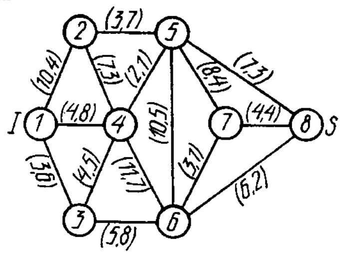
4.18.



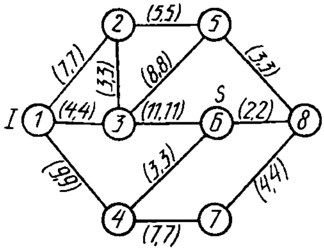
4.19.



4.20.



4.21.



Рассмотрим некоторые приложения задачи о максимальном потоке.

Пример 4.7 (транспортная задача по критерию времени). В табл. 4.10 указаны запасы a_i некоторого однородного груза, находящегося у поставщиков A_i ($i = \overline{1, 3}$). Этот груз необходимо доставить за минимальное время получателям B_j, потребности b_j ($j = \overline{1, 3}$) которых известны. В таблице приведены и продолжительности t_{ij} доставки груза (независимо от объема поставки) каждым поставщиком A_i каждому потребителю B_j. Составить реализуемый за минимальное время план перевозок, при котором спрос потребителей удовлетворяется полностью.

Таблица 4.10

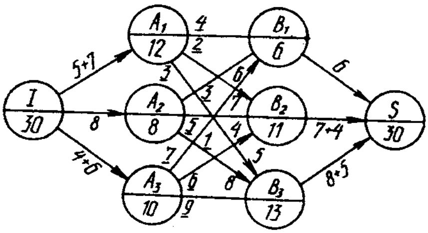
a_i \ b_j	6	11	13
12	4	2	3
8	3	5	1
10	7	6	9

Решение. Сразу же заметим, что в нашем примере общий запас груза равен суммарному спросу, а потому потребности всех получателей груза удовлетворить можно (закрытая задача). В случае отсутствия отмеченного равенства (открытая задача) предварительно вводят фиктивного поставщика (потребителя) с запасом (спросом) груза, равным небалансу, и формально сводят задачу к закрытой.

Чтобы свести решение рассматриваемой задачи к задаче о максимальном потоке, построим сеть, в которой три вершины будут соответствовать поставщикам A_1, A_2 и A_3, три — потребителям B_1, B_2 и B_3, одна — истоку I и одна — стоку S (рис. 4.11). Пропускные способности ребер положим равными:

$$r_{IA_i} = a_i,\ r_{A_iI} = 0,\ \ r_{B_jS} = b_j,\ \ r_{SB_j} = 0,\ r_{A_iB_j} = r_{B_jA_i} = \infty.$$

У ребер (A_i, B_j) укажем времена t_{ij} доставки груза. Время доставки по маршрутам $I — A_i$ и $B_j — S$ примем равным нулю. Ради большей наглядности на рис. 4.11 пропускные способности и некоторые времена не указаны, а времена доставки по маршрутам (A_i, B_j) подчеркнуты снизу, чтобы отличить их от потоков x_{ij} по ребрам сети.



Р и с. 4.11

После построения сети возникает задача формирования потока мощностью в 30 ед. (суммарный запас груза, который следует пропустить по сети), проходящего через сеть за минимальное время.

В соответствии с алгоритмом задачи о максимальном потоке построим на сети начальный поток X^0. Поскольку минимизировать следует время доставки груза, естественно загружать в первую очередь ребра со сравнительно непродолжительными временами доставки. Из рис. 4.11 видно, что по ребру (A_2, B_3) время доставки $t_{23} = 1$ меньше других, поэтому пропустим по пути $I — A_2 — B_3 — S$, включающему это ребро, например, 8 ед. Следующим можно загрузить, например, ребро (A_1, B_3) с $t_{13} = 3$, пропустив по пути $I — A_1 — B_3 — S$ 5 ед. Тем самым спрос потребителя B_3 будет удовлетворен полностью. Далее целесообразно загрузить 7 единицами ребро (A_1, B_2) с $t_{12} = 2$

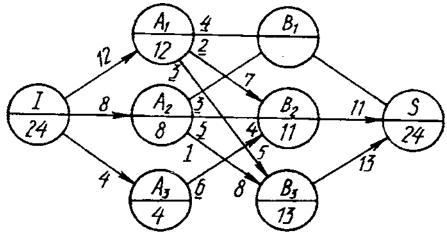


Рис. 4.12

в результате пропуска 7 ед. по пути $I—A_1—B_2 — S$. При этом будет полностью исчерпан запас груза в пункте A_1. Завершение процесса формирования потока X^0 можно проследить по рис. 4.11. Величины потоков по ребрам указаны рядом со стрелками, обозначающими направления этих потоков.

Анализируя построенный поток X^0 (мощностью в 30 ед.), замечаем, что время наиболее продолжительной перевозки равно 7 ед. и соответствует маршруту $A_3—B_1$. Вместе с тем в пункт B_1 груз можно доставить либо из A_2 за 3 ед. времени, либо из A_1 за 4 ед. времени, т. е. быстрее, нежели из A_3. Возникает предположение о том, что использование какого-либо из этих маршрутов позволит заменить маршрут $A_3—B_1$.

Исключим маршрут $A_3—B_1$ и маршруты, для которых $t_{ij} \geq 7$, сохранив распределение потоков на оставшихся ребрах прежним. В нашем случае кроме $A_3—B_1$ придется исключить маршрут $A_3—B_3$ с $t_{33} = 9$. В результате мощность оставшегося на сети потока X^1 составит 24 ед. (рис. 4.12).

Теперь в соответствии с алгоритмом задачи о максимальном потоке следует увеличить мощность потока (в данном случае до 30 ед.). С этой целью построены матрицы R, X^1 и $R—X^1$ (табл. 4.11—4.13).

По табл. 4.13 составлены списки вершин, достижимых из истока I по ненасыщенным путям:

$$\boxed{I \,\|\, A_3},\ \boxed{A_3 \,\|\, B_2},\ \boxed{B_2 \,\|\, A_1, A_2},\ \boxed{A_1 \,\|\, B_1, B_3},$$
$$\boxed{A_2 \,\|\, .},\ \boxed{B_1 \,\|\, S}.$$

Поскольку сток S попал в список, то мощность потока, действительно, можно увеличить. Для определения ве-

Таблица 4.11

	I	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	S
I	0	12	8	10	0	0	0	0
A_1	0	0	0	0	∞	∞	∞	0
A_2	0	0	0	0	∞	∞	∞	0
A_3	0	0	0	0	0	∞	∞	0
B_1	0	∞	∞	0	0	0	0	6
B_2	0	∞	∞	∞	0	0	0	11
B_3	0	∞	∞	0	0	0	0	13
S	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4.12

	I	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	S
I	0	12	8	4	0	0	0	0
A_1	–12	0	0	0	0	7	5	0
A_2	–8	0	0	0	0	0	8	0
A_3	–4	0	0	0	0	4	0	0
B_1	0	0	0	0	0	0	0	0
B_2	0	–7	0	–4	0	0	0	11
B_3	0	–5	–8	0	0	0	0	13
S	0	0	0	0	0	–11	–13	0

Таблица 4.13

	I	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	S
I	0	0	0	6	0	0	0	0
A_1	12	0	0	0	∞	∞	∞	0
A_2	8	0	0	0	∞	∞	∞	0
A_3	4	0	0	0	0	∞	0	0
B_1	0	∞	∞	0	0	0	0	6
B_2	0	∞	∞	∞	0	0	0	0
B_3	0	∞	∞	0	0	0	0	0
S	0	0	0	0	0	11	13	0

личины Δ дополнительного потока по составленным спискам формируется цепочка ненасыщенных ребер: (I, A_3), (A_3, B_2), (B_2, A_1), (A_1, B_1), (B_1, S), ведущая в сток S, и по ребрам этой цепочки на основании табл. 4.13 определяется $\Delta = \min(6, \infty, \infty, \infty, 6) = 6$.

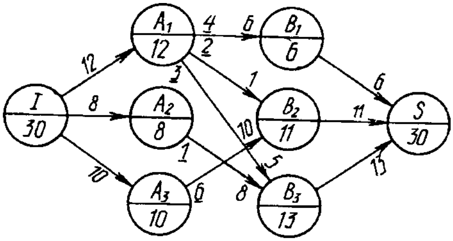


Рис. 4.13

Увеличивая на 6 ед. потоки по ребрам указанной цепочки (в табл. 4.12), приходим к новому потоку X^2, матрица которого представлена табл. 4.14, а сеть, несущая этот поток, изображена на рис. 4.13.

Таблица 4.14

	I	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	S
I	0	12	8	10	0	0	0	0
A_1	–12	0	0	0	6	1	5	0
A_2	–8	0	0	0	0	0	8	0
A_3	–10	0	0	0	0	10	0	0
B_1	0	–6	0	0	0	0	0	6
B_2	0	–1	0	–10	0	0	0	11
B_3	0	–5	–8	0	0	0	0	13
S	0	0	0	0	–6	–11	–13	0

Анализируя сеть на рис. 4.13, замечаем, что время наиболее продолжительной перевозки равно 6 ед. и соответствует маршруту A_3—B_2. Однако из вершины A_3 нет возможности вывезти груз за время, меньшее 6 ед., следовательно, распределение, полученное на сети, изображенной на рис. 4.13, наилучшее и задача решена. Для большей наглядности ответ можно записать в форме табл. 4.15.

Таблица 4.15

	B_1	B_2	B_3
A_1	6	1	5
A_2	–	–	8
A_3	–	10	–

4.22. Известны запасы a_i груза у поставщиков, спрос b_j потребителей и время t_{ij} доставки груза по маршруту A_i—B_j. Составить реализуемый за минимальное время план перевозок, при котором полностью удовлетворяется спрос потребителей. Числовые данные приведены в следующих таблицах:

а)

a_i \ b_j	13	5	2
9	3	10	6
7	4	2	5
4	7	4	8

б)

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

Пример 4.8 (задача об оптимальном назначении). Проект включает работы P_1, P_2, P_3 и P_4, которые могут выполняться независимо друг от друга. Исполнители $И_1$, $И_2$, $И_3$ и $И_4$ могут выполнять не любые, а лишь вполне определенные работы. Возможности исполнителей характеризуются элементами матрицы (табл. 4.16): если $a_{ij} = 1$, то работа P_i может выполняться исполнителем $И_j$, если же $a_{ij} = 0$, то нет. При этом каждый исполнитель одновременно может выполнять только одну работу и каждая работа одновременно может выполняться только одним исполнителем. Распределить работы между исполнителями так, чтобы одновременно выполнялось возможно большее число работ.

Таблица 4.16

	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$
P_1	1	1	0	1
P_2	1	0	1	0
P_3	0	1	1	0
P_4	0	1	0	0

Решение. Сведем решение данной задачи к задаче о максимальном потоке. С этой целью построим сеть с десятью вершинами, четыре из которых будут соответствовать работам P_1, P_2, P_3 и P_4, четыре — исполнителям $И_1$, $И_2$, $И_3$ и $И_4$, одна — истоку I и одна — стоку S (рис. 4.14). Пропускные способности ребер положим равными: $r_{IP_i} = 1$, $r_{P_iI} = 0$, $r_{I_jS} = 1$, $r_{SI_j} = 0$. Вершину P_i соеди-

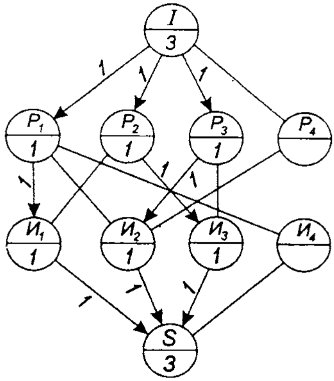


Рис. 4.14

ним ребром с вершиной $И_j$ только в том случае, если работа P_i может выполняться исполнителем $И_j$. При этом $r_{P_i И_j} = 1$, а $r_{И_j P_i} = 0$.

Каждому распределению работ между исполнителями можно поставить в соответствие определенный поток на сети. В самом деле, если работа P_i поручается исполнителю $И_j$, то по цепочке ребер (I, P_i), $(P_i, И_j)$ и $(И_j, S)$ пропускается поток единичной мощности. Верно и обратное. При таком соответствии число распределенных работ равно мощности суммарного потока из истока I в сток S. Поэтому, чтобы решить задачу об оптимальном назначении, достаточно найти в соответствующей сети максимальный поток с целочисленными потоками по ребрам сети.

Приступая к решению задачи, примем в качестве начального следующее распределение работ: работу P_1 закрепим за исполнителем $И_1$, P_2 — за $И_3$, P_3 — за $И_2$. Работу P_4 поручить некому. Соответствующий начальный поток X^0 нанесен на сеть (см. рис. 4.14) с указанием направления потоков по отдельным ребрам. Мощность потока равна 3. Для исследования этого потока составляем матрицы R, X^0 и $R—X^0$ (табл. 4.17—4.19) и по табл. 4.19 формируем списки вершин, достижимых из I по ненасыщенным ребрам:

$$\boxed{I \,||\, P_4},\ \boxed{P_4 \,||\, И_2},\ \boxed{И_2 \,||\, P_3},\ \boxed{P_3 \,||\, И_3},\ \boxed{И_3 \,||\, P_2},$$

$$\boxed{P_2 \,||\, И_1},\ \boxed{И_1 \,||\, P_1},\ \boxed{P_1 \,||\, И_4},\ \boxed{И_4 \,||\, S}.$$

Таблица 4.17

	I	P_1	P_2	P_3	P_4	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	S
I	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
P_1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
P_2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$И_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$И_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$И_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$И_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4.18

	I	P_1	P_2	P_3	P_4	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	S
I	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
P_1	–1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P_2	–1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
P_3	–1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$И_1$	0	–1	0	0	0	0	0	0	0	1
$И_2$	0	0	0	–1	0	0	0	0	0	1
$И_3$	0	0	–1	0	0	0	0	0	0	1
$И_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S	0	0	0	0	0	–1	–1	–1	0	0

Таблица 4.19

	I	P_1	P_2	P_3	P_4	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	S
I	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
P_1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
P_2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P_3	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$И_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$И_2$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$И_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$И_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Сток попал в список, следовательно, мощность потока X^0, равную 3, можно увеличить, если потоки по ребрам (I, P_4), $(P_4, И_2)$, $(И_2, P_3)$, $(P_3, И_3)$, $(И_3, P_2)$, $(P_2, И_1)$, $(И_1, P_1)$, $(P_1, И_4)$ и $(И_4, S)$ увеличить на $\Delta = 1$ (это видно из табл. 4.19). В результате получили поток X^1 (табл. 4.20), который является максимальным, так как насыщены все четыре ребра, выходящих из истока I. Это можно проверить и формально: в матрице $R—X^1$ все элементы первой строки будут равны 0, следовательно, список вершины I окажется пустым.

Таблица 4.20

	I	P_1	P_2	P_3	P_4	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	S
I	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
P_1	–1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P_2	–1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P_3	–1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
P_4	–1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$И_1$	0	0	–1	0	0	0	0	0	0	1
$И_2$	0	0	0	0	–1	0	0	0	0	1
$И_3$	0	0	0	–1	0	0	0	0	0	1
$И_4$	0	–1	0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	–1	–1	–1	–1	0

Поскольку мощность потока X^1 равна 4, а число работ в исходной задаче также равно 4, то X^1 соответствует такому закреплению работ, при котором все они оказываются распределенными, что и служит признаком оптимальности распределения. Выделенная в табл. 4.20 подматрица как раз и указывает это оптимальное закрепление работ: работа P_1 поручается исполнителю $И_4$, P_2 — исполнителю $И_1$, P_3 — исполнителю $И_3$, работа P_4 — исполнителю $И_2$.

4.23. Найти оптимальное распределение работ между исполнителями с учетом их возможностей, оцениваемых элементами данной матрицы, и исходя из указанного начального распределения:

а)

	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$
P_1	1	0	1	0
P_2	0	1	1	1
P_3	1	0	0	1
P_4	1	0	0	1

Работы P_1, P_2, P_3 первоначально закреплены за исполнителями $И_1$, $И_2$, $И_4$ соответственно.

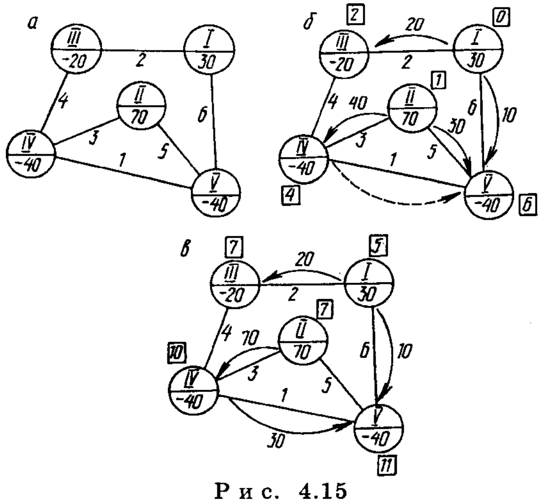
б)

	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	$И_5$
P_1	1	0	0	1	1
P_2	0	1	0	1	0
P_3	1	0	1	0	0
P_4	0	0	0	0	1

Работы P_1, P_2, P_3 первоначально закреплены за исполнителями $И_5$, $И_2$, $И_1$ соответственно.

4.3. Транспортная задача в сетевой постановке

Если условия транспортной задачи заданы в форме графа, вершины которого моделируют поставщиков и потребителей, а ребра — связывающие их дороги, и одновременно с этим указаны



Р и с. 4.15

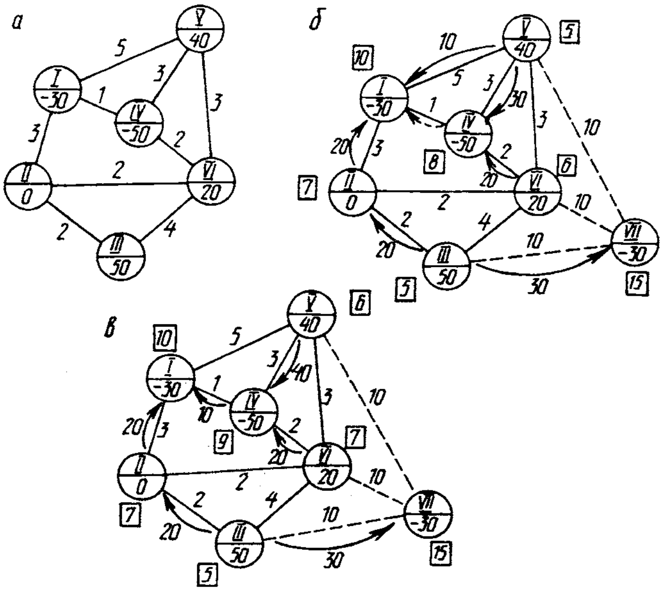


Рис. 4.16

запасы a_i груза и потребности b_j в нем, а также числа c_{ij}, являющиеся показателями принятого в задаче критерия оптимальности (тарифы, расстояния и т. п.), то говорят, что транспортная задача представлена в сетевой форме (см. рис. 4.15, *а*, 4.16, *а*).

Запасы груза в вершинах (кружках) будем записывать положительными, а потребности — отрицательными числами. На графе (сети) могут быть изображены вершины, в которых нет ни поставщиков, ни потребителей. Наличие таких вершин не влияет на способ решения, если считать, что запасы (потребности) груза в них равны нулю. Такие вершины называют *нулевыми* (см. вершину *II* на рис. 4.16).

Пример 4.9. По условиям, представленным на рис. 4.15, *а*, построить план перевозок груза, при котором минимизируются транспортные затраты.

Р е ш е н и е. У поставщиков *I* и *II* сосредоточено 30 + + 70 = 100 ед. груза. Получателям требуется 20 + 40 + 40 = = 100 ед. В данном случае запас совпадает со спросом, а потому задача закрытая. Тарифы известны.

Решение начинаем с построения исходного опорного плана. Поставки груза из вершины в вершину будем обозначать стрелками с указанием объемов поставок.

Опорный план должен удовлетворять следующим требованиям: 1) все запасы должны быть распределены, а потребности удовлетворены; 2) к каждой вершине должна подходить или выходить из нее хотя бы одна стрелка; 3) общее количество стрелок должно быть на единицу меньше числа вершин; 4) стрелки не должны образовывать замкнутый контур. План распределения груза на рис. 4.15, *б* отвечает этим требованиям.

Далее следует проверить план на оптимальность. Для этого вычислим специальные показатели, называемые *потенциалами.* Делается это так. Одной из вершин (например, вершине *I*) присвоим некоторое определенное значение потенциала (например, равное 0). Для большей наглядности потенциалы будем заключать в рамки. После этого, двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин, руководствуясь правилом: если стрелка выходит из вершины, то к потенциалу этой вершины прибавляем показатель c_{ij} критерия оптимальности, если же направление стрелки противоположно, то c_{ij} вычитаем.

В нашем примере потенциал вершины *III* — $0 + 2 = 2$ (стрелка выходит из вершины *I*), потенциал вершины *V* — $0 + 6 = 6$ (стрелка выходит из вершины *I*), потенциал вершины *II* — $6 - 5 = 1$ (стрелка входит в вершину *V*), потенциал вершины *IV* — $1 + 3 = 4$ (стрелка выходит из вершины *II*).

После вычисления потенциалов находят так называемые *оценки (характеристики) ребер* без стрелок по следующему правилу: из большего потенциала вычитается меньший, а разность вычитается из показателя c_{ij}, отвечающего данному ребру. Если все ребра без стрелок имеют неотрицательные характеристики, то составленный план является оптимальным.

Вычислим оценки s_{ij} ребер без стрелок в нашем примере: $s_{34} = 4 - (4 - 2) = 2$, $s_{45} = 1 - (6 - 4) = - 1$. Итак, ребро (*IV, V*) обладает отрицательной оценкой. Значит, план неоптимален.

Для улучшения плана надо «загрузить» то ребро без стрелки, которому соответствует отрицательная оценка. Если таких ребер несколько, то выбирается ребро с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой и к нему подрисовывается новая стрелка. При этом образуется замкнутый контур из стрелок. Новая стрелка направляется от вершины с меньшим потенциалом к вершине с бóльшим потенциалом.

В нашем примере новая стрелка направлена от вершины *IV* к вершине *V* (на рис. 4.15, *б* она показана штриховой линией).

Для определения объема поставки для «загружаемого» ребра рассматриваются все стрелки образовавшегося контура (если на сети — опорный план, то такой контур всегда существует, и притом только один!), имеющие направление, противоположное направлению новой стрелки, и среди них находится стрелка с наименьшей поставкой λ. Выбранная таким образом величина прибавляется ко всем поставкам у стрелок, имеющих то же направление, что и новая стрелка, и вычитается из поставок у стрелок, имеющих противоположное направление. Поставки у стрелок, не входящих в контур, сохраняются неизменными. Стрелка, по которой выбрано число λ, ликвидируется, и общее число стрелок остается прежним.

Преобразованный описанным способом опорный план приведен на рис. 4.15, *в*. Новый опорный план исследуется на оптимальность подобно предыдущему. Пусть потенциал вершины *IV* равен, например, 10, тогда после вычисления остальных потенциалов для ребер без стрелок получим такие оценки: $s_{34} = 4 - (10 - 7) = 1$, $s_{25} = 5 - (11 - 7) = 1$. Они положительны, значит, опорный план на рис. 4.15, *в* оптимален. Остается вычислить значение транспортных расходов: $20 \cdot 2 + 10 \cdot 6 + 30 \cdot 1 + 70 \cdot 3 = 340$.

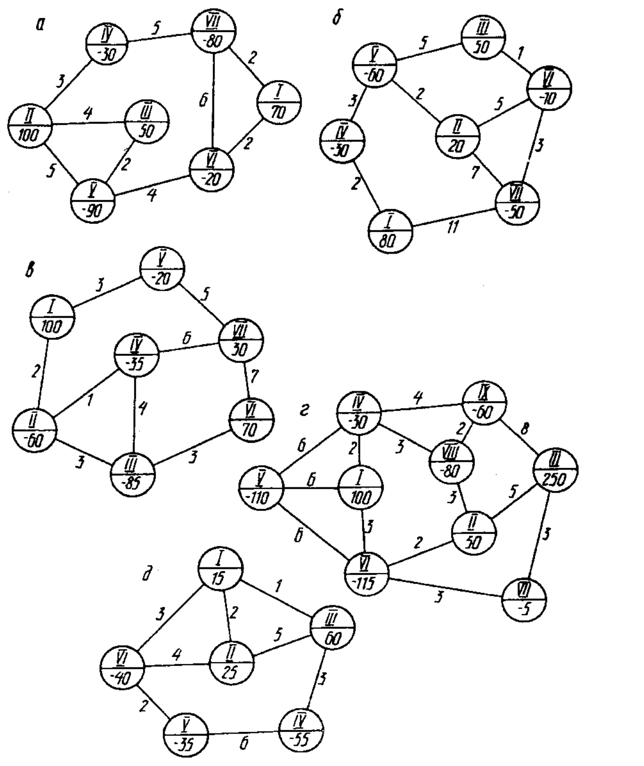
Заметим в заключение, что если при построении или преобразовании плана количество стрелок окажется недостаточным, то надо дорисовать недостающее число стрелок, снабдив их нулевыми поставками. Направления стрелок выбираются произвольно, однако они не должны образовывать замкнутый контур совместно с ранее построенными стрелками.

Пример 4.10. По условиям, представленным на рис. 4.16, *а*, составить план перевозок груза, при котором транспортные издержки минимальны.

Р е ш е н и е. В данном случае общий запас груза (110 ед.) превышает суммарный спрос (80 ед.), поэтому задача открытая.

В случае открытой задачи вводят фиктивного поставщика (потребителя) с запасом (спросом) груза, равным небалансу. Фиктивный поставщик (потребитель) соединяется ребрами непосредственно со всеми потребителями (поставщиками). При этом показатели c_{ij} ребер, соединяющих фиктивную вершину с реальными, следует брать одинаковыми и сравнительно большими. Делается это для того, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта.

В нашем примере необходимо ввести фиктивного потребителя со спросом, равным 110 − 80 = 30 ед. На



Р и с. 4.17

рис. 4.16, *б* этому потребителю соответствует новая фиктивная вершина *VII*, соединенная со всеми поставщиками «фиктивными» ребрами с показателями, равными 10.

Распределив поставки, устанавливаем потенциалы, а по ним — оценки ребер без стрелок (см. пример 4.9). Одно из них — (*I*, *IV*) — имеет отрицательную оценку: $s_{14} = 1 - (10 - 8) = -1$. Значит, план неоптимален и ребро (*I*, *IV*) следует «загрузить». Из рис. 4.16, *б* видно, что $\lambda = 10$. Сеть с новым опорным планом изображена на рис. 4.16, *в*. Там же указаны потенциалы. По ним можно найти оценки и убедиться, что этот план перевозок является оптимальным. Ему соответствуют минимальные транспортные издержки, равные 270 ед.

4.24. Решить по критерию стоимости транспортные задачи, заданные в сетевой форме (рис. 4.17, *а*—*д*).

4.4. Элементы сетевого планирования

Одним из важнейших приложений теории графов является сетевое планирование и управление сложными комплексами взаимосвязанных работ. Для этой цели разработаны специальные методы, основанные на использовании сетевых графиков, являющихся графической моделью комплекса работ или производственного процесса. С математической точки зрения *сетевой график* — это связный орграф без контуров. Дуги сетевого графика интерпретируются как работы, вершины — как события. Перед построением сетевого графика составляется список всех работ, входящих в комплекс. При этом необходимо четко представлять конечный результат (событие) каждой работы, знать продолжительность выполнения работы, а также предшествующие ей и последующие за ней работы. Сетевой график строится с соблюдением установленных правил.

Пример 4.11. Перечень работ по организации на промышленной выставке зала для демонстрации образцов продукции, выпускаемой производственным объединением, приведен в табл. 4.21. Построить сетевой график выполнения комплекса работ.

Р е ш е н и е. Обозначим работы в порядке их следования через a_1, ..., a_9 и дополним данную табл. 4.21 столбцом 2. Учитывая технологическую зависимость ра-

Таблица 4.21

Содержание работы	Исходная работа	Опирается на работу
1	2	3
Отбор образцов продукции для выставки	a_1	–
Изготовление информационных и рекламных материалов, указателей, надписей и т. п.	a_2	a_1
Изготовление стендов и другого оборудования для установки образцов в демонстрационном зале	a_3	a_1
Доставка образцов в демонстрационный зал	a_4	a_1
Доставка в демонстрационный зал стендов и другого оборудования	a_5	a_4
Монтаж стендов и другого оборудования	a_6	a_5
Установка образцов продукции на стендах	a_7	a_3, a_6
Оформление залов и стендов указателями, надписями, рекламными и информационными материалами	a_8	a_2, a_7
Репетиция открытия выставки	a_9	a_8

бот друг от друга, установим их последовательную связь, т. е. для каждой работы укажем, на какие работы она «опирается» (в данную таблицу добавляем еще один столбец).

Приступая к построению сетевого графика (рис. 4.18), замечаем, что работа a_1 не опирается ни на какую работу, поэтому она изобразится дугой, выходящей из события *1*, означающего исходный момент, с которого начинается выполнение рассматриваемого комплекса работ. На работу a_1 опираются работы a_2, a_3 и a_4, поэтому дуги, соответствующие этим работам, на сетевом графике будут следовать непосредственно за дугой a_1, от события *2*, озна-

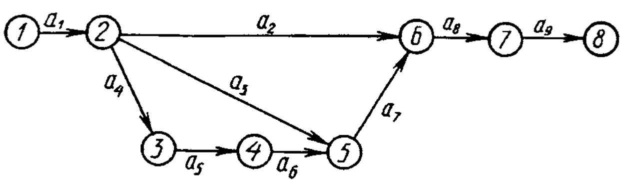


Рис. 4.18

чающего момент окончания работы a_1 и начало работ a_2, a_3 и a_4. На работу a_4 опирается работа a_5, а на нее — работа a_6, что и отражено на сетевом графике следующими друг за другом дугами a_5 и a_6. Работа a_7 опирается на работы a_3 и a_6, поэтому дуга a_7 исходит из события *5*, означающего момент, к которому завершены обе эти работы. Аналогичная ситуация имеет место и для работы a_8, исходящей из события *6*, которое означает факт выполнения работ a_2 и a_7. Дуга a_9 соответствует последней работе, а конечное ее событие *8* означает момент завершения работ всего рассматриваемого комплекса.

4.25. На сетевых графиках, изображенных на рис. 4.19, найти ошибки, считая, что каждый график имеет одно исходное I и одно завершающее S событие.

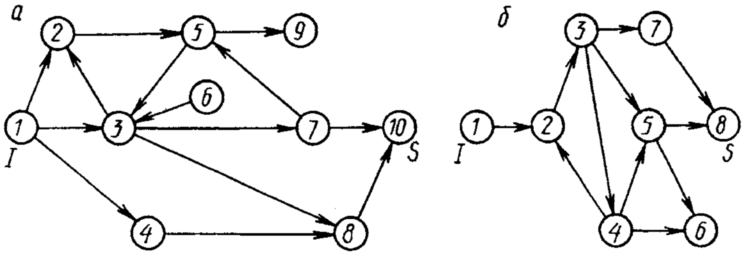


Рис. 4.19

4.26. Построить фрагмент сетевого графика, включающего пять работ, если работы a_2 и a_3 начаты одновременно, работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, a_3, работа a_5 может начаться после выполнения работы a_3.

4.27. Построить фрагмент сетевого графика, если начало работы a_5 зависит только от окончания работ a_1 и a_3, начало работы a_4 — только от окончания работы a_3, начало работы a_6 — только от окончания работ a_2 и a_3.

4.28. Построить фрагмент сетевого графика, содержащего шесть работ, если начало работы a_4 зависит от результата выполнения работы a_2, работа a_5 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, работа a_6 может быть начата после завершения работ a_3 и a_4.

4.29. Построить фрагмент сетевого графика, если он включает семь работ и при этом работа a_3 выполняется после работ a_1 и a_4, работа a_4 начинается после выполнения работы a_2, работа a_6 может быть выполнена после работ a_4 и a_5, работа a_7 выполняется после работ a_3 и a_6.

4.30. Построить сетевой график по следующим данным: работы a_1, a_2, a_3 могут выполняться одновременно после свершения исходного события, работы a_4 и a_5 начинаются после окончания работы a_1, работы a_6 и a_7 могут начаться после выполнения работ a_2 и a_4, начало работ a_8 и a_9 зависит от результата работы a_3, работа a_{10} может быть начата после выполнения работ a_5 и a_6, к работе a_{11} можно приступить после завершения работ a_7 и a_8, работу a_{12} следует начать после окончания работы a_9, работа a_{13} будет выполняться после завершения работ a_{10}, a_{11} и a_{12}.

4.31. Построить сетевые графики по следующим данным:

а)

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	–
a_2	–
a_3	–
a_4	a_1
a_5	a_2
a_6	a_2
a_7	a_3, a_5
a_8	a_4, a_6, a_7

б)

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	–
a_2	–
a_3	–
a_4	a_1, a_2
a_5	a_2, a_3
a_6	a_2, a_3
a_7	a_6
a_8	a_4, a_5, a_7

в)

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	–
a_2	–
a_3	a_1, a_2
a_4	a_1
a_5	a_1
a_6	a_4, a_5
a_7	a_4, a_5
a_8	a_3, a_7

При анализе сетевых графиков прежде всего вычисляют его временны́е параметры. К основным временны́м параметрам относятся продолжительность критического пути (*критический срок*), резервы времени событий и резервы времени работ.

Критический путь — это наиболее протяженный по времени полный путь; его продолжительность и определяет критический срок ($t_{кр}$). Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Ранний срок $t_р(j)$ свершения события j — это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_р(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+}(t_р(i) + t(i,j)), \qquad (4.7)$$

где U_j^+ — множество работ, заканчивающихся j-м событием; $t_р(i)$ — ранний срок свершения начального события работы (i, j); $t(i, j)$ — продолжительность работы (i, j). Предполагается, что $t_р(I) = 0$, $t_р(S) = t_{кр}$.

Поздний срок $t_п(i)$ свершения события i — такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием:

$$t_п(i) = \min_{(i,j)\in U_i^-}(t_п(j) - t(i,j)), \qquad (4.8)$$

где U_i^- — множество работ, начинающихся i-м событием; $t_п(j)$ — поздний срок свершения конечного события работы (i, j). Для завершающего события S предполагается, что $t_п(S) = t_р(S) = t_{кр}$.

Резерв времени $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i). \qquad (4.9)$$

Ранний срок начала работы (i, j)

$$t_{р.\,н}(i, j) = t_р(i). \qquad (4.10)$$

Ранний срок окончания работы (i, j)

$$t_{р.\,о}(i, j) = t_р(i) + t(i, j). \qquad (4.11)$$

Поздний срок начала работы (i, j)

$$t_{п.\,н}(i, j) = t_п(j) - t(i, j). \qquad (4.12)$$

Поздний срок окончания работы (i, j)

$$t_{п.\,о}(i, j) = t_п(j) \qquad (4.13)$$

Ранний срок свершения события j часто находят по формуле

$$t_р(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+} t_{р.\,о}(i, j), \qquad (4.14)$$

а поздний срок свершения события i — по формуле

$$t_п(i) = \min_{(i,j) \in U_i^-} t_{п.н}(i, j). \tag{4.15}$$

Полный резерв времени $R_п(i, j)$ *работы* (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i, j) = t_п(j) - t_{р.о}(i, j). \tag{4.16}$$

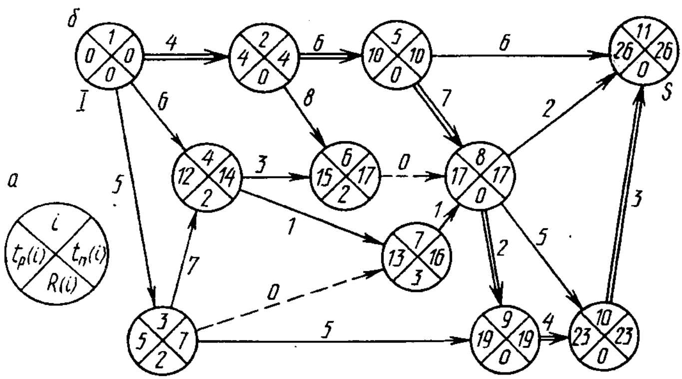
Свободный резерв времени $R_с(i, j)$ *работы* (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушатся ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_с(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i, j) = t_р(j) - t_{р.о}(i, j). \tag{4.17}$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Пример 4.12. Выполнив вычисления непосредственно на сетевом графике, определить сроки свершения и резервы времени событий.

Р е ш е н и е. Методику расчетов проиллюстрируем на примере сетевого графика, изображенного на рис. 4.20, *б*. Здесь каждый кружок, моделирующий событие, разделен диаметрами на четыре сектора (рис. 4.20, *а*). В верхнем секторе запишем номер (шифр) i события, в левом по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_р(i)$ свершения



Р и с. 4.20

события i, в правом — поздний срок $t_п(i)$, в нижнем — резерв $R(i)$ времени события.

Расчеты проводят в четыре этапа: вычисляют $t_р(i)$, $t_п(i)$, $R(i)$ и выделяют критический путь.

I этап. При вычислении ранних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от исходного события *1* вправо, по мере возрастания номеров событий. Поскольку $t_р(1) = 0$, в левый сектор кружка *1* записываем 0. Затем рассматриваем событие *2*, в которое входит только одна работа (*1, 2*). В соответствии с формулой (4.7) складываем число $t_р(1) = 0$ с числом $t(1, 2) = 4$ и результат $t_р(2) = 4$ записываем в левый сектор кружка *2*. Аналогично находим $t_р(3) = t_р(1) + t(1, 3) = 0 + 5 = 5$ и записываем в левый сектор кружка *3*. При вычислении $t_р(4)$ учитываем, что в событие *4* входят две работы: (*1, 4*) и (*3, 4*). Составляем две суммы: $t_р(1) + t(1, 4)$ и $t_р(3) + t(3, 4)$. По формуле (4.7) находим

$$t_р(4) = \max(t_р(1) + t(1, 4),\ t_р(3) + t(3, 4)) =$$
$$= \max(0 + 6,\ 5 + 7) = 12,$$

поэтому в левый сектор кружка *4* записываем 12. Аналогично вычисляем ранние сроки и всех остальных событий, помня, что продолжительность фиктивной работы принимается равной 0. В конце вычислений находим $t_р(11) = 26$, т. е. критический срок. Итак, $t_{кр} = 26$.

II этап. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от завершающего события влево, по мере убывания номеров событий. Поскольку $t_п(S) = t_р(S)$, то в правый сектор кружка *11* записываем число $t_р(11) = 26$. Рассматриваем далее предшествующее событие *10*, из которого выходит только одна работа (*10, 11*) продолжительностью $t(10, 11) = 3$. Следовательно, по формуле (4.8) получаем $t_п(10) = t_п(11) - t(10, 11) = 26 - 3 = 23$. Этот результат и записываем в правый сектор кружка *10*. Аналогично находим $t_п(9) = t_п(10) - t(9, 10) = 23 - 4 = 19$. Из события *8* выходят три работы: (*8, 9*), (*8, 10*), (*8, 11*), поэтому определяем поздний срок по каждой из этих работ, т. е. составляем три разности: $t_п(9) - t(8, 9)$, $t_п(10) - t(8, 10)$ и $t_п(11) - t(8, 11)$ и в соответствии с формулой (4.8) выбираем из них минимальную, которая и определит $t_п(8)$, т. е. $t_п(8) = \min(19 - 2,\ 23 - 5,\ 26 - 2) = 17$. Это число и записываем в правый сектор кружка *8*. Аналогично определяются поздние сроки свершения и всех остальных событий сетевого графика. Заметим только, что результатом расчетов должно быть равенство $t_р(1) = t_п(1) = 0$.

III этап. Для определения резервов времени событий в соответствии с формулой (4.9) достаточно из чисел, записанных в правых секторах кружков, вычесть числа, записанные в левых секторах. Полученные значения записываются в нижние секторы.

IV этап. У критических событий резерв времени равен 0, так что ранние и поздние сроки свершения совпадают. В нашем примере критическими являются события *1*, *2*, *5*, *8*, *9*, *10* и *11*, они и определяют критические работы и критический путь: *1—2—5—8—9—10—11*. Все остальные временные параметры (сроки начала и окончания работ, резервы времени работ) легко определяются по найденным значениям $t_р$ и $t_п$ на основе формул (4.10)—(4.17). Так, для определения полного резерва времени работы надо из числа, стоящего в правом секторе кружка, изображающего конечное событие работы, вычесть число, записанное в левом секторе кружка, соответствующего начальному событию этой работы, и продолжительность работы. Например, $R_п(4,\ 7) = 16 - 12 - 1 = 3$.

Пример 4.13. Найти значения временны́х параметров сетевого графика, изображенного на рис. 4.21, табличным способом.

Решение. Составим квадратную таблицу, предполагая, что ее строки и столбцы соответствуют событиям, а клетки на их пересечении — работам (табл. 4.22). Клетки главной диагонали назовем главными, а остальные —побочными. Разделим клетки диагоналями, верхнюю половину назовем числителем, а нижнюю — знаменателем. Числа, которые в дальнейшем будем записывать в числители и знаменатели клеток, назовем соответственно числителем и знаменателем клетки. В числители побочных клеток дважды запишем продолжительности работ, принимая сначала номера строк за номера начальных событий работ, а номера столбцов — за номера конечных событий,

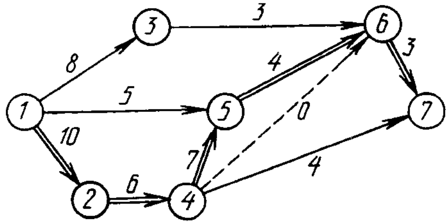


Рис. 4.21

а затем наоборот. Если события упорядочены и пронумерованы правильно, то сначала будут заполнены побочные клетки над главной диагональю, а затем — под ней (симметрично первым).

Таблица 4.22

	1	2	3	4	5	6	7
1	0 / 0	10 / 10	8 / 8		5 / 5		
2	10 / 0	10 / 10		6 / 16			
3	8 / 16		8 / 24			3 / 11	
4		6 / 10		16 / 16	7 / 23	0 / 16	4 / 20
5	5 / 18			7 / 16	23 / 23	4 / 27	
6			3 / 24	0 / 27	4 / 23	27 / 27	3 / 30
7				4 / 26		3 / 27	30 / 30

На первом этапе расчетов, смещаясь по таблице вниз, записываем в числители главных клеток ранние сроки свершения событий $t_р$, а в знаменатели заполненных побочных клеток над главной диагональю — ранние сроки окончания работ $t_{р.\,о}$. Поскольку $t_р(1) = 0$, то в числитель клетки $(1,1)$ записываем $t_р(1) = 0$, к которому затем прибавляем продолжительности $t(1, j)$ работ, начинающихся событием 1 и записанных числителями побочных клеток первой строки, т. е. $t_р(1) + t(1, 2) = 0 + 10$, $t_р(1) + t(1, 3) = 0 + 8$, $t_р(1) + t(1, 5) = 0 + 5$. Полученные результаты, равные 10, 8 и 5, в соответствии с формулой (4.11) определяют ранние сроки окончания работ $(1, 2)$, $(1, 3)$ и $(1, 5)$. Их записываем знаменателями соответствующих побочных клеток.

Переходя к очередной строке, прежде всего определяем числитель $t_р$ главной клетки на основе формулы (4.14). Поскольку $t_{р.\,о}$ записаны в таблице знаменателями побочных клеток над главной диагональю, то $t_р$ равно наибольшему из знаменателей соответствующего столбца. Так, $t_р(6) = \max(t_{р.\,о}(3, 6), t_{р.\,о}(4, 6), t_{р.\,о}(5, 6)) = \max(11, 16, 27) = 27$. К найденному значению $t_р(i)$ прибавляем числители $t(i, j)$ побочных клеток рассматриваемой строки и получаем знаменатели этих клеток. Продолжая вычисления, получаем, наконец, числитель $t_р(7) = 30$ завершающего события 7 — продолжительность критического пути $t_{кр} = 30$.

На втором этапе расчетов, поднимаясь по таблице вверх, в знаменатели главных клеток записываем поздние сроки свершения событий $t_п$, а в знаменатели побочных клеток под главной диагональю — поздние сроки начала работ $t_{п.\,н}$. Для завершающего события 7 находим $t_п(7) = t_р(7) = 30$. Далее из $t_п(7)$ вычитаем числители $t(i, 7)$ побочных клеток последней строки и в соответствии с формулой (4.12) получаем поздние сроки $t_{п.\,н}(i, 7)$ начала работ $(i, 7)$: $30 - 4 = 26 = t_{п.\,н}(4, 7)$, $30 - 3 = 27 = t_{п.\,н}(6, 7)$. Эти сроки записываем в знаменатели соответствующих клеток.

Поднимаясь к очередной строке, сначала находим знаменатель $t_п$ главной клетки по формуле (4.15). В таблице $t_{п.\,н}$ записаны в знаменатели побочных клеток ниже главной диагонали, поэтому $t_п$ равно наименьшему из знаменателей соответствующего столбца. Так, $t_п(4) = \min(t_{п.\,н}(4, 5), t_{п.\,н}(4, 6), t_{п.\,н}(4, 7)) = \min(16, 27, 26) = 16$. Определив $t_п$, вычитаем из него числители $t(i, j)$ побочных клеток рассматриваемой строки и полученные значения $t_{п.\,н}(i, j)$ записываем в знаменатели соответствующих клеток. Так, в шестой строке знаменатель главной клетки $t_п(6) = 27$, а знаменатели побочных клеток $t_{п.\,н}(3,\ 6) = 27 - 3 = 24$, $t_{п.\,н}(4,\ 6) = 27 - 0 = 27$, $t_{п.\,н}(5,\ 6) = 23$. Расчеты продолжаем до тех пор, пока не поднимемся к первой строке. Знаменатель клетки $(1,\ 1)$ должен равняться 0, так как $t_п(1) = t_р(1) = 0$. Итак, таблица заполнена.

По заполненной таблице кроме $t_р$, $t_п$, $t_{р.\,о}$, $t_{п.\,н}$, $t_{кр}$ можно определить и другие временные параметры сетевого графика. Например, в соответствии с формулами (4.10) и (4.13) $t_р(i) = t_{р.\,н}(i,\ j)$, $t_п(j) = t_{п.\,о}(i,\ j)$. Резервы времени событий определяются по формуле (4.9) как разности между знаменателями и числителями главных клеток. Поскольку резервы времени критических событий равны 0, по заполненной таблице легко найти критический путь: критическим событиям соответствуют главные клетки, числители и знаменатели которых равны. В нашем случае это события *1, 2, 4, 5, 6, 7*. В соответствии с формулой (4.16) полный резерв времени работы $(i,\ j)$ равен разности знаменателя $t_п$ главной клетки, соответствующей конечному событию j работы, и знаменателя $t_{р.\,о}$ расположенной над ней побочной клетки, соответствующей этой работе. Так, $R_п(3,\ 6) = t_п(6) - t_{р.\,о}(3,\ 6) = 27 - 11 = 16$. В соответствии с формулой (4.17) свободный резерв времени работы $(i,\ j)$ равен разности числителя $t_р$ главной клетки, соответствующей конечному событию работы, и знаменателя $t_{р.о}$ расположенной над ней побочной клетки, соответствующей этой работе. Так, $R_с(4,\ 7) = 30 - 20 = 10$.

4.32. Сетевой график (орграф) задан матрицей смежности работ a_i (дуг). Для наглядности в заглавном столбце указаны номера i предшествующих работ (дуг), в заглавной строке — последующих. В последнем столбце указаны продолжительности t_i работ. Построить сетевой график и перенумеровать события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона. Определить продолжительность: максимального пути, предшествующего событию *5*; максимального пути, следующего за событием *3*; максимального полного пути, проходящего через работу *(2, 4)*; всех полных путей. Найти критический путь и резервы времени полных путей:

а)

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t_i
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	8
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	7
4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	6
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	9
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12

б)

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t_i
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	15
2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	18
3	0	0	0	0	1	0	1	1	0	22
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	12
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	16
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	17
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	29

4.33. Перенумеровать вершины сетевого графика, изображенного на рис. 4.22, пользуясь алгоритмом Фалкерсона. Вычислить непосредственно на сетевом графике сроки свершения событий, сроки начала и окончания работ, критический путь, полные и свободные резервы времени работ.

4.34. Пользуясь алгоритмом Фалкерсона, перенумеровать события сетевого графика, представленного на рис. 4.22, и после этого табличным способом вычислить ранние и поздние сроки свершения событий, ранние сроки окончания работ, поздние сроки начала работ, критический срок. Выделить на сетевом графике критический путь.

4.35. По сетевому графику, изображенному на рис. 4.23, установить, как повлияет на срок выполнения комплекса увеличение продолжительности работы (*5*, *8*), работы (*9*, *10*). Можно ли использовать полный резерв времени работы (*5*, *8*) для увеличения продолжительности

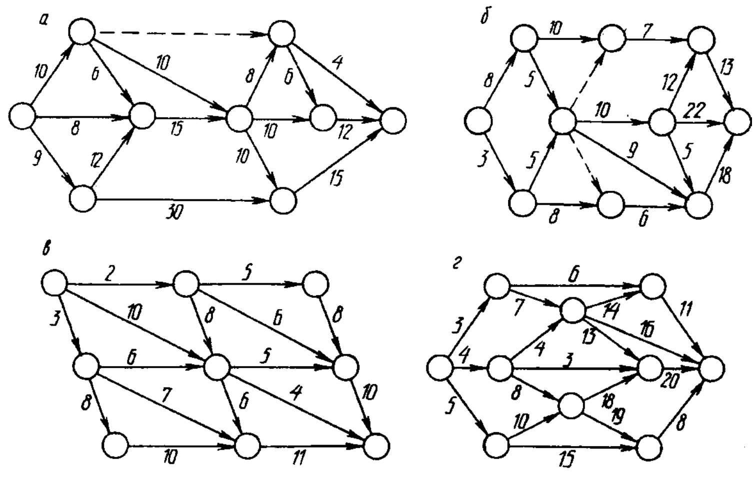


Рис. 4.22

работы (*8*, *9*)? Можно ли увеличить продолжительность работы (*5*, *8*) за счет свободного резерва времени работы (*8*, *9*)? Изменится ли полный резерв времени работы (*2*, *5*), если срок выполнения комплекса возрастет за счет увеличения продолжительности работы (*9*, *10*)?

4.36. По сетевому графику, приведенному на рис. 4.24, установить, можно ли полный резерв времени работы (*3*, *6*) распределить на работы (*6*, *9*) и (*9*, *10*), не нарушив срок завершения комплекса. Можно ли полный резерв времени работы (*2*, *8*) распределить на работы (*3*, *6*) и (*3*, *9*), не влияя на продолжительность критического пути? Можно ли свободный резерв времени работы (*3*, *6*) передать на последующие работы, не изменив их раннего начала?

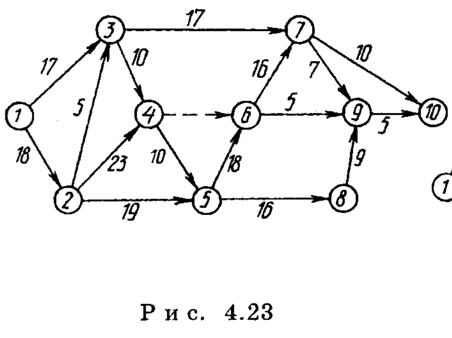


Рис. 4.23

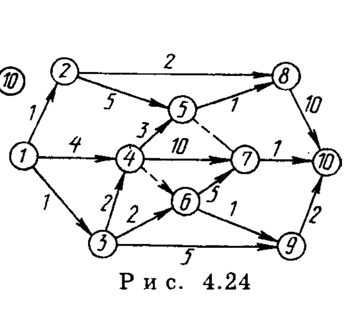
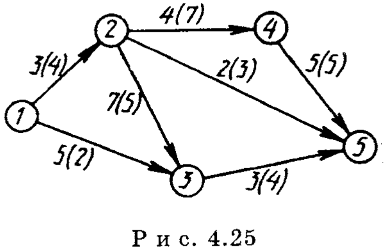


Рис. 4.24

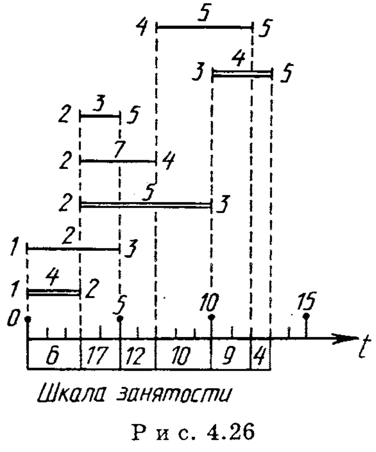
Пример 4.14. Для перевода производства на новую, более интенсивную, технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 4.25). Известна продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы (i, j) комплекса и количество r_{ij} специалистов, необходимых для этого (числа в скобках). По данному сетевому графику построить линейный график (линейную диаграмму) комплекса работ и найти по нему критический срок, критические и некритические работы, полные и свободные резервы некритических работ. Построить шкалу занятости специалистов в ходе выполнения работ комплекса.

Р е ш е н и е. Каждая работа (i, j) на линейном графике изображается прямолинейным отрезком в привязке к оси времени Ot, на которую нанесена равномерная шкала. Длина отрезка в выбранном масштабе равна продолжительности t_{ij} ее выполнения. Поэтому время t_{ij} у отрезков не проставляется, но указывается количество r_{ij} специалистов, занятых выполнением этой работы (в других производственных задачах — интенсивность потребления того или иного ресурса). Работы изображаются в той же последовательности, что и на данном сетевом графике (рис. 4.26).

В нашем случае комплекс начинается работами (*1*, *2*) и (*1*, *3*), поэтому начала отрезков *1*— *2* и *1*— *3* расположим



Р и с. 4.25



Р и с. 4.26

на вертикали $t = 0$ (в произвольных точках), а длины их будут равны соответственно 3 и 5 ед. После работы (*1*, *2*) выполняются работы (*2*, *3*), (*2*, *4*) и (*2*, *5*), поэтому начала всех трех отрезков *2—3*, *2—4* и *2—5* следует взять на вертикали $t = 3$, а длины их будут равны соответственно 7, 4 и 2 ед. Работа (*3*, *5*) выполняется после завершения двух работ: (*1*, *3*) и (*2*, *3*), а поэтому начало отрезка *3—5* придется расположить на вертикали $t = 10$ (а не $t = 5$!). Начало последней работы (*4*, *5*), следующей за работой (*2*, *4*), находится на вертикали $t = 7$.

По линейному графику легко найти $t_{кр}$ и критические работы. В нашем случае последней выполняется работа (*3*, *5*), ее конечной точке *5* соответствует на оси времени Ot отметка $t = 13$, которая и определяет критический срок: $t_{кр} = 13$. Таким образом, все подготовительные работы, связанные с переводом производства на новую, более интенсивную, технологию, займут 13 ед. времени (например, дней).

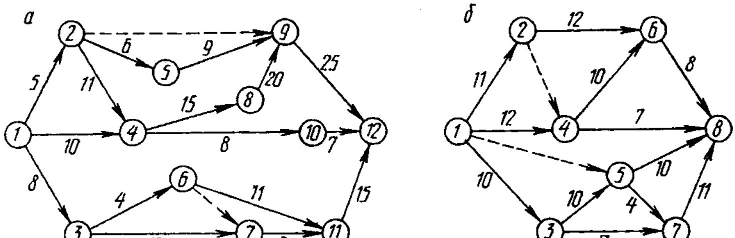
Ясно, что работа (*3*, *5*), будучи завершающей работой комплекса, является критической. Непосредственно ей предшествует работа (*2*, *3*), а этой работе — работа (*1*, *2*). Следовательно, критическими будут работы (*1*, *2*), (*2*, *3*) и (*3*, *5*). Остальные работы: (*1*, *3*), (*2*, *4*), (*2*, *5*) и (*4*, *5*) — некритические.

По линейному графику нетрудно найти полные резервы времени $R_п(i, j)$ некритических работ. Так, работу (*4*, *5*), как видно непосредственно из рис. 4.26, в случае необходимости можно отсрочить (сдвинуть) или увеличить ее продолжительность («растянуть») на один день, и это не вызовет нарушения критического срока. Значит, $R_п(4, 5) = 1$. Аналогично $R_п(2, 5) = 8$. Что касается работы (*2*, *4*), то вслед за ней («без зазора») выполняется работа (*4*, *5*), которую, как уже установлено, можно сдвинуть на один день. В связи с этим при необходимости работу (*2*, *4*) можно сдвинуть (вместе с работой (*4*, *5*) !) на один день. Итак, $R_п(2, 4) = 1$. Аналогично определяется $R_п(1, 3) = 5$.

По линейному графику легко определить и свободные резервы работ. Возьмем, к примеру, работу (*2*, *4*). Из рис. 4.26 видно, что сразу же за ней выполняется работа (*4*, *5*). Значит, $R_с(2, 4) = 0$ (напомним, что при определении свободного резерва работы последующие работы затрагивать нельзя!). А вот у работы (*1*, *3*) есть свободный запас времени в 5 дней, на которые ее можно в случае необходимости сдвинуть или увеличить продолжительность выполнения (если она начата в свой ранний срок), не нарушая раннего срока начала следующей за ней работы (*3*, *5*), так что $R_с(1, 3) = 5$. Непосредственно по графику находим: $R_с(4, 5) = 1$, $R_с(2, 5) = 8$.

Руководителю комплекса работ надо заранее знать, как будут использоваться специалисты в ходе выполнения работ комплекса. По линейному графику можно построить шкалу занятости специалистов. С этой целью спроецируем на ось времени Ot начальные и конечные точки всех работ; получим промежутки постоянства занятости: (0, 3), (3, 5), (5, 7) и т. д. Для получения показателей занятости по промежуткам просуммируем интенсивности r_{ij} использования специалистов по отдельным работам, расположенным над каждым промежутком. Так, в промежутке (0, 3) будет занято $r_{12} + r_{13} = 4 + 2 = 6$ чел., в промежутке (3, 5) — $2 + 5 + 7 + 3 = 17$ чел. и т. д.

4.37. Для комплекса работ, представленного сетевым графиком на рис. 4.27, *а*, *б*, построить линейный график и найти по нему критический срок, критические работы, полные и свободные резервы некритических работ.



Р и с. 4.27

4.38. По условиям задачи 4.32 построить линейный график и найти по нему работы критического пути. Для некритических работ определить полные и свободные резервы времени.

Одной из наиболее распространенных оптимизационных задач сетевого планирования является задача о сокращении срока выполнения комплекса работ при ограниченных ресурсах. Она возникает в случаях, когда для реализации комплекса в плановый срок имеющихся ресурсов недостаточно. В такой ситуации приходится пересматривать сроки выполнения работ, переносить отдельные работы, сдвигая их во времени. При этом продолжительность выполнения комплекса, как правило, увеличивается, в связи с чем требуется провести работы в новые сроки в минимально возможное время.

Пример 4.15. Предположим, что в условиях примера 4.14 требуется установить время начала и окончания каждой работы так, чтобы завершить комплекс в кратчайший срок, учитывая, что к выполнению работ можно привлечь не более 10 специалистов, обладающих достаточной квалификацией для того, чтобы выполнять любую работу комплекса.

Р е ш е н и е. В примере 4.14 установлено, что при наличии достаточного количества специалистов все подготовительные работы, связанные с переводом производства на новую технологию, займут 13 дней. При этом, как видно из рис. 4.26, для выполнения работ в разные периоды времени потребуется до 17 специалистов. Теперь тот же объем работ необходимо выполнить с привлечением только 10 специалистов, и сделать это надо за минимальное время. Возникает оптимизационная задача, решение которой разделим на отдельные шаги.

П е р в ы й ш а г. Чтобы внести коррективы в график выполнения работ, проанализируем шкалу занятости специалистов (см. рис. 4.26). В промежутке (0, 3) для выполнения работ требуется 6 специалистов, так что работы (*1*, *2*) и (*1*, *3*) могут выполняться по графику. Корректировка потребуется в промежутке (3, 5), когда необходимо участие 17 специалистов, а привлечь можно не более 10. Используем для анализа ситуации и принятия решения эвристический подход. Над промежутком (3, 5) располагаются четыре работы. Все их выполнить одновременно нет возможности. Чтобы выявить работы, подлежащие отсрочке, упорядочим все эти работы. Работа (*1*, *3*) начата раньше исследуемого промежутка; целесообразно ее продолжать, а потому естественно отдать ей предпочтение и присвоить № 1. Остальные работы имеет смысл упорядочить по возрастанию их полных резервов (разумнее сдвигать работы, у которых полные резервы больше, а при равенстве полных резервов сдвигать работу с меньшей интенсивностью). В нашем случае $R_п(2, 3) = 0$, $R_п(2, 4) = 1$, $R_п(2, 5) = 8$, поэтому работа (*2*, *3*) получает № 2, (*2*, *4*) — № 3, (*2*, *5*) — № 4.

Для выявления работы, подлежащей сдвигу, выясним, какие работы могут быть выполнены наличным составом специалистов. С этой целью в порядке возрастания номеров работ будем суммировать интенсивности r_{ij} использования (показатели занятости) специалистов на этих работах: $r_{13} + r_{23} = 2 + 5 = 7 < 10$. Отсюда ясно, что работы (*1*, *3*) и (*2*, *3*) можно выполнять в прежние сроки: специалистов достаточно. Продолжим суммирование: $r_{13} + r_{23} + r_{24} = 2 + 5 + 7 = 14 > 10$. Полученное превышение установленного предела числа исполнителей вызвано работой (*2*, *4*). Следовательно, она и подлежит сдвигу вправо за границы промежутка (3, 5), т. е. до момента $t = 5$. Однако, анализируя график, можно заметить, что в данном случае работу (*2*, *4*) целесообразно сдвинуть сразу до момента $t = 10$, поскольку до этого момента указанное превышение интенсивности будет сохраняться. Остается решить вопрос о четвертой работе (*2*, *5*). Возвращаясь к суммированию интенсивностей, отбрасываем слагаемое r_{24}, вызвавшее превышение допустимого предела, а вместо него прибавляем интенсивность следующей по порядку номеров работы (*2*, *5*): $r_{13} + r_{23} + r_{25} = 2 + 5 + 3 = 10$. Превышения не произошло, так что работу (*2*, *5*) можно выполнять в прежние сроки.

Итак, промежуток (3, 5) исследован. Сдвиг работы (*2*, *4*) на 7 дней повлечет за собой смещение на тот же срок следующей непосредственно за ней работы (*4*, *5*). Все остальные работы комплекса могут выполняться в прежние сроки. Смещение работ вызовет преобразование шкалы занятости специалистов. На рис. 4.28 приведен преобразованный линейный график. На этом завершается первый шаг оптимизации.

В т о р о й ш а г. Анализируя шкалу занятости на рис. 4.28, замечаем, что теперь исследованию подлежит промежуток (10, 13), так как до момента $t = 10$ специалистов достаточно для выполнения работ. По срав-

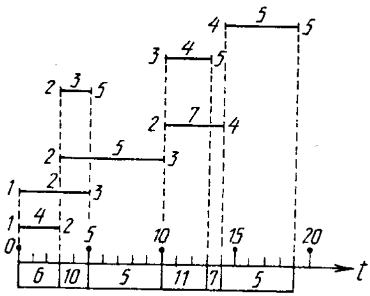


Рис. 4.28

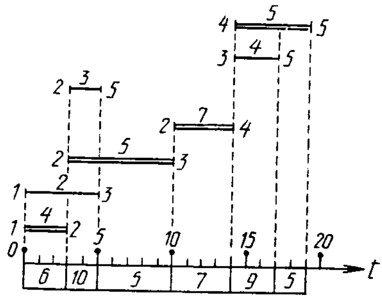


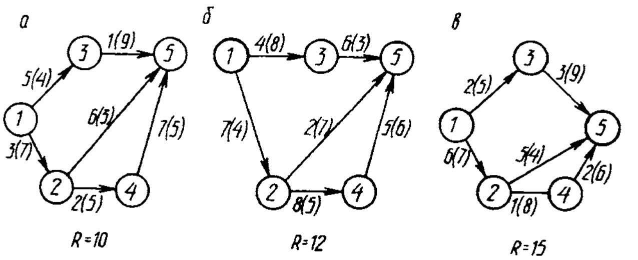
Рис. 4.29

нению с первым шагом здесь в рассуждениях ничего нового нет. Находим: $R_п(2, 4) = 0$, $R_п(3, 5) = 6$. Работа (2, 4) получает № 1, работа (3, 5) — № 2. В результате суммирования интенсивностей ($r_{24} + r_{35} = 7 + 4 = 11 > 10$) устанавливаем, что превышение допустимого предела занятости специалистов произошло за счет второго слагаемого, соответствующего работе (3, 5). Эту работу и следует сдвинуть вправо за пределы промежутка (10, 13), а учитывая конкретные условия графика, приведенного на рис. 4.28, — до момента $t = 14$. Сдвиг работы (3, 5) последствий не вызывает, так как за ней других работ нет. На рис. 4.29 приведен преобразованный линейный график вместе с изменившейся шкалой занятости. Этим заканчивается второй шаг оптимизации.

Анализируя шкалу занятости, замечаем, что при выполнении работ в любой момент времени занято, как и требовалось, не более 10 специалистов. Значит, процесс оптимизации закончен. Из графика видно, что время выполнения всех работ увеличилось до 19 дней. В табл. 4.23 приведены новые сроки начала ($t_н$) и окончания ($t_о$) работ.

Таблица 4.23

Сроки	Работы						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 5)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 5)
$t_н$	0	0	3	3	10	14	14
$t_о$	3	5	10	5	14	17	19



Р и с. 4.30

4.39. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 4.30). Для каждой работы известны продолжительность t_{ij} ее выполнения и количество r_{ij} (число в скобках) ресурса, расходуемого в единицу времени при выполнении этой работы (интенсивность потребления ресурса). В процессе выполнения работ расход ресурса не должен превышать заданной величины R. Требуется:

1) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критический срок и сроки начала и окончания работ без учета ограничения на используемый ресурс;

2) преобразовать линейный график выполнения работ так, чтобы в любой момент реализации комплекса расход ресурса не превышал заданного значения R, а общее время осуществления комплекса было возможно меньшим;

3) определить по преобразованному линейному графику новые сроки начала и окончания каждой работы.

5

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

5.1. Постановка транспортной задачи в матричной форме и построение ее исходного опорного плана

Транспортную задачу (ТЗ) по критерию стоимости представим в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
....	....	....	.....	....	....
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе b_j	b_1	b_2	...	b_n	

В табл. 5.1 указаны поставщики A_1, A_2, ..., A_m, у которых имеется в наличии соответственно a_1, a_2, ..., a_m единиц однородного груза. Данный груз должен быть доставлен n потребителям B_1, B_2, ..., B_n в количествах b_1, b_2, ..., b_n единиц. Заданы стоимости c_{ij} перевозок единицы груза от i-го поставщика j-му потребителю.

Требуется спланировать перевозки, т. е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика j-му потребителю, так, чтобы максимально удовлетворить спрос потребителей и чтобы суммарные транспортные затраты на перевозки были при этом минимальными.

Задачи, где суммарные запасы грузов поставщиков равны суммарным потребностям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5.1}$$

называются *закрытыми*, а задачи с отсутствием баланса между ресурсами и потребностями:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

называются *открытыми*.

Для составления математической модели задачи введем переменные $x_{ij} = \alpha_{ij}$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$, обозначающие количество единиц груза, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю. Очевидно, что таких переменных $m \times n$ и они должны удовлетворять следующим условиям:

1) ограничения по запасам:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1, m}); \tag{5.2}$$

2) ограничения по потребностям:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1, n}); \tag{5.3}$$

3) условия неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}). \tag{5.4}$$

Суммарные транспортные затраты на перевозки

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots c_{mn}x_{mn}. \tag{5.5}$$

Таким образом, математически ТЗ представляется так. Найти $m \times n$ переменных величин x_{ij}, удовлетворяющих системам уравнений (5.2), (5.3) и условиям неотрицательности (5.4), для которых целевая функция (5.5) принимает минимальное значение. Необходимым и достаточным условием решения ТЗ в области допустимых решений является условие (5.1).

Относительная простота систем уравнений (5.2), (5.3) дает возможность использовать метод решения более простой, чем симплексный. Особенности систем (5.2), (5.3) следующие:

1) коэффициенты при неизвестных во всех уравнениях равны единице;

2) каждая переменная встречается только в двух уравнениях;

3) система уравнений ТЗ симметрична относительно всех переменных x_{ij};

4) матрица, составленная из коэффициентов при переменных x_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$), состоит из единиц и нулей, причем каждый столбец матрицы содержит два элемента, равных единице, а остальные — нулю.

При решении ТЗ важное значение имеет *теорема о ранге матрицы*: ранг матрицы ТЗ на единицу меньше числа уравнений:

$$r = m + n - 1,$$

где m — число поставщиков; n — число потребителей.

Из данной теоремы следует, что каждое опорное решение системы ограничений ТЗ должно иметь $n - r = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$ свободных переменных, равных нулю, и $r = m + n - 1$ базисных переменных.

Если число занятых клеток удовлетворяет условию $m + n - 1$, то план перевозок называют *невырожденным*, а если число занятых клеток не удовлетворяет этому условию, то план перевозок называют *вырожденным*.

Решение ТЗ проводится с помощью общего приема последовательного улучшения плана, который реализован в симплексном методе. Этот прием включает следующие этапы:

1) определение исходного опорного плана;

2) оценка этого плана;

3) переход к следующему плану путем однократной замены одной из базисных переменных на свободную.

Существуют различные способы реализации приведенных этапов решения ТЗ. Сюда можно отнести *правило «северо-западного угла»*, *правило «минимального элемента»*, *метод Фогеля*, *метод потенциалов* и др.

Пример 5.1. Построить исходный опорный план ТЗ, условие которой представлено в табл. 5.2, по правилу «северо-западного угла».

Р е ш е н и е. В клетку (1; 1) вписываем число $x_{11} = \min(50, 40) = 40$ ед. В данном случае потребность потребителя B_1 полностью удовлетворяется запасом поставщика A_1. Первый столбец в дальнейшем в расчет не принимается.

Потребность потребителя B_2 за счет поставщика A_1 можно удовлетворить только частично. В клетку (1; 2) вписываем число $x_{12} = \min(50 - 40, 60) = \min(10, 60) = 10$ ед.

Таблица 5.2

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	6	50
A_2	2	4	5	1	70
A_3	3	6	7	5	100
Потребность в грузе b_j	40	60	50	70	

В результате такого распределения запас груза поставщика A_1 полностью исчерпан, т. е. первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Поскольку потребность потребителя B_2 удовлетворена за счет поставщика A_1 частично, переходим к распределению запаса груза поставщика A_2. В клетку (2; 2) вписываем число $x_{22} = \min(70, 60 - 10) = \min(70, 50) = 50$ ед. В этом случае потребность потребителя B_2 полностью удовлетворена, а у поставщика A_2 осталось 20 ед. груза.

Потребность потребителя B_3 за счет поставщика A_2 можно удовлетворить частично (на 20 ед.). В клетку (2; 3) вписываем число $x_{23} = \min(20, 50) = 20$ ед. В этом случае запас груза поставщика A_2 полностью исчерпан и переходим к распределению запаса груза поставщика A_3.

В клетку (3; 3) вписываем число $x_{33} = \min(100, 50 - 20) = \min(100, 30) = 30$ ед. В результате потребность потребителя B_3 полностью удовлетворена, у поставщика A_3 осталось 70 ед. груза.

Потребность потребителя B_4 составляет 70 ед., а у поставщика A_3 осталось 70 ед. груза. В клетку (3; 4) вписываем число $x_{34} = 70$ ед. Окончательно получаем табл. 5.3.

Исходным опорным планом перевозок является

$$X_1 = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \end{bmatrix}.$$

Этому плану соответствует значение целевой функции

$$f_1 = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 20 + 7 \cdot 30 + \\ + 5 \cdot 70 = 1050.$$

Таблица 5.3

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 40	3 10	2	6	50
A_2	2	4 50	5 20	1	70
A_3	3	6	7 30	5 70	100
Потребность в грузе b_j	40	60	50	70	

Пример 5.2. Составить исходный опорный план ТЗ, условие которой представлено в табл. 5.2, по правилу «минимального элемента».

Р е ш е н и е. Загрузка начинается с клетки, которой соответствует наименьший тариф c_{ij} из всей матрицы тарифов. Такой клеткой является (2; 4), $c_{24} = 1$. В клетку (2; 4) вписываем число $x_{24} = \min(70, 70) = 70$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения вторую строку и четвертый столбец. Из оставшихся тарифов наименьшим является $c_{13} = 2$. В клетку (1; 3) вписываем число $x_{13} = \min(50, 50) = 50$. В этом случае из дальнейшего рассмотрения исключаются первая строка и третий столбец. В расчет принимается распределение груза поставщика A_3. В третьей строке имеем наименьший тариф для клетки (3; 1), $c_{31} = 3$. В клетку (3; 1) вписываем число $x_{31} = \min(100, 40) = 40$. Оставшееся количество единиц груза от поставщика A_3 помещаем в клетку (3; 2), $x_{32} = \min(100 - 40, 60) = (60, 60) = 60$. В результате полного распределения грузов получаем исходное опорное решение

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

для которого $f_2 = 2 \cdot 50 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 60 = 650$.

Очевидно, что для данного опорного плана не выполняется условие $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. План X_2 вырожденный.

Пример 5.3. Составить методом Фогеля опорный план ТЗ, условие которой дано в табл. 5.2.

Р е ш е н и е. Поступаем следующим образом. По каждой строке и каждому столбцу определяем разность между двумя наименьшими тарифами и из всех разностей выбираем наибольшую, отмеченную знаком □. Такой разностью на первом этапе является $c_{34} - c_{24} = 5 - 1 = 4$ для четвертого столбца. В клетку (2; 4) вписываем число $x_{24} = \min(70, 70) = 70$. Остаток груза по второй строке равен нулю, и потребность в грузе по четвертому столбцу равна нулю, а это значит, что на втором этапе вторая строка и четвертый столбец в расчет приниматься не будут.

На втором этапе наибольшей разностью будет $c_{33} - c_{13} = 7 - 2 = 5$ в третьем столбце. В клетку (1; 3) вписываем число $x_{13} = \min(50, 50) = 50$. На данном этапе остатки груза по первой строке и третьему столбцу равны нулю, т. е. первая строка и третий столбец на следующем этапе в расчет не принимаются.

Остались одна строка и два столбца. В этом случае запас груза поставщика A_3 распределяем по третьей строке для полного удовлетворения спроса потребителей B_1, B_2. Последовательность поставок груза в соответствующую клетку на каждом этапе можно отмечать числом в нижнем правом углу клетки. Проделав несколько таких этапов, получим опорный план перевозок, который близок к оптимальному, а иногда совпадает с ним (табл. 5.4).

Полученный опорный план задачи можно представить в виде

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для этого плана транспортные издержки $f_3 = 2 \cdot 50 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 60 = 650$ ден. ед. План X_3 вырожденный. Такой же план получен и по правилу «минимального элемента». Естественно, совпадение планов X_2 и X_3 случайно.

Таблица 5.4

						Запас груза a_i	Этап	
							№ 1	№ 2
		4	3	2 50 2	6	50; 0	1	1
		2	4	5	1 70 1	70; 0	1	–
		3 40 3	6 60 4	7	5	100; 50; 0	2	3
Потребность в грузе b_j		40; 0	60; 0	50; 0	70; 0	220		
Этап	№ 1	1	1	3	4			
	№ 2	1	3	5	1			

В задачах 5.1—5.6 построить опорные планы перевозок по правилу «северо-западного угла» и определить значения целевых функций построенных планов.

5.1.

Поставщики	Потребители			Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	3	2	50
A_2	4	5	7	100
A_3	6	2	4	130
Потребность в грузе b_j	70	100	110	280

5.2.

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	2	3	30
A_2	3	1	0	4	190
A_3	5	6	3	7	250
Потребность в грузе b_j	70	120	150	130	470

5.3.

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	3	300
A_2	6	3	7	1	200
A_3	4	5	3	2	500
A_4	2	4	6	4	700
Потребность в грузе b_j	230	420	650	400	1700

5.4.

Поставщики	Потребители					Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	1	5	4	2	200
A_2	6	4	2	7	3	450
A_3	5	2	3	4	6	500
Потребность в грузе b_j	300	400	200	100	150	1150

5.5.

Поставщики	Потребители						Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	5	3	1	4	2	6	1780
A_2	4	2	3	6	1	3	2000
A_3	1	3	7	4	5	2	1530
A_4	3	4	6	7	1	5	2860
Потребность в грузе b_j	850	1870	1950	1670	1000	830	8170

5.6.

Поставщики	Потребители						Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	2	4	3	1	6	3	3000
A_2	5	7	4	5	2	1	5000
A_3	3	6	1	4	3	7	1250
A_4	1	3	2	6	4	5	7300
Потребность в грузе b_j	2300	3200	4000	1760	1500	2220	16 550 > >15 000

5.7. Для задач 5.1—5.6 определить опорные планы перевозок по правилу «минимального элемента» и соответствующие значения целевых функций.

В задачах 5.8—5.10 построить опорные планы методом Фогеля и определить значения целевых функций.

5.8.

Поставщики	Потребители					Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	1	2	5	6	100
A_2	7	3	4	2	5	70
A_3	6	4	7	1	8	130
A_4	2	5	6	4	7	150
Потребность в грузе b_j	80	120	70	130	50	450

5.9.

Поставщики	Потребители							Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	
A_1	5	1	4	3	6	7	2	1040
A_2	4	2	6	5	1	8	3	2700
A_3	7	3	1	4	2	5	6	1885
A_4	2	5	7	1	4	3	4	1457
Потребность в грузе b_j	590	740	875	1537	1200	1500	640	7082

5.10.

Поставщики	Потребители						Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	7	1	4	6	5	8	600
A_2	1	3	5	2	4	6	800
A_3	4	5	6	3	1	7	550
A_4	5	3	7	2	8	4	730
A_5	2	4	3	5	6	3	900
Потребность в грузе b_j	750	580	440	620	550	640	3580

5.2. Метод потенциалов

Перейдем к построению оптимального плана перевозок. По данному опорному плану, у которого число занятых клеток равно $m + n - 1$, каждому поставщику и потребителю придается число, называемое *потенциалом*. Потенциалы выбираются так, чтобы их сумма для каждой загруженной грузом клетки была равна тарифу перевозки единицы груза. Так, если клетка $(i;\ k)$ базисная (занятая), то

$$u_i + v_k = c_{ik},$$

где u_i — потенциал i-го поставщика; v_k — потенциал k-го потребителя; c_{ik} — тариф базисной клетки.

Решив систему из $m + n - 1$ уравнений вида $u_i + v_k = c_{ik}$, получим значения потенциалов u_i и v_k соответственно i-го поставщика и k-го потребителя. Далее вычислим оценки свободных клеток по формуле

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Если для свободных клеток все оценки $s_{ij} \geq 0$, то полученный опорный план перевозок оптимален. При наличии хотя бы одной оценки $s_{ij} < 0$ в число базисных вводят клетку, для которой оценка s_{ij} минимальна. Для такой клетки строится цикл и производится перемещение груза так, чтобы баланс цикла сохранялся.

Например, цикл имеет вид, показанный на рис. 5.1, где клетка $(i;\ k)$ свободная. Свободной клетке условно приписываем знак «+», тогда следующей клетке по ходу или против хода часовой стрелки — знак «–» и т. д.; знаки чередуются. В отрицательных вершинах цикла определяем наименьшую загрузку клетки, т. е. min (20, 30) = 20 ед.

Количество груза, равное 20 ед., прибавляем к поставкам в клетках со знаком «+» и вычитаем это же количество груза из поставок в клетках со знаком «–». В результате такого перемещения груза баланс цикла не нарушается, хотя изменяются загрузки клеток (рис. 5.2).

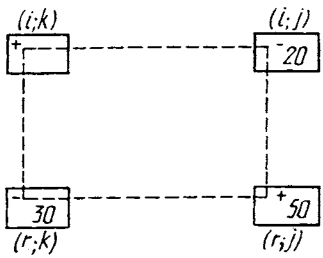


Рис. 5.1

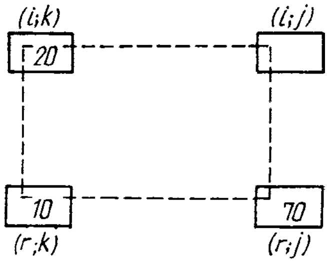


Рис. 5.2

Пример 5.4. Найти оптимальный план перевозок топлива из трех хранилищ A_1, A_2, A_3, в которых имеется в наличии соответственно 300, 150, 200 т топлива, предназначенного для пяти АЗС: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Потребности в топливе составляют соответственно 80, 170, 150, 160 и 70 т при следующей матрице затрат на перевозку 1 т топлива:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Опорное решение найдем, например, по правилу «минимального элемента» (табл. 5.5).

Т а б л и ц а 5.5

	80	170	150	180	70	
300	− 4 80	7	1 150	5	+ 2 70	0
150	6	2	4	+ 1 150	3 0 −	1
200	+ 5	6 170	7	4 30 −	8	4
		4	2	1	0 2	

В таблице распределения получен вырожденный план. Условие для базисных клеток $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ не выполняется.

В одну из свободных клеток (как правило, в клетку с наименьшим тарифом) вписываем число нуль (нуль-загрузка), и такая клетка считается базисной. Очень важно, чтобы из базисных клеток не образовался замкнутый цикл. Например, впишем число нуль в клетку (2; 5), $x_{25} = 0$.

Для определения потенциалов поставщиков и потребителей имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_5 = 2, \\ u_2 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_5 = 3, \\ u_3 + v_2 = 6, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{array}\right\}$$

Поскольку число уравнений системы на единицу меньше числа потенциалов (система неопределенная), для ее решения одному из потенциалов придается произвольное значение. Положим, например, $u_1 = 0$. Все остальные потенциалы определяются однозначно: $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $v_1 = 4$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 0$, $v_5 = 2$. Найденные потенциалы поставщиков и потребителей указаны справа и внизу в клетках табл. 5.5. Расчет их можно производить непосредственно в таблице.

Определяем оценки свободных клеток:

$$s_{12} = 7 - (0 + 1) = 6,\ s_{14} = 5 - 0 = 5,$$
$$s_{21} = 6 - (1 + 4) = 1,\ s_{22} = 2 - (1 + 2) = -1,$$
$$s_{23} = 4 - (1 + 1) = 2,\ s_{31} = 5 - (4 + 4) = -3,$$
$$s_{33} = 7 - (4 + 1) = 2,\ s_{35} = 8 - (4 + 2) = 2.$$

Полученный план неоптимален. Среди оценок имеются отрицательные. Наиболее потенциальной клеткой является клетка (3; 1). Строим замкнутый цикл для клетки (3; 1). В таблице он выделен штриховой линией. В отрицательных вершинах цикла наименьшее количество груза равно min (80, 0, 30) = 0, т. е. число нуль нужно поместить в клетку (3; 3), $x_{33} = 0$. Получаем новый план перевозок, хотя значение целевой функции и не изменится (табл. 5.6).

Полученный план, как и предыдущий, вырожденный. Потенциалы поставщиков и потребителей определены непосредственно в табл. 5.6: $u_1 = 0$, $u_2 = -2$, $u_3 = 1$, $v_1 = 4$, $v_2 = 5$, $v_3 = 1$, $v_4 = 3$, $v_5 = 2$.

Оценки свободных клеток следующие:

$$s_{12} = 7 - (5 + 0) = 2,\ s_{14} = 5 - (3 + 0) = 2,$$
$$s_{21} = 6 - (-2 + 4) = 4,\ s_{22} = 2 - (-2 + 5) = -1,$$
$$s_{23} = 4 -(-2 + 1) = 5,\ s_{25} = 3 - (-2 + 2) = 3,$$
$$s_{33} = 7 - (1 + 1) = 5,\ s_{35} = 8 - (1 + 2) = 5.$$

Таблица 5.6

	80	170	150	180	70	
300	4 80	7	1 150	5	2 70	0
150	6	+ 2	4	− 1 150	3	−2
200	5 0	6 −170	7	4 30 +	8	1
	4	5	1	3	2	

Поскольку имеется отрицательная оценка, то план перевозок еще неоптимален и его можно улучшить за счет загрузки клетки (2; 2). Строим замкнутый цикл, который включает клетки (2; 2), (2; 4), (3; 4), (3; 2). Наименьшее количество единиц груза в отрицательных вершинах цикла равно min (150, 170) = 150 ед. После смещения по циклу 150 ед. груза получим новый план (табл. 5.7).

Таблица 5.7

	80	170	150	180	70	
300	4 80	7	1 150	5	2 70	0
150	6	2 150	4	1	3	−3
200 5	5 0	6 20	7	4 180	8	1
	4	5	1	3	2	

Потенциалы поставщиков и потребителей для плана, представленного в табл. 5.7, определены непосредственно в таблице. Оценки свободных клеток следующие:

$$s_{12} = 7 - (5 + 0) = 2,\ s_{14} = 5 - (3 + 0) = 2,$$
$$s_{21} = 6 - (-3 + 4) = 5,\ s_{23} = 4 - (-3 + 1) = 6,$$
$$s_{24} = 1 - (-3 + 3) = 1,\ s_{25} = 3 -(-3 + 2) = 4,$$
$$s_{33} = 7 - (1 + 1) = 5,\ s_{35} = 8 - (1 + 2) = 5.$$

Все оценки свободных клеток положительны. Представленный в табл. 5.7 план перевозок оптимален, а так как среди оценок нет нулевых, то оптимальный план является и единственным:

$$X^* = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 150 & 0 & 70 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 180 \end{bmatrix}.$$

Для этого плана значение целевой функции

$$f(X^*) = 4 \cdot 80 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 70 + 2 \cdot 150 +$$
$$+ 6 \cdot 20 + 4 \cdot 180 = 1750.$$

5.11. Найти оптимальные планы перевозок ТЗ, условия которых даны в таблицах:

а)

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	6	8	40
A_2	7	6	4	5	120
Потребность в грузе b_j	30	50	45	35	160

б)

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	4	2	7	40
A_2	8	10	14	12	36
A_3	16	12	6	13	24
Потребность в грузе b_j	24	20	30	26	100

в)

Поставщики	Потребители				Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	4	6	2	40
A_2	4	10	5	6	25
A_3	6	7	8	5	28
A_4	10	12	8	9	32
Потребность в грузе b_j	28	32	20	45	125

г)

Поставщики	Потребители					Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	6	8	11	10	100
A_2	6	9	13	15	12	80
A_3	8	7	12	5	9	40
Потребность в грузе b_j	60	50	40	35	35	220

д)

Поставщики	Потребители						Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	9	3	4	8	10	12	36
A_2	4	6	7	11	13	9	34
A_3	5	8	8	4	12	10	32
A_4	6	12	15	9	6	8	30
Потребность в грузе b_j	20	15	25	27	30	15	132

е)

Поставщики	Потребители						Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	5	10	15	6	14	13	120
A_2	14	9	8	12	11	10	60
A_3	7	12	13	15	9	14	150
Потребность в грузе b_j	45	52	48	55	70	60	330

5.12. Составить план перевозок нефтепродуктов из трех пунктов отправления в пять пунктов назначения. План должен обеспечить минимальные транспортные издержки и полностью удовлетворить спрос потребителей на нефтепродукты. Запас, потребность и стоимость перевозки 1 т нефтепродуктов приведены в табл. 5.8.

Таблица 5.8

Пункт отправления	Стоимость перевозки 1 т нефтепродуктов потребителям, ден. ед.					Запас нефтепродуктов, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	5	9	8	6	150
A_2	8	10	4	11	12	170
A_3	4	3	15	13	14	200
Потребность в нефтепродуктах, т	120	80	140	70	110	520

5.13. В четырех хранилищах A_1, A_2, A_3, A_4 имеется соответственно 100, 150, 260 и 240 т картофеля. Требуется так спланировать перевозки картофеля в шесть овощных магазинов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, спрос которых равен соответственно 130, 110, 140, 150, 120, 100 т, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными. Стоимость перевозки 1 т картофеля указана в табл. 5.9.

Таблица 5.9

Хранилище	Стоимость перевозки 1 т картофеля потребителям, ден. ед.						Запас картофеля, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	7	6	9	7,5	8,6	8,8	100
A_2	8,5	5,7	7,6	9,2	7,2	6,5	150
A_3	5,8	7	8	7,3	6,8	8,4	260
A_4	6,4	6,2	5,7	5,9	6,5	7,9	240
Потребность в картофеле, т	130	110	140	150	120	100	750

5.14. Три совхоза A_1, A_2, A_3 ежедневно доставляют в город соответственно 50, 60 и 40 ц молока для обеспечения торговых точек B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Стоимость перевозки

1 ц молока и потребности торговых точек в молоке указаны в табл. 5.10.

Таблица 5.10

Совхоз	Стоимость перевозки 1 ц молока торговым точкам, ден. ед.					Запас молока, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	50
A_2	9	5	7	4	6	60
A_3	6	8	4	9	7	40
Потребность в молоке, ц	30	20	55	20	25	150

Определить оптимальный план поставки молока в каждую торговую точку для удовлетворения потребностей, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

5.15. Составить план посева зерновых культур (с учетом плодородия почвы), максимизирующий прибыль. Площадь участка *I* равна 300 га, участка *II* — 250, участка *III* — 300 га. Все необходимые данные приведены в табл. 5.11.

Таблица 5. 11

Зерновая культура	Урожайность по участкам, ц/га			Посевная площадь, га	Закупочная цена, ден. ед.	Затраты на 1 га по участкам, ден. ед.		
	I	*II*	*III*			*I*	*II*	*III*
Рожь	28	26	25	230	30	90	100	70
Пшеница	35	28	32	410	25	80	95	75
Ячмень	33	29	31	210	20	96	84	90

5.3. Решение транспортной задачи с открытой моделью

При выполнении одного из условий:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j; \qquad 2)\ \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

имеем открытую модель ТЗ. Так, если для ТЗ выполняется условие 1, то вводится фиктивный $(m + 1)$-й поставщик. В этом случае в таблице распределения строится дополнительная строка, для которой поставки равны разности между суммарной потребностью и фактическими запасами, т. е.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Все тарифы на доставку груза потребителям будем считать равными нулю: $c_{m+1,j} = 0$ $(j = \overline{1, n})$.

Если для ТЗ выполняется условие 2, то вводится фиктивный $(n + 1)$-й потребитель, для которого потребность равна разности между суммарными поставками поставщиков и фактическим спросом потребителей, т. е.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Все тарифы на доставку груза фиктивному потребителю равны нулю: $c_{i,n+1} = 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Пример 5.5. Найти оптимальный план перевозок ТЗ, условие которой представлено в табл. 5.12.

Таблица 5.12

Поставщики	Потребители				Запас груза, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	10	5	3	60
A_2	6	7	2	8	100
A_3	8	9	12	11	70
Потребность в грузе, т	50	55	70	45	230

Решение. Поскольку запасы грузов превышают спрос потребителей, вводится фиктивный потребитель, спрос которого

$$b_5 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 230 - 220 = 10 \text{ т}.$$

Все тарифы фиктивного потребителя равны нулю: $c_{i5} = 0$ $(i = \overline{1, 3})$. Имеем ТЗ закрытого типа, которую решаем методом потенциалов.

Исходное опорное решение получим, например, по правилу «минимального элемента» (табл. 5.13).

Таблица 5.13

	50	55	70	45	10	
60	4 15	10	5	3 45	0	0
100	+ 6 20	7	2 70	8	– 0 10	2
70	8 15 –	9 55	12	11	0 +	4
	4	5	0	3	2	

Получен невырожденный план. Потенциалы поставщиков и потребителей определены непосредственно в таблице. Оценки свободных клеток следующие:

$$s_{12} = 10 - 5 = 5,\ s_{13} = 5 - 0 = 5,\ s_{15} = 0 + 2 = 2,$$
$$s_{22} = 7 - (2 + 5) = 0,\ s_{24} = 8 - (2 + 3) = 3,$$
$$s_{33} = 12 - 4 = 8,\ s_{34} = 11 - (4 + 3) = 4,$$
$$s_{35} = 0 - (4 - 2) = -2.$$

Среди оценок имеется отрицательная ($s_{35} = -2$). План перевозок можно улучшить за счет загрузки клетки (3; 5). В отрицательных вершинах построенного для клетки (3; 5) цикла наименьшее количество груза равно min (10, 15) = 10 ед.

После смещения по циклу 10 ед. груза получим новый план перевозок (табл. 5.14).

Как и для предыдущего плана перевозок, все потенциалы поставщиков и потребителей определены в таблице. Оценки свободных клеток:

$$s_{12} = 10 - 5 = 5,\ s_{13} = 5 - 0 = 5,\ s_{15} = 0 - (0 - 4) = 4,$$
$$s_{22} = 7 - (2 + 5) = 0,\ s_{24} = 8 - (2 + 3) = 3,$$
$$s_{25} = 0 - (2 - 4) = 2,\ s_{33} = 12 - 4 = 8,$$
$$s_{34} = 11 - (4 + 3) = 4.$$

Оценки всех свободных клеток положительны, полученный план перевозок является оптимальным:

$$X^* = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 30 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 5 & 55 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

со значением целевой функции $f(X^*) = 1050$ ден. ед.

Таблица 5.14

	50	55	70	45	10	
60	4 15	10	5	3 45	0	0
100	6 30	7	2 70	8	0	2
70	8 5	9 55	12	11	0 10	4
	4	5	0	3	–4	

Загрузка $x_{35} = 10$ т для фиктивного потребителя указывает на остаток нераспределенного груза 10 т у поставщика A_3.

5.16. На пять строительных площадок B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 поступает кирпич с трех заводов. Потребность в кирпиче на строительных площадках равна соответственно 50, 60, 45, 35 и 40 тыс. шт. Данные о производительности заводов за день, затратах на производство кирпича и транспортных расходах приведены в табл. 5.15.

Таблица 5.15

Завод	Транспортные расходы на 1 тыс. шт. по строительным площадкам, ден. ед.					Производительность завода за день, тыс. шт.	Затраты на производство 1 тыс. шт. кирпича, ден. ед.
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	19	20	17	25	28	60	40
A_2	27	33	24	18	23	100	35
A_3	22	24	26	21	25	55	38

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за кирпичными заводами при условии, что недостающее количество кирпича 15 тыс. шт. в день можно обеспечить за счет: а) увеличения производительности завода A_1 (затраты на производство 1 тыс. шт. возрастут на 25 ден. ед.); б) увеличения производительности завода A_2 (затраты на производство 1 тыс. шт. возрастут на 40 ден. ед.).

5.17. Требуется перевезти товары с трех комбинатов-поставщиков A_1, A_2, A_3 $a_1 = 30$ т, $a_2 = 50$ т, $a_3 = 45$ т четырем оптовым базам B_1, B_2, B_3, B_4, спрос которых равен соответственно 20, 25, 35 и 40 т. Известна матрица транспортных расходов на доставку 1 т от поставщиков A_i $(i = \overline{1, 3})$ к оптовым базам B_j $(j = \overline{1, 4})$:

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 14 & 10 \\ 16 & 20 & 18 & 17 \\ 19 & 21 & 16 & 13 \end{bmatrix}.$$

Определить оптимальный план перевозок товара от поставщиков к оптовым базам, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

5.18. Решить транспортные задачи открытой модели методом потенциалов, для которых известны: a_i — запас груза у i-го поставщика; b_j — потребность j-го потребителя; c_{ij} — затраты на перевозку одной единицы груза:

а) $a_1 = 40$, $a_2 = 60$, $a_3 = 50$, $b_1 = 30$, $b_2 = 40$, $b_3 = 60$,

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad (i, j = \overline{1, 3});$$

б) $a_1 = 60$, $a_2 = 45$, $a_3 = 130$, $b_1 = 50$, $b_2 = 70$, $b_3 = 60$, $b_4 = 80$,

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 15 & 17 & 14 & 12 \\ 16 & 12 & 10 & 9 \\ 13 & 18 & 11 & 15 \end{bmatrix} (i = \overline{1, 3};\ j = \overline{1, 4});$$

в) $a_1 = 70$, $a_2 = 100$, $a_3 = 60$, $a_4 = 80$, $b_1 = 90$, $b_2 = 80$, $b_3 = 50$, $b_4 = 100$,

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 17 & 15 & 10 & 14 \\ 20 & 16 & 18 & 13 \\ 18 & 17 & 19 & 20 \\ 16 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} \quad (i,\ j = \overline{1,\ 4});$$

г) $a_1 = 1500$, $a_2 = 500$, $a_3 = 700$, $a_4 = 900$, $b_1 = 1000$, $b_2 = 600$, $b_3 = 800$, $b_4 = 1100$,

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 10 & 15 \\ 14 & 8 & 13 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 14 \\ 17 & 15 & 18 & 21 \end{bmatrix} \quad (i,\ j = \overline{1,\ 4}).$$

5.19. Урожай картофеля, собранный фермерами A_1, A_2, A_3 в количествах соответственно 40, 50 и 60 т, должен быть доставлен в четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4, спрос на картофель в которых равен соответственно 35, 30, 45, 32 т. Известны затраты фермеров на производство 1 т картофеля: 150, 170, 165 ден. ед. соответственно и матрица транспортных расходов на доставку 1 т картофеля:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 25 & 23 & 19 & 21 \\ 12 & 18 & 20 & 24 \\ 19 & 22 & 23 & 17 \end{bmatrix} \quad (i = \overline{1,\ 3};\ j = \overline{1,\ 4}).$$

Найти оптимальный план доставки картофеля в магазины, минимизирующий общие затраты на его производство и доставку.

5.20. Четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4 получают овощи из трех совхозов A_1, A_2, A_3, которые ежедневно могут поставлять соответственно 10, 12, 18 т. Суточные потребности магазинов составляют 9, 10, 12, 15 т. Известна матрица транспортных расходов на доставку 1 т овощей из совхоза каждому магазину:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 15 & 17 & 20 & 22 \\ 24 & 18 & 19 & 21 \\ 23 & 16 & 17 & 20 \end{bmatrix} \quad (i = \overline{1,\ 3};\ j = \overline{1,\ 4}).$$

Составить план доставки овощей из совхозов магазинам, минимизирующий транспортные издержки.

6

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. Метод Гомори для решения задачи целочисленного линейного программирования

Задачей целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП) называют ЗЛП, в которой на переменные налагается дополнительное ограничение — условие целочисленности. ЗЦЛП имеет вид:

$$\max\ (\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad 6.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (6.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \qquad (6.3)$$

$$x_j \text{ — целые числа; } j \in N_1, \qquad (6.4)$$

где N_1 — некоторое подмножество множества индексов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Если $N_1 = N$, то задачу (6.1) — (6.4) называют *полностью целочисленной*, если $N_1 \neq N$, — *частично целочисленной*.

Метод Гомори является одним из методов решения задач целочисленного линейного программирования. Идея метода Гомори решения задачи (6.1)—(6.4) заключается в следующем. Отбрасывается условие целочисленности (6.4), и полученная ЗЛП (6.1)—(6.3) решается симплекс-методом. Если оптимальное решение задачи (6.1)—(6.3) удовлетворяет ограничению (6.4), т. е. является целочисленным, то оно является и решением исходной задачи (6.1)—(6.4). Если оптимальное решение задачи (6.1)—(6.3) не удовлетворяет ограничению (6.4), то к основным ограничениям (6.2) добавляется новое линейное ограничение, обладающее следующими свойствами: 1) оптимальный нецелочисленный план задачи (6.1)—(6.3) ему не удовлетворяет; 2) любой целочисленный план задачи (6.1)—(6.3) ему удовлетворяет. Затем решается расширенная задача. Процесс повторяется до получения целочисленного решения. Способы построения дополнительного линейного ограничения различны для полностью и частично целочисленных ЗЛП. В силу свойств 1 и 2 дополнительное ограничение называют еще *отсечением Гомори*, а метод Гомори — *методом отсечения*.

Рассмотрим метод Гомори для решения полностью целочисленных ЗЛП. Пусть задача (6.1)—(6.3) решена симплекс-методом, $\mathbf{x}^0$ — ее оптимальный план, а табл. 6.1 — оптимальная симплексная таблица.

Таблица 6.1

БП	$\mathbf{c}_Б$	$\mathbf{A}_0$	x_{j_1}	x_{j_2}	...	$x_{j_{n-m}}$	x_{i_1}	x_{i_2}	...	x_{i_m}
			c_{j_1}	c_{j_2}	...	$c_{j_{n-m}}$	c_{i_1}	c_{i_2}	...	c_{i_m}
x_{i_1}	c_{i_1}	$x^0_{i_1}$	$a'_{i_1 j_1}$	$a'_{i_1 j_2}$	...	$a'_{i_1 j_{n-m}}$	1	0	...	0
x_{i_2}	c_{i_2}	$x^0_{i_2}$	$a'_{i_2 j_1}$	$a'_{i_2 j_2}$	...	$a'_{i_2 j_{n-m}}$	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{i_m}	c_{i_m}	$x^0_{i_m}$	$a'_{i_m j_1}$	$a'_{i_m j_2}$	...	$a'_{i_m j_{n-m}}$	0	0	...	1
$z_j - c_j$		f^0	$z_{j_1} - c_{j_1}$	$z_{j_2} - c_{j_2}$	...	$z_{j_{n-m}} - c_{j_{n-m}}$	0	0	...	0

Если все значения $x^0_{i_p}$ $(p = \overline{1, m})$ — целые, то $\mathbf{x}^0$ —решение задачи (6.1)—(6.4). Пусть среди чисел $x^0_{i_p}$ $(p = \overline{1, m})$ есть нецелочисленные. Выберем из них число с максимальной дробной частью:

$$\left\{x^0_{i_k}\right\} = \max_{1 \le p \le m} \left\{x^0_{i_p}\right\}.$$

Дополнительное линейное ограничение, или отсечение Гомори, будет иметь вид

$$\sum_{p=1}^{n-m} \left\{a'_{i_k j_p}\right\} x_{j_p} \ge \left\{x^0_{i_k}\right\}. \tag{6.5}$$

В ограничение (6.5) вводим дополнительную переменную

$$\sum_{p=1}^{n-m} \left\{a'_{i_k j_p}\right\} x_{j_p} - x_{n+1} = \left\{x^0_{i_k}\right\}, \tag{6.6}$$

где $x_{n+1} \ge 0$. Равенство (6.6) умножим на -1 и получим

$$\sum_{p=1}^{n-m} -\left\{a'_{i_k j_p}\right\} x_{j_p} + x_{n+1} = -\left\{x^0_{i_k}\right\}. \tag{6.7}$$

Припишем ограничение (6.7) к симплексной таблице 6.1. При том переменная x_{n+1} будет базисной. Получим расширенную таблицу 6.2.

Расширенную задачу решают начиная с табл. 6.2. Так как в столбце свободных членов табл. 6.2 есть отрицательное число, для решения расширенной задачи выполняют следующие операции.

Таблица 6.2

БП	$c_Б$	A_0	x_{j_1}	x_{j_2}	...	$x_{j_{n-m}}$	x_{i_1}	x_{i_2}	...	x_{i_m}	x_{n+1}
			c_{j_1}	c_{j_2}	...	$c_{j_{n-m}}$	c_{i_1}	c_{i_2}	...	c_{i_m}	0
x_{i_1}	c_{i_1}	$x^0_{i_1}$	$a'_{i_1j_1}$	$a'_{i_1j_2}$	...	$a'_{i_1j_{n-m}}$	1	0	...	0	0
x_{i_2}	c_{i_2}	$x^0_{i_2}$	$a'_{i_2j_1}$	$a'_{i_2j_2}$	...	$a'_{i_2j_{n-m}}$	0	1	...	0	0
...	...	...	....	....	....	....	....	....	....	....	....
x_{i_m}	c_{i_m}	$x^0_{i_m}$	$a'_{i_mj_1}$	$a'_{i_mj_2}$	...	$a'_{i_mj_{n-m}}$	0	0	...	1	0
x_{n+1}	0	$-\left\{x^0_{i_k}\right\}$	$-\left\{a'_{i_kj_1}\right\}$	$-\left\{a'_{i_kj_2}\right\}$	...	$-\left\{a'_{i_kj_{n-m}}\right\}$	0	0	...	0	1
$z_j - c_j$		f^0	$z_{j_1} - c_{j_1}$	$z_{j_2} - c_{j_2}$	...	$z_{j_{n-m}} - c_{j_{n-m}}$	0	0	...	0	0

1. Просматривают строку, содержащую отрицательное число в столбце свободных членов, и выбирают любое отрицательное число в этой строке. Выбранное число определяет разрешающий столбец.

2. Для чисел с одинаковыми знаками составляют симплексные отношения.

3. Наименьшее симплексное отношение определяет разрешающую строку. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.

4. С найденным разрешающим элементом выполняют симплексные преобразования.

Пример 6.1. Предприятие производит две модели A и B сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели A требуется 2 м^2 досок, а для изделия модели B — 5 м^2. Малое предприятие может получить от своих поставщиков до 1600 м^2 досок в неделю. Для изготовления каждого изделия модели A требуется 10 мин машинной обработки, а изделия модели B — 12 мин. Время машинной обработки в неделю 100 ч. Сколько изделий каждой модели следует выпускать малому предприятию в неделю для получения максимальной прибыли, если каждое изделие модели A приносит 20 ден. ед. прибыли, а каждое изделие модели B — 40 ден. ед.?

Р е ш е н и е. Математическая модель задачи имеет вид

$$\max Z = f(x) = 20x_1 + 40x_2; \tag{6.8}$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 1600, \tag{6.9}$$

$$\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 100, \tag{6.10}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \tag{6.11}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{6.12}$$

Преобразуем задачу (6.8) — (6.12), умножив обе части неравенства (6.10) на 30. Получим задачу

$$\max Z = 20x_1 + 40x_2; \tag{6.8$'$}$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 1600, \tag{6.9$'$}$$

$$5x_1 + 6x_2 \le 3000, \tag{6.10$'$}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \tag{6.11$'$}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{6.12$'$}$$

По методу Гомори для определения оптимального плана задачи (6.8′)—(6.12′) решим ЗЛП (6.8′)—(6.11′) симплекс-методом. Приведем ее к каноническому виду:

$$\max Z = 20x_1 + 40x_2; \tag{6.13}$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1600, \tag{6.14}$$

$$5x_1 + 6x_2 + x_4 = 3000, \tag{6.15}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \tag{6.16}$$

В процессе решения задачи (6.13) — (6.16) получаются симплексные таблицы 6.3—6.5.

Т а б л и ц а 6.3

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			20	40	0	0
x_3	0	1600	2	5	1	0
x_4	0	3000	5	6	0	1
$z_j - c_j$		0	–20	–40	0	0

Таблица 6.4

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			20	40	0	0
x_2	40	320	2/5	1	1/5	0
x_4	0	1080	13/15	0	–6/5	1
$z_j - c_j$		12800	–20/5	0	40/5	0

Таблица 6.5

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			20	40	0	0
x_2	40	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$
x_1	20	$415\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$
$z_j - c_j$		$14\,461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$

Табл. 6.5 — оптимальная симплексная таблица, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0;\ x_2^0)$, где $x_1^0 = 415\frac{5}{13}$, $x_2^0 = 153\frac{11}{13}$ — оптимальный план задачи (6.8′)—(6.11′). Так как оптимальный план задачи (6.8′)—(6.11′) нецелочисленный, он не является оптимальным планом задачи (6.8′)—(6.12′). Следуя методу Гомори, находим

$$\max\left\{\{x_1^0\},\ \{x_2^0\}\right\} = \max\left\{\left\{415\frac{5}{13}\right\},\ \left\{153\frac{11}{13}\right\}\right\} = \frac{11}{13} = \{x_2^0\}.$$

По первой строке табл. 6.5 строим дополнительное линейное ограничение:

$$\left\{\frac{5}{13}\right\}x_3 + \left\{-\frac{2}{13}\right\}x_4 \ge \frac{11}{13}. \qquad (6.17)$$

Так как

$$\left\{\frac{5}{13}\right\} = \frac{5}{13},\ \left\{-\frac{2}{13}\right\} = -\frac{2}{13} - \left[-\frac{2}{13}\right] = -\frac{2}{13} - (-1) = \frac{11}{13},$$

ограничение (6.17) примет вид

$$\frac{5}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_4 \geq \frac{11}{13}. \tag{6.18}$$

Введем в ограничение (6.18) дополнительную переменную

$$\frac{5}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_4 - x_5 = \frac{11}{13}. \tag{6.19}$$

Домножим ограничение (6.19) на –1:

$$-\frac{5}{13}x_3 - \frac{11}{13}x_4 + x_5 = -\frac{11}{13}. \tag{6.19'}$$

Припишем ограничение (6.19′) к табл. 6.5 и получим табл. 6.6.

Таблица 6.6

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			20	40	0	0	0
x_2	40	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0
x_1	20	$415\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	0
x_5	0	$-\frac{11}{13}$	0	0	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{11}{13}$	1
$z_j - c_j$		$14\,461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$	0

Следуя методу Гомори, выполним симплексные преобразования табл. 6.6 с разрешающим элементом –11/13. Получим табл. 6.7.

Таблица 6.7

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			20	40	0	0	0
x_2	40	154					
x_1	20	415					
x_4	0	1					
$z_j - c_j$		14 461	0	0	$\frac{60}{11}$	0	$\frac{20}{11}$

Имеем оптимальный целочисленный план расширенной задачи. Тогда оптимальный план исходной задачи (6.8)—(6.12) $\mathbf{x}^0 = (415; 154)$.

Задачи 6.1— 6.10 решить методом Гомори.

6.1. $\max Z = 3x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 11x_2 &\le 44, \\ x_1 &\le 5, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.2. $\max Z = x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 - 3x_2 &\le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 13, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.3. $\max Z = 2x_1 - 8x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 17, \\ x_2 &\le 4, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.4. $\max Z = 7x_1 - 9x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 9, \\ 3x_2 &\le 7, \\ 4x_1 + 5x_2 &\le 5, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.5. $\max Z = x_1 - 7x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\le 8, \\ x_1 - 3x_2 &\ge 2, \\ x_1 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.6. $\max Z = x_1 - 7x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 - x_2 &\ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 11, \\ x_2 &\le 5, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.7. $\max Z = x_1 + 5x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 7, \\ -3x_1 + 2x_2 &\le 5, \\ x_1 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.8. $\max Z = x_1 + 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 5, \\ -x_1 + 2x_2 &\le 3, \\ x_2 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.9. $\max Z = 2x_1 + 5x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 25, \\ 2x_1 - x_2 &\ge 1, \\ x_1 &\le 5, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.10. $\max Z = 2x_1 + 3x_2;$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\ge 1, \\ 4x_1 - x_2 &\le 15, \\ x_1 + 3x_2 &\le 16, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1,\ x_2$ — целые.

6.2. Метод ветвей и границ

Для решения ЗЦЛП (6.1) — (6.4) используется также *метод ветвей и границ*. Рассмотрим идею метода ветвей и границ на примере общей задачи дискретного программирования

$$\max Z = f(\mathbf{x}); \tag{6.20}$$

$$\mathbf{x} \in G, \tag{6.21}$$

где G — конечное множество.

1. Находим оценку $\xi(G)$ (границу) функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G$: $f(\mathbf{x}) \le \xi(G)$ для любых $\mathbf{x} \in G$ (рис. 6.1). Если при этом для некоторого плана $\mathbf{x}^0$ задачи (6.20), (6.21) справедливо равенство $f(\mathbf{x}^0) = \xi(G)$, то $\mathbf{x}^0$ — оптимальный план задачи (6.20), (6.21).

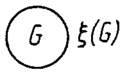


Рис. 6.1

2. Если оптимальный план не найден, то каким-либо способом множество G разбиваем (ветвим) на конечное число непересекающихся подмножеств:

$$G = G_1^1 \cup G_2^1 \cup \ldots \cup G_{r_1}^1.$$

Для каждого из этих подмножеств вычисляем оценку (границу) $\xi(G_i^1)$ $(i = \overline{1, r_1})$ (рис. 6.2). Если при этом для некоторого плана $\mathbf{x}_r^1$, $\mathbf{x}_r^1 \in G_r^1$, $1 \le r \le r_1$, справедливы соотношения

$$f(\mathbf{x}_r^1) = \xi(G_r^1) \ge \xi(G_i^1) \quad (i = \overline{1, r_1}),$$

то $\mathbf{x}_r^1$ — оптимальный план задачи (6.20), (6.21).

3. Если такой план не найден, то выбираем множество G_r^1 с самой большой оценкой:

$$\xi(G_r^1) = \max_{1 \le i \le r_1} \xi(G_i^1).$$

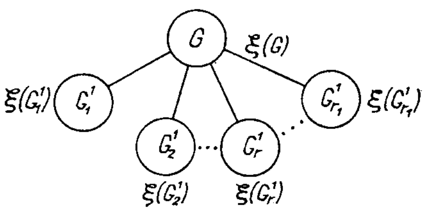


Рис. 6.2

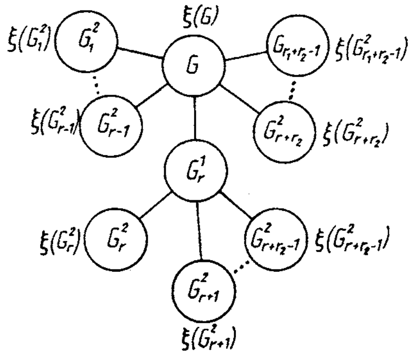


Рис. 6.3

Множество G_r^1 каким-либо способом разбиваем на конечное число непересекающихся подмножеств:

$$G_r^1 = G_{r1}^1 \cup G_{r2}^1 \cup \ldots \cup G_{rr_2}^1.$$

Все подмножества заново перенумеровываем:

$$G = G_1^2 \cup G_2^2 \cup \ldots \cup G_{r_1+r_2-1}^2.$$

Для каждого множества G_i^2 находим оценку (границу) $\xi(G_i^2)$, $i = \overline{1, r_1 + r_2 - 1}$ (оценки приходится находить только для вновь полученных множеств, для остальных множеств оценки найдены на предыдущем шаге) (рис. 6.3). Если при этом находят такой план $\mathbf{x}_k^2$, для которого справедливы соотношения

$$f(\mathbf{x}_k^2) = \xi(G_k^2) \geq \xi(G_i^2),\ \ 1 \leq i \leq r_1 + r_2 - 1,\ \ 1 \leq k \leq r_1 + r_2 - 1,$$

то $\mathbf{x}_k^2$ — оптимальный план задачи (6.20), (6.21).

4. Если оптимальный план не найден, то для дальнейшего ветвления выбирают множество с самой большой оценкой. Процесс продолжают до получения оптимального плана.

Способы нахождения планов, оценок, способы ветвления выбирают в зависимости от вида задачи дискретного программирования. Для задачи целочисленного линейного программирования (6.1)—(6.4) в качестве оценки целевой функции рассматривают ее значение на оптимальном плане соответствующей задачи линейного программирования (6.1)—(6.3).

Обозначим через G множество планов задачи (6.1)—(6.4), а через $\mathbf{x}^0$ — оптимальный план задачи (6.1)—(6.3), тогда $\xi(G) = f(\mathbf{x}^0)$. Пусть $\mathbf{x}^0$ не является оптимальным планом задачи (6.1)—(6.4) и пусть переменная $\mathbf{x}_k^0$, $k \in N_1$, нецелочисленная. В этом случае множество G планов задачи (6.1) — (6.3) разбивают (ветвят) на два непересекающихся подмножества следующим образом:

$$G_1^1 = \{\mathbf{x} \in G\colon x_k \le [x_k^0]\},$$
$$G_2^1 = \{\mathbf{x} \in G\colon x_k \ge [x_k^0] + 1\}.$$

Пример 6.2. Решить пример 6.1 методом ветвей и границ.

Р е ш е н и е. Математическая модель задачи имеет вид

$$\max f(x) = 20x_1 + 40x_2; \tag{6.22}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 1600, \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 3000, \end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \tag{6.24}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{6.25}$$

Множество планов задачи (6.22)—(6.25) обозначим G. Множество G — это множество целых точек многогранника $ABCD$, представленного на рис. 6.4.

Следуя методу ветвей и границ, в качестве оценки множества G берем значение целевой функции на оптимальном плане в задаче (6.22)—(6.24), т. е.

$$\xi(G) = f(\mathbf{x}^0) = 40 \cdot 153\frac{11}{13} + 20 \cdot 415\frac{5}{13} = 14\,461\frac{7}{13}$$

(рис. 6.5).

Так как $\mathbf{x}^0$ не является планом задачи (6.22)—(6.25), то он не является и оптимальным планом. Поэтому продолжаем решать задачу. Выберем любую нецелочислен-

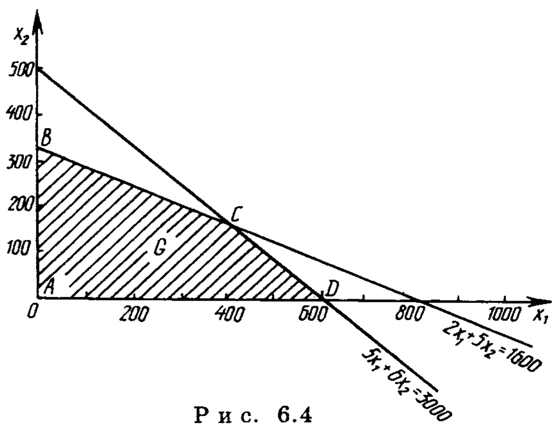
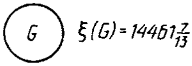
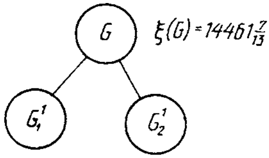


Рис. 6.4



Р и с. 6.5



Р и с. 6.6

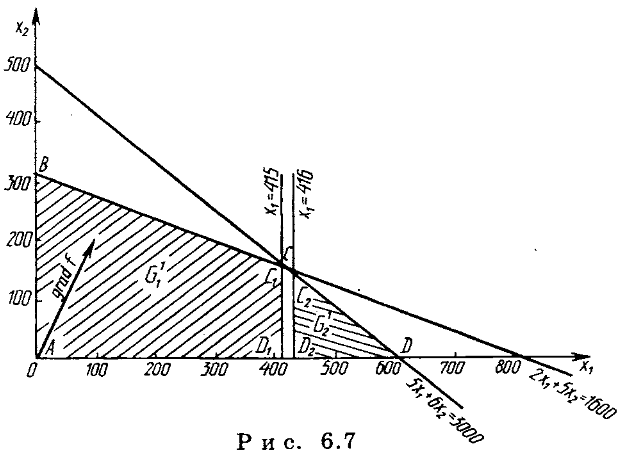
ную переменную оптимального плана задачи (6.22)—(6.24), например $\mathbf{x}_1^0 = 415\frac{5}{13}$. Разобьем множество G планов задачи (6.22)—(6.25) на два непересекающихся подмножества: $G = G_1^1 \cup G_2^1$ (рис. 6.6). Здесь

$$G_1^1 = \left\{\mathbf{x} \in G\colon x_1 \le \left[415\frac{5}{13}\right]\right\},$$

$$G_2^1 = \left\{\mathbf{x} \in G\colon x_1 \ge \left[415\frac{5}{13}\right] + 1\right\}.$$

Множества G_1^1 и G_2^1 — это множества целых точек многогранников ABC_1D_1 и D_2C_2D соответственно, изображенных на рис. 6.7.

Найдем оценки множеств G_1^1 и G_2^1. Для этого решим соответствующие ЗЛП:



Р и с. 6.7

$$\max f = 20x_1 + 40x_2;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 1500,\\ 5x_1 + 6x_2 &\le 3000,\\ x_1 &\le 415, \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$\max f = 20x_1 + 40x_2;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 1600,\\ 5x_1 + 6x_2 &\le 3000,\\ x_1 &\ge 416, \end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Из рис. 6.7 видно, что в задаче (6.26) максимум достигается в точке $C_1(415;\ 154)$, а в задаче (6.27) — в точке $C_2\left(416;\ 153\frac{1}{3}\right)$. Тогда $\xi(G_1^1) = f(415,\ 154) = 14\ 460$, а $\xi(G_2^1) = f\left(416,\ 153\frac{1}{3}\right) = 14\ 453\frac{1}{3}$ (рис. 6.8).

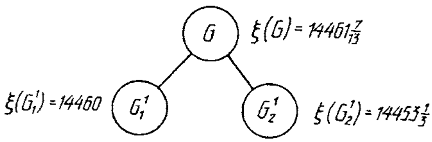


Рис. 6.8

Для плана $\mathbf{x}_1^1 = (415;\ 154)$ задачи (6.26) выполняются соотношения $f(\mathbf{x}_1^1) = \xi(G_1^1) = 14\ 460 > \xi(G_2^1) = 14\ 453\frac{1}{3}$, значит, план $\mathbf{x}_1^1 = (415;\ 154)$ является оптимальным планом задачи (6.22) — (6.25).

Задачи 6.11 — 6.16 решить с помощью ЭВМ.

6.11. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. Для их изготовления используются доски двух различных типов, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок 1-го типа и 1100 м досок 2-го типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 850 чел.-ч. В табл. 6.8 приведены нормативы затрат ресурсов каждого вида на изготовление одного изделия и прибыль от реализации единицы изделия.

Таблица 6.8

Ресурсы	Затраты на изготовление одного изделия			
	Стол	Стул	Бюро	Книжный шкаф
Доски, м:				
1-го типа	5	2	9	12
2-го типа	2	3	4	2
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2	5	9
Прибыль от реализации единицы изделия, ден. ед.	13	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль.

6.12. Из пункта *A* в пункт *B* ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В табл. 6.9 указан наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать поезда, а также количество пассажиров, вмещающихся в каждый из вагонов.

Таблица 6.9

Поезд	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Скорый	1	1	6	7	3
Пассажирский	1	—	9	5	2
Число пассажиров	—	—	58	40	32
Парк вагонов	11	9	82	70	26

Определить оптимальное число скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума.

6.13. Существует пять проектов использования капиталовложений. Для каждого проекта известны расходы на материалы, энергию, прочие расходы и прибыль от реализации проекта. Требуется определить набор проектов, обеспечивающий в пределах имеющихся ресурсов максимальную прибыль. Данные приведены в табл. 6.10.

Таблица 6.10

Номер проекта	Расходы, млн ден. ед.			Прибыль от проекта, млн ден. ед.
	на материалы	на энергию	прочие	
1	2	3	4	5
2	3	2	3	4
3	1,5	4	2	3
4	4	3	1	2
5	1	1,5	3	1
Ограничения на расходы	7	10	6	

6.14. Из семи блюд (двух первых, трех вторых и двух третьих) составляют обед. Пусть c_j и a_{ij} — соответственно цена j-го блюда и содержание i-го питательного вещества в j-м блюде ($j = \overline{1, 7}$; $i = \overline{1, 4}$). Определить набор блюд, обеспечивающий потребность b_i в каждом питательном веществе i, и минимальную стоимость обеда. Значения c_j, a_{ij}, b_i даны в табл. 6.11.

Таблица 6.11

j	c_j	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	a_{4j}
1	2	3	4	0	1
2	4	0	2	3	1
3	3	1	0	2	0
4	2	2	1	0	3
5	5	3	0	4	2
6	4	1	2	3	1
7	1	0	3	1	4
b_i	—	5	6	5	6

6.15. Пароход может быть использован для перевозки груза четырех наименований. Масса единицы груза j-го вида m_j (в тоннах), стоимость c_j (в условных денежных единицах), объем (в м^3) v_j ($j = \overline{1, 4}$). На пароход может быть погружено не более M т груза общим объемом, не превышающим V м^3. Кроме того, груза k-го вида на пароход можно взять не более d_k единиц. Сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход, чтобы общая стоимость перевозимого груза была максимальной? Значения m_j, c_j, v_j, k, M, V, d_k представлены в табл. 6.12.

Таблица 6.12

j	m_j	c_j	v_j	
1	4	12	1	$V = 21$
2	1	11	3	$M = 20$
3	2	4	2	$k = 1$
4	1	5	3	$d_k = 10$

6.16. На некотором предприятии выполняют три вида работ на оборудовании четырех типов. Заданы: себестоимость a_{ij} использования единицы оборудования типа j ($j = \overline{1, 4}$) на работе i ($i = \overline{1, 3}$); ограничение b_i по суммарной себестоимости для работы i; эффект от использования единицы оборудования j. Предполагается, что оборудование всех типов является неделимым и на оборудовании любого типа можно выполнять любую работу. Составить программу использования оборудования, обеспечивающую наивысший суммарный эффект. Значения a_{ij}, b_i, c_j приведены в табл. 6.13.

Таблица 6.13

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	
1	3	1	3	0	23	$c_1 = 1$ $c_2 = 4$
2	2	0	1	1	22	$c_3 = 3$
3	3	1	0	1	15	$c_4 = 5$

7

ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

7.1. Математические основы выпуклого программирования

Частные производные $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ функции $z = f(x, y)$ характеризуют скорость изменения этой функции в направлении осей Ox и Oy. Обобщением понятия производной является показатель изменения функции в произвольном направлении — производная по направлению.

Производной $dz/d\rho$ *функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x, y)$ *по направлению* α называется предел отношения приращения Δz функции z, возникшего при перемещении точки M из положения M_0 вдоль луча, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox, к величине этого перемещения, когда ρ стремится к нулю, т. е.

$$\frac{dz}{d\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}.$$

Оказывается, производная по направлению α является линейной комбинацией частных производных и вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (7.1)$$

Пример 7.1. Найти производную функции $z = 3x^4 + xy + y^3$ в точке $M_0(1;\ 2)$ по направлению, образующему с положительным направлением оси Ox угол 135°.

Р е ш е н и е. По формуле (7.1) находим

$$\left.\frac{dz}{d\rho}\right|_{\alpha=135^\circ} = (12x^3 + y)_{M_0}\cos 135^\circ + (x + 3y^2)_{M_0}\sin 135^\circ =$$

$$= 14\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 13\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. скорость изменения z выражается отрицательным числом, следовательно, функция z убывает в точке M_0 в указанном направлении.

Для функции n переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ расчетная формула (7.1) приобретает следующий вид:

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\cos\alpha_n,$$

где $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, ..., $\cos\alpha_n$ — направляющие косинусы.

7.1. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).

7.2. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg} xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.

7.3. Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке (1; 1; 2) в направлении, образующем с осями координат углы соответственно 60°, 45°, 60°.

7.4. Найти производную функции $w = xyz$ в точке (5; 1; 2) в направлении от этой точки к точке (9; 4; 14).

7.5. Найти производную от функции $z = \ln(x + y)$ в точке (1; 2), принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

В оптимизационных задачах особое значение имеет направление наискорейшего возрастания (убывания) целевой функции, определяемое градиентом (антиградиентом) этой функции.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в данной точке $M_0(x, y)$ называется вектор, расположенный в плоскости xOy и имеющий своими координатами частные производные функции z, вычисленные в этой точке. Модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания (убывания) функции.

Градиент функции $z = f(x, y)$ в каждой точке $M_0(x, y)$ направлен по нормали к линии уровня поверхности $z = f(x, y)$, проходящей через эту точку.

Понятие градиента легко обобщается на случай функции n переменных.

Если функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0 = (x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$, то *градиентом* $\nabla f(\mathbf{x})$ *в точке* $\mathbf{x}_0$ называется n-мерный вектор, координаты которого равны частным производным функции $f(\mathbf{x})$, вычисленным в точке $\mathbf{x}_0$, т. е. $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_1;\ \partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_2;\ \ldots;\ \partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_n)$.

Все свойства градиента сохраняются и в n-мерном пространстве.

Пример 7.2. Найти направление наискорейшего возрастания функции $z = x^2 + xy + 5$ в точке $M_0(1; -1)$ и вычислить наибольшую скорость возрастания функции z в этой точке.

Р е ш е н и е. Находим координаты градиента в точке M_0: $(\partial z/\partial x)_{M_0} = (2x + y)_{M_0} = 1$, $(\partial z/\partial y)_{M_0} = (x)_{M_0} = 1$. Итак, $(\nabla z)_{M_0} = (1;\ 1)$. Следовательно, искомое направление составляет 45° с осью Ox. Находим модуль градиента: $|\nabla z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2$, который и характеризует скорость возрастания функции z в точке M_0 в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.

7.6. Построить линии уровня, вычислить и построить градиент следующих функций в указанных точках:

а) $z = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$, $(4;\ 5)$;

б) $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$, $(6;\ 4)$;

в) $z = 2x - x^2 - y$, $(1;\ 2)$.

7.7. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$ в направлении $I = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$. Чему равен градиент в этой точке?

7.8. Найти градиент функции $z = 2xy$. Убедиться, что он перпендикулярен к линии уровня.

7.9. Дана функция $z = \arcsin\,(x/(x + y))$. Найти угол между градиентами этой функции в точках $(1;\ 1)$ и $(3;\ 4)$.

7.10. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = (x + \sqrt{y}\,)/y$ в точке $(2;\ 1;\ 3)$.

Наиболее глубоко изучены оптимизационные задачи с выпуклыми и вогнутыми функциями. Функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой (вогнутой)*, если для любых точек $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ из этого множества и любого $0 \le \lambda \le 1$ справедливо неравенство

$$f(\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'') \le \lambda f(\mathbf{x}') + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}'')$$

$$(f(\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'') \ge \lambda f(\mathbf{x}') + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}'')).$$

Если функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,\ k})$ являются выпуклыми на выпуклом множестве X, то выпуклой на X будет и линейная комбинация этих функций.

Если $\varphi(\mathbf{x})$ — выпуклая функция при всех $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, то будет выпуклым и множество решений системы $\varphi(\mathbf{x}) \le b$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$. Аналогичное утверждение справедливо и для вогнутых функций.

Выпуклая (вогнутая) функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве X, достигает своего глобального минимума (максимума) в каждой точке $\mathbf{x}$, в которой градиент функции обращается в нуль.

Локальный минимум (максимум) выпуклой (вогнутой) функции $f(\mathbf{x})$, определенной на выпуклом множестве X, совпадает с ее глобальным минимумом (максимумом) на этом множестве.

Функция $f(\mathbf{x})$ будет выпуклой, если ее вторые частные производные образуют матрицу, в которой все главные миноры неотрицательны.

Пример 7.3. Показать, что функция $z = 4 - 3x^2 + x - 2y^2$ вогнутая.

Р е ш е н и е. Будем рассматривать данную функцию как линейную комбинацию функций $f(x) = 4 - 3x^2 + x$ и $\varphi(y) = -2y^2$. В таком случае достаточно показать, что вогнутыми являются функции $f(x)$ и $\varphi(y)$. Докажем вогнутость функции $f(x) = 4 - 3x^2 + x$. С этой целью вычислим

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 4 - 3(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 +$$

$$+ (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 4 - 3\lambda^2 x_1^2 - 6\lambda(1-\lambda)x_1x_2 -$$

$$- 3(1-\lambda)^2 x_2^2 + \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = 4 - \underline{3\lambda^2 x_1^2} - \underline{\underline{6\lambda x_1x_2}} +$$

$$+ \underline{6\lambda^2 x_1x_2} - \underline{3\lambda^2 x_2^2} + \underline{\underline{\lambda x_1}} + x_2 - \underline{\underline{\lambda x_2}} - 3x_2^2 - \underline{\underline{6\lambda x_2^2}} =$$

$$= -\lambda^2(3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2) + \lambda(6x_2^2 - 6x_1x_2 + x_1 - x_2) +$$

$$+ (4 - 3x_2^2 + x_2).$$

Так как $0 \le \lambda \le 1$, то $\lambda^2 \le \lambda$, а $-\lambda^2 \ge -\lambda$. Учитывая это, переходим от полученного выше равенства к следующему неравенству:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge -\lambda(3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2) +$$

$$+ \lambda(6x_2^2 - 6x_1x_2 + x_1 - x_2) + (4 - 3x_2^2 + x_2) =$$

$$= \lambda(-3x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_2^2 - 6x_1x_2 + x_1 - x_2) +$$

$$+ (4 - 3x_2^2 + x_2) = \lambda(-3x_1^2 + x_1 + 4) + (-4\lambda + 4 +$$

$$+ 3\lambda x_2^2 - \lambda x_2 - 3x_2^2 + x_2) = \lambda(4 - 3x_1^2 + x_1) +$$

$$+ (1-\lambda)(4 - 3x_2^2 + x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Итак, $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$, что, по определению, и свидетельствует о вогнутости функции $f(x) = 4 - 3x^2 + x$.

Аналогичным образом можно доказать, что и функция $\varphi(y)$ вогнутая, а значит, вогнутой является и их линейная комбинация, т. е. данная функция $z = 4 - 3x^2 + x - 2y^2$.

7.11. Показать, что если $f(\mathbf{x})$ — выпуклая (вогнутая) функция, то выпуклыми (вогнутыми) будут:

а) $f(\mathbf{x}) + a$; б) $f(\mathbf{x} + a)$; в) $af(\mathbf{x})$ при $a > 0$.

7.12. Показать, что функция $z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + 1$ выпуклая.

7.13. Показать, что функция $z = 2x - x^2 - y^2$ вогнутая.

7.14. Показать, что функция $z = (x - 2)^2 + y^2$ выпуклая.

7.15. Показать, что функция $z = x^2 + 2xy + y^2$ выпуклая.

7.16. Показать, что функция $z = 1/x_1 + 1/x_2$ при $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ выпуклая.

7.2. Задача выпуклого программирования. Составление моделей задач выпуклого программирования

Общая задача нелинейного программирования ставится следующим образом: требуется найти значения n переменных x_1, x_2, ..., x_n, которые удовлетворяют m уравнениям и неравенствам

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\leq, =, \geq\}b_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{7.2}$$

и максимизируют (минимизируют) функцию

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{7.3}$$

Предполагается, что вид функций φ_i известен, а b_i — заданные постоянные. Величины m и n между собой не связаны, так что m может быть больше, меньше или равно n. В каждом из ограничений (7.2) сохраняется только один из знаков: $\leq$, $=$ или $\geq$. Обычно некоторые или все переменные удовлетворяют условию неотрицательности.

В отличие от линейных задач в нелинейных допустимая область может быть с бесконечным множеством крайних точек, целевая функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области и, более того, иметь несколько локальных экстремумов. Этими причинами объясняется отсутствие общих методов, подобных симплекс-методу в линейном программировании, позволяющих решать любые задачи нелинейного программирования. Вместе с тем отдельные специальные типы нелинейных задач достаточно хорошо изучены. Это относится и к задачам с выпуклыми (вогнутыми) целевыми функциями, рассматриваемыми на выпуклых множествах.

В теории в качестве основной *задачи выпуклого программирования* обычно рассматривается задача минимизации выпуклой функции n переменных $z = f(\mathbf{x})$ при ограничениях $\varphi_i(\mathbf{x}) \le 0$ $(i = \overline{1, m})$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, где функции $\varphi_i(\mathbf{x})$ предполагаются выпуклыми. Выпуклость множества допустимых решений обусловливается выпуклостью функций $\varphi_i(\mathbf{x})$.

Если $f(\mathbf{x})$ и $\varphi_i(\mathbf{x})$ — вогнутые функции, то имеем задачу максимизации $f(\mathbf{x})$ при ограничениях $\varphi_i(\mathbf{x}) \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.

Пример 7.4. Предприятие может выпускать два вида изделий. На их изготовление идет три типа ресурсов. Запасы ресурсов на предприятии, плановые нормы их расхода a_{ij} $(i = \overline{1, 3};\ j = 1,\ 2)$, плановая себестоимость c_j и оптовые цены указаны в табл. 7.1 (все данные в расчете на 1 тыс. шт. изделий).

Таблица 7.1

Тип ресурса	Запас ресурса	Нормы расхода на одно изделие вида	
		А	*Б*
I	100	10	20
II	120	20	10
III	150	20	20
Себестоимость		5	10
Цена		7	13

Из-за брака в процессе производства расход ресурсов зависит от объема x_j производства изделий и в первом приближении выражается линейной функцией $a_{ij} + x_j$, а себестоимость c_j продукции — функцией $c_j + 0{,}1x_j$. Изделия могут выпускаться в любых соотношениях, так как сбыт обеспечен. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Решение. На изготовление планируемых к выпуску x_1 и x_2 единиц изделий *А* и *Б* (за единицу изделия примем 1 тыс. шт.) будет израсходовано $(10 + x_1)x_1 + (20 + x_2)x_2$ единиц ресурса *I*; $(10 + x_1)$ и $(20 + x_2)$ — расход ресурса I на единицу изделия соответственно A и $Б$. По условию $(10 + x_1)x_1 + (20 + x_2)x_2 \leq 100$ или

$$10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 100. \qquad (7.4)$$

Аналогично получаем ограничения по ресурсам II и III:

$$20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2 \leq 120, \qquad (7.5)$$

$$20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 150. \qquad (7.6)$$

В результате реализации единицы изделия A предприятие получит прибыль $7 - (5 + 0{,}1x_1)$ ден. ед., единицы изделия $Б$ — прибыль $13 - (10 + 0{,}1x_2)$ ден. ед. Общая прибыль предприятия $z = (7 - (5 + 0{,}1x_1))x_1 + (13 - (10 + 0{,}1x_2))x_2$ или

$$z = 2x_1 + 3x_2 - 0{,}1\,x_1^2 - 0{,}1\,x_2^2\,. \qquad (7.7)$$

Итак, задача свелась к нахождению неотрицательных x_1^* и x_2^*, удовлетворяющих нелинейным ограничениям (7.4)—(7.6) и доставляющих максимум нелинейной функции (7.7).

В целевой функции и ограничениях переменные содержатся в степенях выше первой. Это характерный признак задачи нелинейного программирования. Можно показать, что и целевая функция, и ограничительные функции в задаче (7.4)—(7.7) являются вогнутыми, а потому задача относится к выпуклому программированию.

7.17. Составить экономико-математическую модель задачи и на ее основе определить место строительства завода между двумя пунктами сбыта, расстояние между которыми 100 км, и размер поставок в каждый из пунктов, если валовой выпуск продукции завода составляет 150 ед. Зависимости продажной цены x_i ($i = 1, 2$) единицы продукции в каждом из пунктов сбыта и затрат на перевозки единицы продукции от расстояния y_i между заводом и пунктом сбыта задаются табл. 7.2.

Таблица 7.2

Пункт сбыта	Продажная цена	Затраты на перевозки
1	$15 - 0{,}1x_1$	$1{,}5 + 0{,}1y_1$
2	$12 - 0{,}08x_2$	$1{,}5 + 0{,}05y_2$

7.18. Составить экономико-математическую модель задачи и найти оптимальный план выпуска продукции двух видов с учетом ограниченных ресурсов сырья (120 кг), электроэнергии (280 кВт·ч) и оборудования (300 станко-ч) при следующих нормах расхода на единицу продукции: сырья 3 и 2 кг/ед., электроэнергии 4 и 7 кВт·ч и оборудования $50 - 5x_1$ и $20 - 4x_2$, где x_1 и x_2 — искомое число производимых единиц продукции 1-го и 2-го вида соответственно.

7.3. Графоаналитическое решение задачи нелинейного программирования

С геометрической точки зрения задача выпуклого программирования сводится к нахождению в выпуклой области, определяемой системой ограничений задачи, точки, через которую проходит линия уровня поверхности, задаваемой целевой функцией $z = f(\mathbf{x})$, соответствующая наименьшему (наибольшему) значению параметра z. В частности, если целевой является нелинейная выпуклая (вогнутая) функция, а ограничительные функции линейны, то областью допустимых решений будет, вообще говоря, либо выпуклый многогранник, либо выпуклая неограниченная многогранная область. При этом целевая функция свой конечный экстремум, даже если он единственный, может принимать как на границе, так и внутри многогранника допустимых решений.

Пример 7.5. Найти экстремальные значения функции $z = x_1 + 3x_2$ в области неотрицательных решений системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} 9 \le x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 \le 36, \\ x_1 + x_2 \ge 8. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Целевая функция z определяет в трехмерном пространстве плоскость. Ее можно задать на координатной плоскости x_1Ox_2 проекциями линий уровня $z =$ = const. Это будет семейство параллельных прямых, перпендикулярных к вектору $\mathbf{c} = (1;\ 3)$ (рис. 7.1). Прежде чем изобразить на плоскости x_1Ox_2 множество допустимых решений $(x_1,\ x_2)$ задачи, преобразуем двойное неравенство, выделив полные квадраты относительно переменных x_1 и x_2:

$$9 \le (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 36.$$

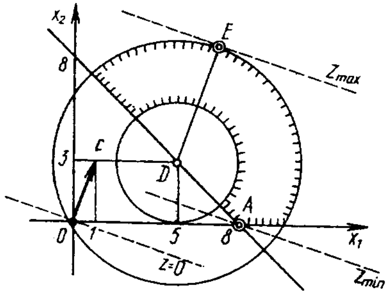


Рис. 7.1

Теперь видно, что допустимая область (на рис. 7.1 она заштрихована) ограничена двумя окружностями, заданными уравнениями $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$ и $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 9$, с общим центром $D(5;\ 3)$ и радиусами, равными соответственно 6 и 3, прямой $x_1 + x_2 = 8$ и осями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

С учетом вектора **с**, являющегося градиентом целевой функции z, на рис. 7.1 разрешающими линиями уровня $z_{\min}$ и $z_{\max}$ засечены точки A и E, в которых функция z достигает соответственно минимума и максимума в допустимой области. Координаты точки A находятся непосредственно по рисунку: $A(8;\ 0)$. Для определения координат точки E, в которой разрешающая линия уровня $z_{\max}$ касается граничной окружности, решаем совместно уравнения этой окружности и прямой DE, перпендикулярной к касательной $z_{\max}$, т. е. уравнения $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$ и $x_1 - 5 = (x_2 - 3)/3$. Учитывая неотрицательность x_1 и x_2, находим:

$$x_1 = 5 + 6\sqrt{0{,}1},\ x_2 = 3 + 18\sqrt{0{,}1}.$$

Итак, $z_{\min} = 8$ и достигается в точке $(8;\ 0)$; $z_{\max} = 14 + 6\sqrt{10}$ и достигается в точке $(5 + 6\sqrt{0{,}1};\ 3 + 18\sqrt{0{,}1})$.

Пример 7.6. Предприятие выпускает изделия A и $Б$, при изготовлении которых используется сырье C_1 и C_2. Известны запасы b_i $(i = 1,\ 2)$ сырья, нормы a_{ij} $(j = 1,\ 2)$ его расхода на единицу изделия, оптовые цены p_j на изделия и их плановая себестоимость c_j^0. Как только объем выпускаемой продукции перестает соответствовать оптимальному размеру предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведет к повышению себестоимости продукции и в первом приближении фактическая себестоимость c_j описывается функцией $c_j = c_j^0 + c_j' x_j$, где c_j' — некоторая постоянная. Все числовые данные приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	c_1'	c_2'
90	88	13	6	8	11	12	10	7	8	0,2	0,2

Составить экономико-математическую модель задачи и на ее основе найти план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию наивысшую прибыль в условиях нарушения баланса между объемом выпуска и оптимальным размером предприятия.

Решение. Обозначая через z сумму прибыли, получаемой предприятием после реализации x_1 выпущенных изделий A и x_2 изделий $Б$, приходим к следующей модели задачи: максимизировать функцию

$$z = (p_1 - (c_1^0 + c_1' x_1))x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2' x_2))x_2 \qquad (7.8)$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \qquad (7.10)$$

Подставляя в модель (7.8)—(7.10) числовые данные из табл. 7.3 и упрощая целевую функцию, получаем:

$$\max z = 5x_1 - 0{,}2\,x_1^2 + 2x_2 - 0{,}2\,x_2^2; \qquad (7.11)$$

$$\left.\begin{aligned} 13x_1 + 6x_2 \le 90, \\ 8x_1 + 11x_2 \le 88, \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \qquad (7.13)$$

Функция (7.11) определяет в трехмерном пространстве параболоид вращения (нисходящий). Линиями пересечения этой поверхности с плоскостями, параллельными координатной плоскости x_1Ox_2 (линиями уровня), будут окружности с центрами на оси поверхности, которая параллельна оси Oz. Поверхность (7.11) на плоскости x_1Ox_2 изобразится семейством концентрических окружностей с общим центром D (точка D является проекцией на плоскости x_1Ox_2 оси поверхности) (рис. 7.2). Для построения концентрических окружностей уравнение (7.11) приведено к виду $(x_1 - 12{,}5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 181{,}25 - 5z$. При $z = 10$, 15, 20, 25, 30, 35 их радиусы $r = \sqrt{181{,}25 - 5z}$ равны соответственно 11,46; 10,31; 9,01; 7,50; 5,59; 2,50, а общий центр D имеет координаты 12,5 и 5.

Допустимой областью переменных x_1 и x_2, определяемой неравенствами (7.12), (7.13), будет многоугольник $OABC$.

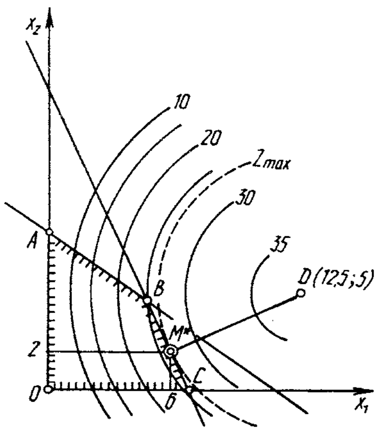


Рис. 7.2

Как видно из рис. 7.2, координаты x_1^* и x_2^*, точки, через которую на поверхности параболоида проходит линия уровня, отвечающая максимальному значению функции z (на рисунке проекцией этой линии является окружность радиусом $\sqrt{181{,}25 - 5z_{\max}}$, она изображена штриховой линией), можно найти, решая совместно уравнение $13x_1 + 6x_2 = 90$ граничной прямой BC и уравнение $x_2 - 5 = 6/13(x_1 - 12{,}5)$ прямой DM^*, проходящей через точку D перпендикулярно к граничной прямой BC. В результате получаем $x_1^* = 6$, $x_2^* = 2$. При этом $z_{max} = 26$. В данном случае точка оптимума оказалась на границе допустимой области.

Итак, для получения предприятием максимальной прибыли, составляющей 26 ден. ед., следует выпустить 6 изделий *А* и 2 изделия *Б*.

7.19. Найти максимум функции $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 \le 36$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.20. Найти максимум функции $z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $2x_1 + 5x_2 \le 30$, $2x_1 + x_2 \le 14$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.21. Найти максимум функции $z = x_1^2 + x_2^2$ при ограничениях $(x_1 - x_2)^2 \ge 9$, $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 36$, $x_1 + x_2 \ge 8$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.22. Максимизировать функцию $z = 2x_1 - 0{,}2x_1^2 + 3x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + 3x_2 \le 13$, $2x_1 + x_2 \le 10$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.23. Минимизировать функцию $z = -2x_1 + 0{,}1x_1^2 - 3x_2 + 0{,}1x_2^2$ при ограничениях $5x_1 + 13x_2 \le 51$, $15x_1 + 7x_2 \le 105$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.4. Метод множителей Лагранжа

В математическом анализе задачи типа (7.2), (7.3) называют *задачами на условный экстремум.* Если среди ограничений (7.2) нет неравенств, условий неотрицательности и дискретности переменных, $m < n$, функции f и φ_i непрерывны и имеют частные производные по крайней мере второго порядка, то задача приводится к виду:

$$\max(\min) z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \tag{7.14}$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{7.15}$$

Такие нелинейные задачи называют *классическими задачами оптимизации.* Их можно решать, по крайней мере в принципе, методами дифференциального исчисления.

В простейшем случае *условным экстремумом функции* $f(x_1, x_2)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что x_1 и x_2 удовлетворяют дополнительному условию (уравнению связи) $\varphi(x_1, x_2) = b$. Находят условный экстремум с помощью так называемой *функции Лагранжа*

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(b - \varphi(x_1, x_2)), \tag{7.16}$$

где λ — неотрицательный постоянный множитель (*множитель Лагранжа*), безусловный экстремум которой совпадает с условным экстремумом данной функции $f(x_1, x_2)$. Объясняется это тем, что для точек $(x_1; x_2)$, удовлетворяющих условию $\varphi(x_1, x_2) = b$, второе слагаемое в функции (7.16) обращается в нуль, и тогда $L = f$. Для остальных же точек $L \neq f$. Отсюда и следует, что задача на определение условного экстремума функции $f(x_1, x_2)$ может быть заменена нахождением обычного экстремума функции (7.16), ибо в области допустимых решений функцию $f(x_1, x_2)$ можно заменить функцией Лагранжа.

Необходимое условие экстремума сводится к существованию решения системы трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \partial L / \partial x_1 &= \partial f / \partial x_1 - \lambda \partial \varphi / \partial x_1 = 0, \\ \partial L / \partial x_2 &= \partial f / \partial x_2 - \lambda \partial \varphi / \partial x_2 = 0, \\ \partial L / \partial \lambda &= b - \varphi(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

с тремя неизвестными x_1, x_2 и λ, из которой можно, вообще говоря, определить эти неизвестные.

Есть и достаточные условия, при выполнении которых решение (x_1, x_2, λ) системы (7.17) определяет точку (стационарную), где функция f достигает экстремума. Этот вопрос решается на основе изучения знака второго дифференциала d^2L функции (7.16). Поскольку в стационарной точке полный дифференциал функции $\varphi(x_1, x_2)$ равен нулю, т. е.

$$(\partial \varphi / \partial x_1)dx_1 + (\partial \varphi / \partial x_2)dx_2 = 0 \quad (dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0)$$

и, кроме того, $\partial^2 L/d\lambda^2 = 0$, то второй дифференциал функции (7.16)

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}dx_2^2.$$

Функция $f(x_1, x_2)$ имеет в стационарной точке $(x_1; x_2; \lambda)$ условный максимум, если в ней $d^2L < 0$, и условный минимум, если $d^2L > 0$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких дополнительных ограничений (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется дополнительных уравнений связи.

Укажем последовательность решения классической задачи оптимизации методом множителей Лагранжа применительно к модели (7.14), (7.15):

1) составляют функцию Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 (b_i - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n));$$

2) находят все стационарные точки функции Лагранжа из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\partial L / \partial x_j = \partial f / \partial x_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\partial \varphi_i / \partial x_j) = 0 \ \ (j = \overline{1, n}), \\ &\partial L / \partial \lambda_i = b_i - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \ \ (i = \overline{1, m}); \end{aligned}\right\}$$

3) из стационарных точек функции Лагранжа, взятых без координат $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, выбирают такие, в которых функция f имеет условные экстремумы при наличии ограничений (7.15). Этот выбор осуществляют, например, с помощью достаточных условий. Однако чаще исследование упрощается, если использовать конкретные условия задачи.

Пример 7.7. Найти условные экстремумы функции $z = 6 - 4x_1 - 3x_2$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z = 6 - 4x_1 - 3x_2$ для точек ее пересечения с цилиндром $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (рис. 7.3).

Для аналитического решения прежде всего составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (6 - 4x_1 - 3x_2) + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Реализуя необходимые условия, составляем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \partial L/\partial x_1 &= -4 - 2\lambda x_1 = 0, \\ \partial L/\partial x_2 &= -3 - 2\lambda x_2 = 0, \\ \partial L/\partial \lambda &= 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

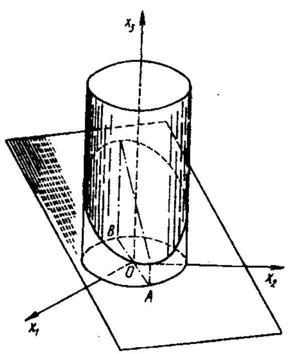


Рис. 7.3

решая которую, находим: $\lambda' = -5/2$, $x_1' = 4/5$, $x_2' = 3/5$; $\lambda'' = 5/2$, $x_1'' = -4/5$, $x_2'' = -3/5$.

А теперь обратимся к достаточным условиям экстремума. Так как $\partial^2 L/\partial x_1^2 = -2\lambda$, $\partial^2 L/\partial x_2^2 = -2\lambda$, $\partial^2 L/\partial x_1 \partial x_2 = 0$, то $d^2L = -2\lambda(dx_1^2 + dx_2^2)$.

Если $\lambda' = -5/2$, $x_1' = 4/5$, $x_2' = 3/5$, то $d^2L > 0$ и, значит, в точке $A(4/5;\ 3/5)$ функция z имеет условный минимум. Если же $\lambda'' = 5/2$, $x_1'' = -4/5$, $x_2'' = -3/5$, то $d^2L < 0$ и в точке $B(-4/5;\ -3/5)$ функция z имеет условный максимум. При этом $z_{\max} = 11$, $z_{\min} = 1$.

Множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Доказывается, что если в условиях (7.15) величины b_i будут меняться, то выполняется соотношение $\partial f_{\max}/\partial b_i = \lambda_i$ $(i = \overline{1, m})$. Если f интерпретировать как доход или стоимость, b_i — как затраты некоторых ресурсов, то множители λ_i будут показывать, как изменится максимальный доход (или минимальная стоимость), если количество ресурса i-го вида увеличится на единицу.

Метод множителей Лагранжа обобщается на случай, когда переменные неотрицательны и некоторые ограничения заданы в форме неравенств. Однако это обобщение имеет преимущественно теоретическое значение и не дает конкретных вычислительных приемов.

В задачах 7.24—7.29 найти точки условных экстремумов данных функций.

7.24. $z = x_1 x_2$, если $x_1 + x_2 = 1$.

7.25. $z = x_1/2 + x_2/3$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

7.26. $z = x_1^2 + x_2^2$, если $x_1/2 + x_2/3 = 1$.

7.27. $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$.

7.28. $z = x_1 x_2^2 x_3^3$, если $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

7.29. $z = x_1 x_2 + x_2 x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 = 2$, $x_2 + x_3 = 2$, $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

В задачах 7.30, 7.31 найти наибольшие и наименьшие значения данных функций, аргументы которых связаны указанными условиями.

7.30. $z = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

7.31. $z = x_1x_2x_3$, если $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8$.

7.5. Градиентные методы

Градиентные методы можно применять при решении, вообще говоря, любой задачи нелинейного программирования. Но они приводят лишь к локальному экстремуму, а поэтому оказываются более эффективными при решении задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум является одновременно и глобальным.

Для выпуклой функции необходимым и достаточным условием оптимальности точки $\mathbf{x}^*$ является равенство нулю градиента функции в этой точке.

Градиентный метод основан на простой идее. Если заранее известно, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет в допустимой области единственный экстремум, то поиск точки, в которой он достигается, целесообразно организовать так. В допустимой области необходимо взять произвольную точку $\mathbf{x}_0$ и с помощью градиента (антиградиента) определить направление, в котором $f(\mathbf{x})$ возрастает (убывает) с наибольшей скоростью (рис. 7.4). Сделав небольшой «шаг» в найденном направлении, перейти в новую точку $\mathbf{x}_1$. Потом снова определить наилучшее направление для перехода в очередную точку $\mathbf{x}_2$ и т. д. Иначе говоря, надо построить последовательность точек $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ так, чтобы она сходилась к точке экстремума $\mathbf{x}^*$, т. е. для точек последовательности выполнялись условия $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2) < \ldots$ $(f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_2) > \ldots)$.

Величина шага из точки $\mathbf{x}_0$ по направлению градиента $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ (антиградиента — $\nabla f(\mathbf{x}_0)$) определяется значением параметра λ в уравнении прямой

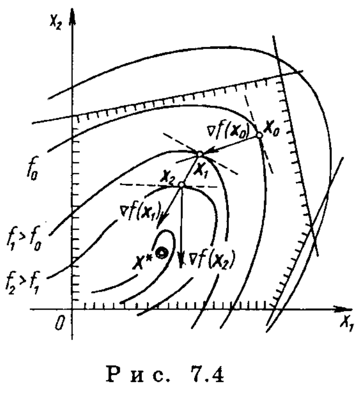


Рис. 7.4

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)\lambda \quad (\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (-\nabla f(\mathbf{x}_0))\lambda), \tag{7.18}$$

проходящей через $\mathbf{x}_0$ параллельно градиенту (антиградиенту). Значение λ можно выбрать, исходя из конкретных условий задачи или руководствуясь следующими соображениями: перемещение по прямой (7.18) в новую точку $\mathbf{x}_1$ сопровождается изменением функции f на величину Δf, которая зависит от выбранного значения λ. Значение λ^*, при котором приращение Δf достигает наибольшей величины, можно определить, используя необходимый признак экстремума Δf:

$$d\Delta f/d\lambda = \nabla f(\mathbf{x}_1) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0. \tag{7.19}$$

Градиентные методы, как правило, дают точное решение за бесконечное количество шагов и только в некоторых случаях — за конечное.

Пример 7.8. Минимизировать функцию $f = -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18$ при ограничениях $4x_1 + 3x_2 \le 24$, $x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Р е ш е н и е. Возьмем в допустимой области произвольную точку, например $\mathbf{x}_0 = (1{,}5;\ 3)$. Она действительно принадлежит этой области, так как $4 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 3 = 15 < 24$ и $1{,}5^2 - 5 \cdot 1{,}5 + 3^2 = 3{,}75 < 6$. При этом $f(\mathbf{x}_0) = 8$.

Вычислим координаты антиградиента: $-\partial f/\partial x_1 = 6 - 2x_1$, $-\partial f/\partial x_2 = 4 - 2x_2$. Итак, $-\nabla f(\mathbf{x}) = (6 - 2x_1;\ 4 - 2x_2)$, а в точке $\mathbf{x}_0$ $-\nabla f(\mathbf{x}_0) = (3;\ -2)$. Поскольку $-\nabla f(\mathbf{x}_0) \ne 0$, то $\mathbf{x}_0$ не является точкой экстремума.

Переместимся из $\mathbf{x}_0$ вдоль антиградиента по прямой (7.18) в новую точку $\mathbf{x}_1$. Для определения координат точки $\mathbf{x}_1 = (1{,}5 + 3\lambda;\ 3 - 2\lambda)$ нужно выбрать значение параметра λ. Используя условие (7.19), найдем $d\Delta f/d\lambda = (-\nabla f(\mathbf{x}_1)) \times (-\nabla f(\mathbf{x}_0)) = (6 - 2(1{,}5 + 3\lambda);\ 4 - 2(3 - 2\lambda))(3;\ -2) = 13 - 26\lambda = 0$, откуда $\lambda = 0{,}5$. Так как $d^2\Delta f/d\lambda^2 = -26 < 0$, то при $\lambda = 0{,}5$ изменение Δf значения функции f достигает наибольшей величины. Получающаяся при этом точка $\mathbf{x}_1 = (1{,}5 + 3 \cdot 0{,}5;\ 3 - 2 \cdot 0{,}5) = (3;\ 2)$ принадлежит допустимой области ($4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18 < 24$, $3^2 - 5 \cdot 3 + 2^2 = -2 < 6$).

В точке $\mathbf{x}_1$ антиградиент $-\nabla f(\mathbf{x}_1) = (6 - 2 \cdot 3;\ 4 - 2 \cdot 2) = (0;\ 0)$. Значит, никакими перемещениями из точки $\mathbf{x}_1$ функцию f уменьшить нельзя и $\mathbf{x}_1$ — искомая точка минимума $\mathbf{x}^*$. Итак, $\mathbf{x}^* = (3;\ 2)$, $f_{\min} = 5$.

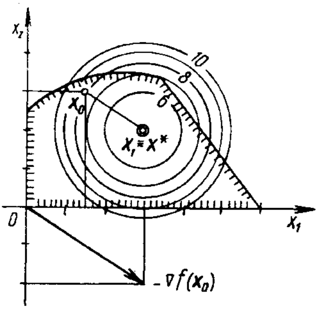


Рис. 7.5

На рис. 7.5 дана геометрическая иллюстрация решения задачи. Заданная поверхность $f = -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18$ изображена линиями уровня (концентрическими окружностями) (см. пример 7.6, рис. 7.2). Для большей наглядности антиградиент $-\nabla f(\mathbf{x}_0) = (3;\ 2)$ построен при начале координат. Траектория наискорейшего спуска $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1$ в точку минимума $\mathbf{x}^*$ параллельна антиградиенту. Граничными линиями допустимой области являются оси координат, прямая $4x_1 + 3x_2 = 24$ и дуга окружности $x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 = 6$. Для построения этой дуги уравнение окружности приведено к виду $(x_1 - 2{,}5)^2 + (x_2 - 0)^2 = 3{,}5^2$. Отсюда следует, что центр этой окружности находится в точке $(2{,}5;\ 0)$, а радиус равен 3,5.

7.32. Максимизировать функцию $f = 2x_1 - 0{,}2x_1^2 + 2{,}4x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $x_1^2 + x_2^2 \leq 100$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 8$.

7.33. Минимизировать функцию $f = -5{,}6x_1 + 0{,}4x_1^2 - 8{,}8x_2 + 0{,}4x_2^2$ при ограничениях $0 \leq x_1 \leq 6$, $x_1^2 + x_2^2 \leq 144$, $x_1 \leq x_2$.

7.34. Минимизировать функцию $f = -3{,}2x_1 + 0{,}2x_1^2 - 3{,}6x_2 + 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 \geq 20$, $-6x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 \leq 66$, $20x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 \geq 25$.

7.35. Максимизировать функцию $f = 3{,}6x_1 - 0{,}2x_1^2 + 0{,}8x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \geq 10$, $x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \leq 75$, $x_2 \geq 0$.

7.36. Минимизировать функцию $f=-3x_1+0{,}25\,x_1^2-4x_2+0{,}25\,x_2^2$ при ограничениях $x_1^2+x_2^2-10x_2\le 75$, $x_1^2-10x_1+x_2^2\le 75$, $x_1+x_2\ge 10$.

Выше рассмотрены задачи, в которых целевая функция достигает экстремума внутри допустимой области. Рассмотрим теперь последовательность решения нелинейной задачи с линейными ограничениями, когда целевая функция достигает экстремума на границе области. Итак,

$$\max z = f(\mathbf{x}); \tag{7.20}$$

$$a_i\cdot\mathbf{x}\le a_{i0}\ \ (i=\overline{1,m}), \tag{7.21}$$

$$\mathbf{x}\ge 0, \tag{7.22}$$

где $\mathbf{x}=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$; $\mathbf{a}_i=(a_{i1};\ a_{i2};\ \ldots;\ a_{in})$. Предполагается, что $f(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные в каждой точке допустимой области.

Начнем с геометрической иллюстрации процесса решения (рис. 7.6). Предположим, что начальная точка $\mathbf{x}_0$ расположена внутри допустимой области. Из точки $\mathbf{x}_0$ можно двигаться в направлении градиента $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ до границы области, если максимум функции f не будет достигнут ранее. В нашем случае $f(\mathbf{x})$ все время возрастает, поэтому остановиться следует в точке $\mathbf{x}_1$ на граничной прямой. Как видно из рисунка, дальше двигаться в направлении градиента нельзя, так как выйдем из допустимой области. Поэтому необходимо найти вектор $\mathbf{r}_1$, составляющий с вектором $\nabla f(\mathbf{x}_1)$ наименьший острый угол по сравнению с любым вектором, выходящим из точки $\mathbf{x}_1$ и лежащим в допустимой области. Аналитически такой вектор найдется из условия максимизации скалярного произведения $\nabla f(\mathbf{x}_1)\cdot\mathbf{r}_1$ (точнее, косинуса угла между указанными векторами), что равносильно минимизации

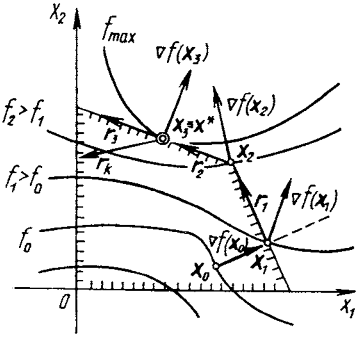


Рис. 7.6

острого угла между векторами $\nabla f(\mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{r}_1$, ибо чем больше косинус острого угла, тем меньше сам угол. В данном случае вектор $\mathbf{r}_1$, указывающий наивыгоднейшее направление, совпадает с граничной прямой. Таким образом, на следующем шаге мы двигаемся вдоль граничной прямой до тех пор, пока функция f возрастает (в нашем случае — до точки $\mathbf{x}_2$). Из рисунка видно, что далее следует перемещаться в направлении вектора $\mathbf{r}_2$, т. е. вдоль следующей граничной прямой, до точки $\mathbf{x}_3$. Здесь процесс оптимизационного поиска заканчивается, так как, судя по рисунку, в точке $\mathbf{x}_3$ функция $f(\mathbf{x})$ имеет локальный максимум. В этой точке $f(\mathbf{x})$ достигает также и глобального максимума в рассматриваемой области. Градиент $\nabla f(\mathbf{x}_3)$ в точке максимума $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}^*$ составляет тупой угол с любым вектором $\mathbf{r}_k$ из допустимой области, проходящим через точку $\mathbf{x}_3$, поэтому косинус его, а значит, и скалярное произведение $\nabla f(\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{r}_3$ будут отрицательными, за исключением одного случая. Для вектора $\mathbf{r}_3$, направленного по граничной прямой, скалярное произведение $\nabla f(\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{r}_3 = 0$, так как $\nabla f(\mathbf{x}_3)$ и $\mathbf{r}_3$ взаимно перпендикулярны. Это равенство и свидетельствует о том, что в точке $\mathbf{x}_3$ функция $f(\mathbf{x})$ достигла максимума.

Обратимся к аналитическому решению задачи (7.20)—(7.22). Предположим, что в допустимой области выбрана некоторая точка $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, причем $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{d}_0 \neq \mathbf{0}$. Если она расположена внутри области, то все ограничения (7.21), (7.22) выполняются как строгие неравенства и перемещаться в следующую точку целесообразно в направлении градиента $\mathbf{d}_0$, т. е. по прямой (7.18). Чтобы найти координаты новой точки $\mathbf{x}_1$ на этой прямой, надо так определить значение параметра $\lambda > 0$, чтобы координаты этой точки $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0\lambda$ прежде всего удовлетворяли ограничениям (7.21), (7.22) задачи. С этой целью решается система линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0\lambda) \le a_{i0} \quad (i = \overline{1, m}),\\ \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0\lambda \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

и находится интервал возможных значений параметра λ, при которых точка $\mathbf{x}_1$ будет принадлежать допустимой области. Далее в этом интервале определяется такое значение λ^*, при котором $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0\lambda^*)$ имеет локальный максимум по λ. Для этого решается либо уравнение

$$d\Delta f/d\lambda = \nabla f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0\lambda) \cdot \mathbf{d}_0 = 0, \tag{7.24}$$

когда перемещение идет вдоль градиента, либо аналогичное уравнение

$$d\Delta f/d\lambda = \nabla f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}\lambda) \cdot \mathbf{r} = 0, \tag{7.25}$$

когда движение происходит по направлению $\mathbf{r} \neq \mathbf{d}_0$.

Если в направлении градиента функция $f(\mathbf{x})$ возрастает до самой границы, то точка $\mathbf{x}_1$ окажется на граничной прямой. В таком случае двигаться в направлении градиента и дальше нельзя, ибо сразу будут нарушены некоторые из ограничений (7.21), (7.22). Определением координат точки $\mathbf{x}_1$ завершается первый этап решения задачи.

Второй этап (как и первый!) начинается с выбора наилучшего направления перемещения из имеющейся точки $\mathbf{x}_1$. Для определения допустимого направления $\mathbf{r}_1$ перемещения из $\mathbf{x}_1$, сопровождающегося увеличением значения $f(\mathbf{x})$, надо решить следующую вспомогательную задачу математического программирования: максимизировать

$$T_1 = \nabla f(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{r}_1 \tag{7.26}$$

при ограничениях

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_1 \le 0 \tag{7.27}$$

для тех i, при которых

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_1 = a_{i0}, \tag{7.28}$$

$$|\mathbf{r}_1| = 1, \tag{7.29}$$

где $\mathbf{r}_1 = (r_{11}; r_{12}; \ldots; r_{1n})$; $|\mathbf{r}| = \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2 + \ldots + r_{1n}^2}$. В результате будет найден вектор $\mathbf{r}_1$, составляющий с градиентом $\nabla f(\mathbf{x}_1)$ наименьший угол.

Условие (7.28) говорит о том, что точка $\mathbf{x}_1$ принадлежит границе допустимой области, а условие (7.27) означает, что перемещение из $\mathbf{x}_1$ направлено внутрь или по границе допустимой области. Условие нормализации (7.29) необходимо для ограничения величины $\mathbf{r}_1$, так как иначе значение функции (7.26) можно сделать сколь угодно большим. Рассматриваются различные формы условий нормализации. В зависимости от этого задача (7.26)—(7.29) может быть линейной или нелинейной.

После определения направления $\mathbf{r}_1$ аналогично описанному выше отыскивается наилучшее значение λ_1^* и находится следующая точка $\mathbf{x}_2$ и т. д. Процесс прекращается по достижении точки $\mathbf{x}_k$, в которой $\max T_k = \nabla f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{r}_k = 0$.

Пример 7.9. Максимизировать функцию $f = x_1 + 2x_2 - 0{,}5\,x_1^2 - 0{,}5\,x_2^2 - 5$ при ограничениях $2x_1 + 3x_2 \le 6$, $x_1 + 4x_2 \le 5$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Р е ш е н и е. Пусть оптимизационный поиск начинается с точки $\mathbf{x}_0 = (1{,}5; 0{,}5)$. Эта точка лежит внутри допустимой области, что легко проверяется. При этом $f(\mathbf{x}_0) = -3{,}75$.

За направление перемещения в следующую точку $\mathbf{x}_1$ принимаем направление градиента $\nabla f(\mathbf{x}) = (1 - x_1; 2 - x_2)$.

Обозначим его в точке $\mathbf{x}_0$ через $\mathbf{d}_0$. Координатами $\mathbf{d}_0$ будут $-0{,}5$ и $1{,}5$, т. е. $\mathbf{d}_0 = (-0{,}5;\ 1{,}5) \neq \mathbf{0}$.

Координаты точки $\mathbf{x}_1 = (x_{11};\ x_{12})$ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x_{11} &= x_{01} + d_{01}\lambda = 1{,}5 - 0{,}5\lambda, \\ x_{12} &= x_{02} + d_{02}\lambda = 0{,}5 + 1{,}5\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

Найдем значения параметра λ, при которых точка $\mathbf{x}_1$ будет принадлежать допустимой области. Система (7.23) в данном случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} 2(1{,}5 - 0{,}5\lambda) + 3(0{,}5 + 1{,}5\lambda) &\le 6, \\ (1{,}5 - 0{,}5\lambda) + 4(0{,}5 + 1{,}5\lambda) &\le 5, \\ 1{,}5 - 0{,}5\lambda &\ge 0, \\ 0{,}5 + 1{,}5\lambda &\ge 6. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, находим $-0{,}3333 \le \lambda \le 0{,}2727$. Нас интересуют лишь неотрицательные значения параметра λ, поэтому в полуинтервале $(0;\ 0{,}2727]$ найдем значение λ^*, при котором достигается наибольшее изменение Δf функции f, вызванное перемещением из точки $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{x}_1$. В соответствии с уравнением (7.24) имеем

$$d\Delta f/d\lambda = \nabla f(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{d}_0 =$$
$$= (-0{,}5 + 0{,}5\lambda;\ 1{,}5 - 1{,}5\lambda)(-0{,}5;\ 1{,}5) = 0$$

или $d\Delta f/d\lambda = 2{,}5 - 2{,}5\lambda = 0$, откуда $\lambda = 1$. Однако $\lambda = 1$ не принадлежит полуинтервалу $(0;\ 0{,}2727]$, поэтому $\lambda^* = 0{,}2727$.

В соответствии с равенствами (7.30) новая точка $\mathbf{x}_1 = (1{,}3636;\ 0{,}9091)$ и находится на граничной прямой, соответствующей второму неравенству системы ограничений, т. е. тому, которому отвечает взятое нами значение λ^*. В точке $\mathbf{x}_1$ функция принимает значение $f(\mathbf{x}_1) = -3{,}1612$, причем $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_0)$. На этом заканчивается первый этап решения.

В точке $\mathbf{x}_1$ градиент $\nabla f(\mathbf{x}_1) = (-0{,}3636;\ 1{,}0909)$, но вдоль него перемещаться нельзя, так как сразу выйдем из допустимой области (рис. 7.7). Поэтому надо найти другое направление движения. Соответствующий вектор $\mathbf{r}_1 = (r_{11};$

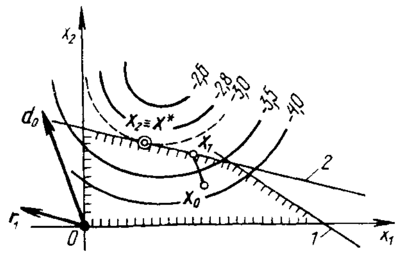


Рис. 7.7

r_{12}) будет решением задачи (7.26)—(7.29). В данном случае она сформулируется так: максимизировать $T_1 = \nabla f(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{r}_1 = (-0{,}3636;\ 1{,}0909)(r_{11};\ r_{12}) = -0{,}3636r_{11} + 1{,}0909r_{12}$ при ограничениях $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = (1;\ 4)(r_{11};\ r_{12}) = r_{11} + 4r_{12} = 0$, $\mathbf{r}_1 = \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2} = 1$.

Поскольку точка $\mathbf{x}_1$ располагается только на одной (второй) прямой, ограничивающей допустимую область ($i = 2$): $x_1 + 4x_2 = 5$, то условие (7.27) записано в форме равенства.

Система ограничительных уравнений получившейся задачи имеет всего два решения: (–0,9700; 0,2425) и (0,9700; 0,2425). Непосредственной подстановкой их в функцию T_1 устанавливаем, что максимум $T_1 \neq 0$ и достигается при (–0,9700; 0,2425). Таким образом, перемещаться из $\mathbf{x}_1$ надо вдоль вектора $\mathbf{r}_1 = (-0{,}9700;\ 0{,}2425)$, т. е. вдоль второй граничной прямой.

Для определения координат следующей точки $\mathbf{x}_2$:

$$\left.\begin{aligned} x_{21} &= x_{11} + r_{11}\lambda_1 = 1{,}3636 - 0{,}9700\lambda_1, \\ x_{22} &= x_{12} + r_{12}\lambda_1 = 0{,}9091 + 0{,}2425\lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

необходимо найти значение λ_1^* параметра λ_1, при котором функция $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_2$ достигает возможно большего значения. Рассуждаем аналогично предыдущему: точка $\mathbf{x}_2$ должна удовлетворять ограничениям (7.23), т. е.

$$\left.\begin{aligned} 2(1{,}3636 - 0{,}9700\lambda_1) + 3(0{,}9091 + 0{,}2425\lambda_1) &\le 6, \\ 1{,}3636 - 0{,}9700\lambda_1 &\ge 0, \\ 0{,}9091 + 0{,}2425\lambda_1 &\ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Второе ограничение мы опустили, поскольку точка $\mathbf{x}_2$ лежит на второй граничной прямой. Решая эту систему, устанавливаем, что λ_1 следует искать в полуинтервале (0; 1,4055]. При этом значение λ_1^* должно отвечать максимуму Δf. В соответствии с уравнением (7.25) $d\Delta f/d\lambda_1 = \nabla f(\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{r}_1 = (-0{,}3636 + 0{,}9700\lambda_1;\ 1{,}0909 - 0{,}2425\lambda_1)\times(-0{,}9700;\ 0{,}2425) = 0{,}6173 - \lambda_1 = 0$, откуда $\lambda_1 = 0{,}6173$. При этом $d^2\Delta f/d\lambda^2 = -1 < 0$. Значит, $\lambda_1^* = 0{,}6173$.

По формулам (7.31) находим координаты точки $\mathbf{x}_2 = (0{,}7647;\ 1{,}0588)$.

Если продолжить процесс, то при решении задачи (7.26)—(7.29) будет установлено, что максимум функции $T_2 = \nabla f(\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{r}_2$ равен нулю. Это свидетельствует о том, что дальнейшее увеличение целевой функции в заданной области невозможно. Следовательно, точка $\mathbf{x}_2$ является искомой точкой $\mathbf{x}^*$ максимума функции $f(\mathbf{x})$. При этом $f_{\max} = -2{,}9705$.

К этому же выводу можно прийти, анализируя рис. 7.7: в точке $\mathbf{x}_2$ одна из линий уровня касается границы области, т. е. точка $\mathbf{x}_2$ есть точка оптимума $\mathbf{x}^*$.

Задачи 7.37—7.39 решить градиентным методом, начиная процесс оптимизационного поиска с указанной точки $\mathbf{x}_0$ и сопровождая решение графической иллюстрацией.

7.37. Максимизировать функцию $f = 3x_1 - 0{,}2\,x_1^2 + x_2 - 0{,}2\,x_2^2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \le 7$, $x_1 + 2x_2 \le 10$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если $\mathbf{x}_0 = (1;\ 2)$.

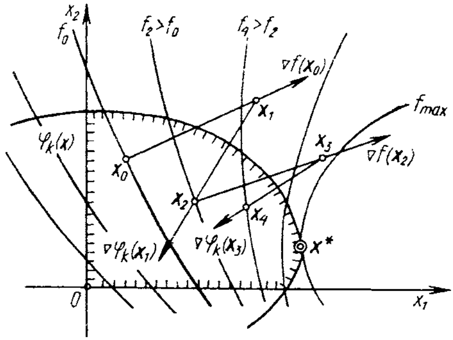
7.38. Максимизировать функцию $f = 2x_1 - 0{,}1\,x_1^2 + 3x_2 - 0{,}1\,x_2^2$ при ограничениях $5x_1 + 2x_2 \le 30$, $3x_1 + 4x_2 \le 24$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если $\mathbf{x}_0 = (3;\ 1)$.

7.39. Максимизировать функцию $f = 3x_1 - 0{,}1\,x_1^2 + 2x_2 - 0{,}1\,x_2^2$ при ограничениях $7x_1 + 5x_2 \le 35$, $x_1 + 2x_2 \le 10$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если $\mathbf{x}_0 = (1;\ 2)$.

Задачи 7.40, 7.41 выпуклого программирования решить градиентным методом.

7.40. Минимизировать функцию $f = -6x_1 + 2\,x_1^2 - 2x_1x_2 + 2\,x_2^2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.41. Максимизировать функцию $f = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3\,x_1^2 - 2\,x_2^2 - x_3^2/3$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.



Р и с. 7.8

В задачах с линейными ограничениями движение по граничным прямым оказывается не только возможным, но и целесообразным. При нелинейных ограничениях, определяющих выпуклую область, любое сколь угодно малое перемещение из граничной точки может сразу вывести за пределы допустимой области, а потому возникнет необходимость возвращения в эту область. Подобная ситуация характерна для задач, в которых экстремум функции $f(x)$ достигается на границе области. В связи с этим применяются различные способы перемещения, обеспечивающие построение последовательности точек, расположенных вблизи границы и внутри допустимой области, сходящейся к точке оптимума. При этом возможно и зигзагообразное движение вдоль границы с пересечением последней (рис. 7.8). Как видно из рисунка, возврат из точки $\mathbf{x}_1$ в допустимую область следует осуществлять вдоль градиента той граничной функции $\varphi_k(\mathbf{x})$, которая оказалась нарушенной. Это обеспечит отклонение очередной точки $\mathbf{x}_2$ в сторону точки экстремума $\mathbf{x}^*$. Признаком экстремума в подобном случае будет коллинеарность векторов ∇f и $\nabla\varphi_k$.

Пример 7.10. По условиям примера 7.4 найти оптимальный план выпуска изделий.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенства (7.4)—(7.6) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 100 - (10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2) \ge 0,\\ \varphi_2(x) &= 120 - (20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2) \ge 0,\\ \varphi_3(x) &= 150 - (20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2) \ge 0.\end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

Начнем оптимизационный поиск, например, с точки $\mathbf{x}_0 = (1;\ 3)$. Она принадлежит допустимой области, что легко проверяется подстановкой координат точки в ограничения (7.32). В точке $\mathbf{x}_0$ целевая функция (7.7) принимает значение, равное 10, т. е. $f(\mathbf{x}_0) = 10$. Геометрическая иллюстрация процесса приближения к точке экстремума приведена на рис. 7.9.

Координаты градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ равны $\partial f/\partial x_1 = 2 - 0{,}2x_1$, $\partial f/\partial x_2 = 3 - 0{,}2x_2$, а в точке $\mathbf{x}_0$ $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (1{,}8;\ 2{,}4)$.

Из точки $\mathbf{x}_0$ переместимся вдоль градиента $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ в новую точку $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)\lambda_1 = (1 + 1{,}8\lambda_1;\ 3 + 2{,}4\lambda_1)$, причем параметру λ_1 дадим значение, например, 0,5. Получим $\mathbf{x}_1 = (1{,}9;\ 4{,}2)$.

Проверим, принадлежит ли точка $\mathbf{x}_1$ допустимой области: $\varphi_1(\mathbf{x}_1) = -24{,}25 < 0$, $\varphi_2(\mathbf{x}_1) = 18{,}75 > 0$, $\varphi_3(\mathbf{x}_1) = 6{,}75 > 0$. Точка $\mathbf{x}_1$ лежит за пределами допустимой области, так как нарушено первое ограничение системы (7.32). Необходимо вернуться в область и при этом сдвинуться в сторону точки максимума. Находим градиент нарушенной граничной функции $\varphi_1(\mathbf{x})$ и вычисляем его координаты в точке $\mathbf{x}_1$: $\partial\varphi_1/\partial x_1 = -10 - 2x_1$, $\partial\varphi_1/\partial x_2 = -20 - 2x_2$, $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}_1) = (-13{,}8;\ -28{,}4)$.

Следующую точку $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \nabla\varphi_1(\mathbf{x}_1)\lambda_2 = (1{,}9 - 13{,}8\lambda_2;\ 4{,}2 - 24{,}8\lambda_2)$ найдем при значении параметра λ_2, равном, например, 0,05. Получим $\mathbf{x}_2 = (1{,}21;\ 2{,}96)$.

Подставляя координаты точки $\mathbf{x}_2$ в ограничения (7.32), убеждаемся, что она находится в допустимой области. При этом $f(\mathbf{x}_2) = 10{,}2774$.

Значения $f(\mathbf{x}_0) = 10$ и $f(\mathbf{x}_2) = 10{,}2774$ близки между собой, что говорит о смещении точки $\mathbf{x}_2$ вдоль линии уровня функции $f(\mathbf{x})$. Чтобы ускорить процесс сходимости к точке максимума, переместимся из точки $\mathbf{x}_2$ в направлении вектора $\mathbf{r}$, проходящего через точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_2$ (см. рис. 7.9). Находим координаты вектора $\mathbf{r}$: $\mathbf{r} = (1{,}21 - 1;\ 2{,}96 - 3) = (0{,}21;\ -0{,}04)$.

Очередную точку $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}\lambda_3 = (1{,}21 + 0{,}21\lambda_3;\ 2{,}96 - 0{,}04\lambda_3)$ находим, приняв λ_3 равным, например, 6,5. Получаем $\mathbf{x}_3 = (2{,}5750;\ 2{,}7000)$. Подставляя координаты этой точки в ограничения (7.32), устанавливаем, что $\mathbf{x}_3$ принадлежит допустимой области. Находим $f(\mathbf{x}_3) = 11{,}8579$.

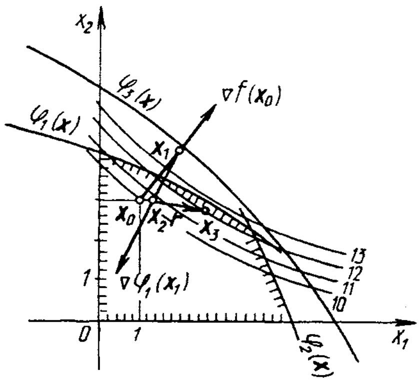


Рис. 7.9

Вычисляем координаты градиентов ∇f и $\nabla\varphi_1$ в точке $\mathbf{x}_3$: $\nabla f(\mathbf{x}_3) = (1{,}4850;\ 2{,}4600)$, $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}_3) = (-15{,}15;\ -25{,}40)$. А теперь сравним отношения одноименных координат этих векторов: $1{,}4850/(-15{,}15) = -0{,}098$, $2{,}4600/(-25{,}40) = -0{,}097$. Отношения незначительно отличаются друг от друга по величине. Значит, векторы ∇f и $\nabla\varphi_1$ практически коллинеарны и перемещения вдоль них будут происходить по зигзагообразной траектории вблизи границы с пересечением ее (см. рис. 7.8). Учитывая, кроме того, что отклонение $\varphi_1(\mathbf{x}_3) = 6{,}3294$ от нуля сравнительно невелико и точка $\mathbf{x}_3$ принадлежит допустимой области, задачу можно считать решенной с достаточной степенью приближения, т. е. $\mathbf{x}^* \approx (2{,}5750;\ 2{,}7000)$, $f_{max} = 11{,}8579$.

Итак, производить следует 2575 ед. изделий *А* и 2700 ед. изделий *Б*. При этом прибыль предприятия по рассматриваемым видам изделий составит 11 857,9 ден. ед.

Задачи выпуклого программирования 7.42—7.45 решить градиентным методом, начиная процесс оптимизационного поиска с указанной точки $\mathbf{x}_0$ и сопровождая решение графической иллюстрацией.

7.42. Максимизировать функцию $f = 2x_1 - 0{,}2x_1^2 + 2{,}4x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 \le 25$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если $\mathbf{x}_0 = (3;\ 1)$.

7.43. Максимизировать функцию $f = 2{,}75x_1 - 0{,}125x_1^2 + 3{,}25x_2 - 0{,}125x_2^2$ при ограничениях $x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \le 75$, $2x_1 + x_2 \ge 10$, $x_1 + 3x_2 \ge 15$, если $\mathbf{x}_0 = (10;\ 5)$.

7.44. Минимизировать функцию $f = -6x_1 + 0{,}25\, x_1^2 - 5{,}5x_2 + 0{,}25\, x_2^2$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 \le 100$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если $\mathbf{x}_0 = (3;\ 8)$.

7.45. Минимизировать функцию $f = -2{,}75x_1 + 0{,}125\, x_1^2 - 4x_2 + 0{,}125\, x_2^2$ при ограничениях $8x_1 + x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 \le 176$, $4x_1 + x_1^2 + 18x_2 + x_2^2 \le 276$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если $\mathbf{x}_0 = (5;\ 2)$.

7.6. Задача квадратичного программирования

Задача квадратичного программирования —это частный случай задачи выпуклого программирования, когда целевая функция содержит квадратичное слагаемое (в виде квадратичной формы), а ограничения линейны. В качестве основной в квадратичном программировании рассматривается задача минимизации функции

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \qquad (7.33)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (7.34)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (7.35)$$

Матрица $D = [d_{ij}]_{n\times n}$ квадратичной формы $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$ предполагается симметрической и неотрицательно определенной.

Если в задаче квадратичного программирования целевая функция максимизируется или если некоторые ограничения-неравенства имеют смысл $\ge$, то такие задачи известными приемами легко приводятся к основной форме (7.33)—(7.35).

Приведем один из алгоритмов решения задачи (7.33)—(7.35).

1. По данным задачи составляют локальные условия Куна—Таккера в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} A & E & O & O \\ 2D & O & -E & A^T \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c} \end{bmatrix}, \qquad (7.36)$$

$$\mathbf{z} \ge \mathbf{0}, \qquad (7.37)$$

$$T = \mathbf{z}' \cdot \tilde{\mathbf{z}}, \qquad (7.38)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix};$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{z} = (x_1; \dots; x_n; y_1; \dots; y_m; v_1; \dots; v_n; \lambda_1; \dots; \lambda_m);$$
$$\tilde{\mathbf{z}} = (v_1; \dots; v_n; \lambda_1; \dots; \lambda_m; x_1; \dots; x_n; y_1; \dots; y_m);$$

λ_i — множители Лагранжа; v_j, y_i — частные производные функции Лагранжа для задачи (7.33)—(7.35).

После составления условий (7.36)—(7.38) задача сводится к тому, чтобы, используя известные из линейного программирования симплексные преобразования (правда, с несколько иным правилом выбора свободной переменной, вводимой в базис), найти среди базисных решений системы линейных уравнений (7.36), (7.37) такое решение $\mathbf{z}^*$, которое обращает в нуль функцию (7.38).

2. Находят начальное базисное решение $\mathbf{h}_0$ системы (7.36), (7.37). Таблица, содержащая это решение, будет использована далее для составления расширенной задачи с соответствующей расширенной таблицей.

3. Используя найденное решение $\mathbf{h}_0$, минимизируют функцию $T = \mathbf{z}' \cdot \tilde{\mathbf{z}}$. Для этого составляют расширенную таблицу, включив в ее основную часть данные таблицы, полученной в предыдущем пункте алгоритма, приведя строки для всех переменных и расположив их в порядке возрастания индекса k переменной $\mathbf{z}_k$, т. е. в следующем порядке: $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, v_1, \dots, v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ (табл. 7.4).

Таблица 7.4

		1	$-z_{N+1}$	…	$-z_{2N}$
Основная часть	$(z_1 =)\ x_1 =$ … $(z_{2N} =)\ \lambda_m =$	h_{10} … $h_{2N,\,0}$	h_{11} … $h_{2N,\,1}$	… … …	h_{1N} … $h_{2N,\,N}$
Дополнительная часть	T				
	α_s β_s θ_s K_s		α_1 β_1 θ_1 K_1	… … … …	α_N β_N θ_N K_N

Дополнительную часть таблицы заполняют в следующем порядке:

1) вычисляют $T_0 = \mathbf{h}'_0 \cdot \tilde{\mathbf{h}}_0$, где $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}_0$ — начальное базисное решение. Если $T_0 = 0$, то задача (7.33)—(7.35) решена и остается составить оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ из компонент вектора $\mathbf{h}_0$ и вычислить $f_{\min}$. Если же $T_0 \neq 0$, то вычисления продолжают;

2) находят для всех $s = \overline{1, N}$ $\alpha_s = \mathbf{h}'_s \cdot \tilde{\mathbf{h}}_0$;

3) для тех s, для которых $\alpha_s > 0$, вычисляют:

$$\beta_s = \mathbf{h}' \cdot \tilde{\mathbf{h}}_s,\ \theta_s = \min_{h_{ks}>0}(h_{k0} / h_{ks})$$

(элементы h_{ks}, для которых отношение θ_s минимально, отмечают в таблице звездочкой), $K_s = -2\alpha_s + \theta_s\beta_s$;

4) выбирают разрешающий элемент для выполнения симплексного преобразования. При этом разрешающий столбец определяют по отрицательному элементу K_s с наибольшей абсолютной величиной. Элемент h_{ks} выбранного столбца, которому соответствует наименьшее θ_s (он отмечается в таблице звездочкой), становится разрешающим. С ним выполняют симплексное преобразование и получают новое базисное решение.

Операции п. 3 алгоритма выполняют до тех пор, пока функция T не примет нулевое значение. Если все $K_s > 0$, а $T > 0$, то включают в базис переменную, отвечающую положительному K_s, или выбирают в качестве начального другое базисное решение.

Пример 7.11. Минимизировать функцию $f = -2x_1 + 0{,}2x_1^2 - 3x_2 + 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + 3x_2 \leq 13$, $2x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Р е ш е н и е. Составим локальные условия Куна—Таккера. С этой целью выпишем нужные матрицы и векторы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \end{bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z} = (x_1;\ x_2;\ y_1;\ y_2;\ v_1;\ v_2;\ \lambda_1;\ \lambda_2),$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = (v_1;\ v_2;\ \lambda_1;\ \lambda_2;\ x_1;\ x_2;\ y_1;\ y_2).$$

Условия (7.36)—(7.38) примут следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z} = (x_1;\ x_2;\ y_1;\ y_2;\ v_1;\ v_2;\ \lambda_1;\ \lambda_2) \geq 0,$$

$$T = (x_1;\ x_2;\ y_1;\ y_2;\ v_1;\ v_2;\ \lambda_1;\ \lambda_2) \times$$
$$\times (v_1;\ v_2;\ \lambda_1;\ \lambda_2;\ x_1;\ x_2;\ y_1;\ y_2).$$

Выполнив необходимые действия, получим следующую систему линейных уравнений, которую следует решить и найти начальное базисное решение:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + y_1 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + y_2 &= 10, \\ \frac{2}{5}x_1 - v_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 2, \\ \frac{2}{5}x_2 - v_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Записываем эту систему в табл. 7.5 и с помощью симплексных преобразований находим начальное базисное решение (табл. 7.6).

Таблица 7.5

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-v_1$	$-v_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$
$y_1 =$	13	2	3	0	0	0	0
$y_2 =$	10	2	1	0	0	0	0
$0 =$	2	2/5	0	−1	0	2	2
$0 =$	3	0	2/5	0	−1	3	1

Используя табл. 7.6, составляем расширенную табл. 7.7, в которую включаем строки для всех переменных.

Из табл. 7.7 выписываем $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}'_0 = (17/4;\ 3/2;\ 0;\ 0;\ 9/2;\ 0;\ 0;\ 12/5)$ и составляем вектор $\tilde{\mathbf{h}}'_0 = (9/2;\ 0;\ 0;\ 12/5;\ 17/4;\ 3/2;\ 0;\ 0)$.

Таблица 7.6

	1	$-y_2$	$-y_1$	$-v_2$	$-\lambda_1$
$x_2 =$	3/2	–1/2	1/2	0	0
$x_1 =$	17/4	3/4	–1/4	0	0
$\lambda_2 =$	12/5	1/5	–1/5	–1	3
$v_1 =$	9/2	7/10	–1/2	–2	4

Таблица 7.7

		1	$(-z_3)$ $-y_1$	$(-z_4)$ $-y_2$	$(-z_6)$ $-v_2$	$(-z_7)$ $-v_1$
Основная часть	$(z_1 =)\ x_1 =$	17/4	–1/4	3/4*	0	0
	$(z_2 =)\ x_2 =$	3/2	1/2	–1/2	0	0
	$(z_3 =)\ y_1 =$	0	–1	0	0	0
	$(z_4 =)\ y_2 =$	0	0	–1	0	0
	$(z_5 =)\ v_1 =$	9/2	–1/2	7/10	2	4
	$(z_6 =)\ v_2 =$	0	0	0	–1	0
	$(z_7 =)\ \lambda_1 =$	0	0	0	0	–1
	$(z_8 =)\ \lambda_2 =$	12/5	–1/5	1/5	–1	$\boxed{3^*}$
	T_0	153/4				
Дополнительная часть	α_s		–13/4	79/20	–10	17
	β_s			13/20		0
	θ_s			17/3		4/5
	K_s			–253/60		–34

Для заполнения дополнительной части табл. 7.7 вычисляем последовательно:

1) значение функции T, отвечающее начальному базисному решению $\mathbf{h}_0$: $T_0 = T(\mathbf{z}_0) = \mathbf{h}'_0 \cdot \mathbf{h}_0 = 17/4 \cdot 9/2 + 9/2 \cdot 17/4 = 153/4$; поскольку $T_0 \neq 0$, то находим α_s;

2) $\alpha_1 = \tilde{\mathbf{h}}'_0 \cdot \mathbf{h}_1 = (9/2;\ 0;\ 0;\ 12/5;\ 17/4;\ 3/2;\ 0;\ 0)\,(-1/4;\ 1/2;\ -1;\ 0;\ -1/2;\ 0;\ 0;\ -1/5) = -13/4$, $\alpha_2 = \tilde{\mathbf{h}}'_0 \cdot \mathbf{h}_2 = 79/20$,

$\alpha_3 = \tilde{\mathbf{h}}'_0 \cdot \mathbf{h}_3 = -10$, $\alpha_4 = \tilde{\mathbf{h}}'_0 \cdot \mathbf{h}_4 = 17$. Для α_2 и α_4 вычисляем остальные параметры;

3) $\beta_2 = \mathbf{h}'_2 \cdot \tilde{\mathbf{h}}_2 = (3/4;\ -1/2;\ 0;\ -1;\ 7/10;\ 0;\ 0;\ 1/5)\times$ $\times(7/10;\ 0;\ 0;\ 1/5;\ 3/4;\ -1/2;\ 0;\ -1) = 13/20$, $\beta_4 = \mathbf{h}'_4 \cdot \tilde{\mathbf{h}}_4 = 0$;

4) $\theta_2 = \min(17/4{:}3/4,\ 9/2{:}7/10,\ 12/5{:}1/5) = 17/4{:}3/4$, $\theta_4 = 12/5{:}3$. Элементы табл. 7.7, доставляющие минимум при определении θ_2 и θ_2 (это 3/4 и 3), отмечаем звездочкой;

5) $K_2 = -2\alpha_2 + \theta_2\beta_2 = -2 \cdot 79/20 + 17/3 \cdot 13/20 = -253/60$, $K_4 = -34$.

Четвертый столбец, которому соответствует $K_4 = -34$, назначаем разрешающим ($|-34| > |-253/60|$) и с элементом 3 этого столбца выполняем симплексное преобразование табл. 7.7. В результате получаем таблицу, содержащую новое базисное решение $\mathbf{z}_1$. На основе этой таблицы составляем очередную табл. 7.8, дополнительную часть которой заполняем аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае.

Таблица 7.8

		1	$(-z_3)$ $-y_1$	$(-z_4)$ $-y_2$	$(-z_6)$ $-v_2$	$(-z_8)$ $-\lambda_2$
Основная часть	$(z_1 =)$ $x_1 =$	17/4	–1/4	3/4	0	0
	$(z_2 =)$ $x_2 =$	3/2	1/2	–1/2	0	0
	$(z_3 =)$ $y_1 =$	0	–1	0	0	0
	$(z_4 =)$ $y_2 =$	0	0	–1	0	0
	$(z_5 =)$ $v_1 =$	13/10	–7/30	$\boxed{13/30*}$	–2/3	–4/3
	$(z_6 =)$ $v_2 =$	0	0	0	–1	0
	$(z_7 =)$ $\lambda_1 =$	4/5	–1/15	1/15	–1/3	1/3
	$(z_8 =)$ $\lambda_2 =$	0	0	0	0	–1
Дополнительная часть	T_1	221/20				
	α_s		–127/60	169/60	–13/3	–17/3
	β_s			13/20		
	θ_s			3		
	K_s			–221/60		

Подвергнув табл. 7.8 симплексному преобразованию с разрешающим элементом 13/30, получим очередную таблицу с базисным решением $\mathbf{z}_2 = (2;\ 3;\ 0;\ 3;\ 0;\ 0;\ 1/5;\ 0)$, доставляющим функции T нулевое значение. Тем самым найдено оптимальное решение $\mathbf{x}^* = (2;\ 3)$, при котором целевая функция f данной задачи минимизируется. При этом $f_{\min} = -10{,}4$.

7.46. Минимизировать функцию $f = -4x_1 + 0{,}2\,x_1^2 - 2x_2 + 0{,}2\,x_2^2$ при ограничениях $4x_1 + 2x_2 \le 30$, $6x_1 + 17x_2 \le 102$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.47. Минимизировать функцию $f = -2{,}4x_1 + 0{,}2\,x_1^2 - 5{,}2x_2 + 0{,}2\,x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \le 15$, $13x_1 + 20x_2 \le 260$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.48. Минимизировать функцию $f = -5x_1 + 0{,}25\,x_1^2 - 7{,}5x_2 + 0{,}25\,x_2^2$ при ограничениях $3x_1 + 1{,}5x_2 \le 22{,}5$, $6{,}5x_1 + 10x_2 \le 130$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.49. Минимизировать функцию $f = -2{,}4x_1 + 0{,}4\,x_1^2 - 5{,}6x_2 + 0{,}4\,x_2^2$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 \le 12$, $5x_1 + 3x_2 \le 30$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.50. Минимизировать функцию $f = -x_1 + 0{,}125\,x_1^2 - 2{,}25x_2 + 0{,}125\,x_2^2$ при ограничениях $1{,}5x_1 + 3x_2 \le 18$, $10x_1 + 6x_2 \le 60$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

8

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

8.1. Вычислительная процедура метода динамического программирования

Динамическое программирование (динамическое планирование) представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование управляемых процессов, т. е. процессов, на ход которых можно целенаправленно влиять. Это метод оптимизации, специально приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные шаги. Такие операции называют *многошаговыми.*

В общей постановке задача динамического программирования формулируется следующим образом. Имеется некоторая управляемая физическая система S, характеризующаяся определенным набором параметров. В этой системе происходят какие-то процессы (экономические, производственные, технологические и т. п.), которые можно представить как многошаговые. На каждом шаге процессам в системе соответствуют определенные значения параметров, описывающих *состояние системы.* Заданы условия, позволяющие определять или начальное, или конечное состояние системы, или оба этих состояния. Иногда задаются области начальных и конечных состояний. Поскольку управление системой осуществляется для достижения конкретной цели, то указан *показатель эффективности управления*, называемый *целевой функцией,* численно выражающий эффект («выигрыш»), получаемый при том или ином управлении из множества допустимых управлений. В экономических системах целевая функция может определять прибыль, затраты, рентабельность, объем производства и т. п. Задача динамического программирования состоит в выборе из множества допустимых управлений такого, которое переводит систему из начального состояния в конечное, обеспечивая при этом целевой функции экстремум (минимум или максимум в зависимости от ее экономической сути). Упомянутое управление называют *оптимальным.*

В основе вычислительных алгоритмов динамического программирования лежит следующий *принцип оптимальности,* сформулированный Р. Беллманом: каково бы ни было состояние системы S в результате $i - 1$ шагов, управление на i-м шаге должно выбираться так, чтобы оно в совокупности с управлениями на всех последующих шагах с $(i + 1)$-го до N-го включительно доставляло экстремум целевой функции.

Введем следующие обозначения: x_{i-1} — множество состояний, в которых система S может находиться перед i-м шагом; элементы этого множества находятся из условий конкретной задачи (при $i = 1$ получается множество x_0 начальных состояний, которое может состоять из одного или нескольких элементов; то же самое можно сказать и о множестве x_N конечных состояний); x_i — множество состояний в конце i-го шага; u_i — множество управлений, которые могут быть выбраны на i-м шаге и под воздействием каждого из которых система S переходит в одно из состояний множества x_i. Элементы множества u_i определяются условиями конкретной задачи; $F_i(x_{i-1}, u_i)$ — условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от i-го до N-го шага включительно при условии, что перед i-м шагом система S находилась в одном из состояний множества x_{i-1}, а на i-м шаге было выбрано такое управление из множества u_i, которое обеспечило целевой функции условно-оптимальное значение; $z_i(x_{i-1}, u_i)$ — значения целевой функции на i-м шаге для всех управлений из множества u_i при условии, что перед i-м шагом система S находилась в одном из состояний множества x_{i-1}; $F_{i+1}(x_i)$ — условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от $(i + 1)$-го шага до N-го включительно при условии, что в результате воздействия управления, выбранного из множества u_i, система S на i-м шаге перейдет к концу шага из состояния, принадлежащего множеству x_{i-1}, в состояние из множества x_i.

В принятых обозначениях принцип оптимальности Беллмана можно записать в математической форме следующим образом:

$$F_i(x_{i-1}, u_i) = \underset{u_i}{\mathrm{extr}}\,(z_i(x_{i-1}, u_i) + F_{i+1}(x_i)). \tag{8.1}$$

Равенство (8.1) называют *основным функциональным уравнением динамического программирования.*

Для последнего (N-го) шага уравнение (8.1) принимает вид

$$F_N(x_{N-1}, u_N) = \underset{u_N}{\mathrm{extr}}\,(z_N(x_{N-1}, u_N) + F_{N+1}(x_N)).$$

Поскольку функция $F_{i+1}(x_i)$ определена только для $i = \overline{1, N-1}$, второе слагаемое в правой части можно положить равным нулю. В результате приходим к уравнению

$$F_N(x_{N-1}, u_N) = \underset{u_N}{\mathrm{extr}}\, z_N(x_{N-1}, u_N). \tag{8.2}$$

Если рассматривается система без последействия, то ее состояние в конце i-го шага будет отвечать одному из элементов множества x_i и зависит как от состояния системы S на начало шага, которое характеризовалось соответствующим элементом множества x_{i-1}, так и от управления, выбранного из множества u_i. Эту зависимость символически можно записать в следующей форме:

$$x_i = f(x_{i-1}, u_i). \tag{8.3}$$

На основании уравнений (8.1)—(8.3) и с учетом множеств x_{i-1}, x_i и u_i строится вычислительная процедура метода динамического программирования, распадающаяся на два этапа: условную и безусловную оптимизацию.

Условная оптимизация осуществляется путем «попятного» движения от последнего шага к первому. С помощью уравнения (8.2) для каждого состояния из множества x_{N-1} находится такое управление из множества u_N, при котором функция $F_N(x_{N-1}, u_N)$ достигает экстремума и система S переходит в заданное конечное состояние. Таким образом, для каждого состояния из множества x_{N-1} находится условно-оптимальное значение целевой функции (условно-оптимальный выигрыш) и соответствующее условно-оптимальное управление. Далее на основании уравнения (8.1) и множества состояний системы S перед $(N - 1)$-м шагом определяются условно-оптимальные управления на $(N - 1)$-м шаге и условно-оптимальные значения целевой функции на двух последних шагах: $(N - 1)$-м и N-м. При этом для каждого состояния и управления соответственно из множеств x_{N-2} и u_{N-1} на основе равенства (8.3) находится отвечающее им состояние из множества x_{N-1} системы S перед N-м шагом и по этому состоянию с учетом результатов предшествующих расчетов определяется условно-оптимальное значение $F_N(x_{N-1})$ целевой функции. Описанный процесс вычислений продолжается до достижения первого шага. В результате получается последовательность множеств условно-оптимальных управлений системой S, которая в конкретных задачах может быть представлена последовательностью таблиц или набором файлов в памяти ЭВМ.

Для определения безусловно-оптимального управления системой S при заданном ее начальном состоянии x_0 анализируем выполненные расчеты, перемещаясь по оптимизируемому N-шаговому процессу в прямом направлении: от первого шага к последнему. Эта часть рассуждений называется *безусловной оптимизацией*. Для начального состояния x_0 находим в множестве u_1 условно-оптимальных управлений для первого шага с учетом условно-оптимального значения целевой функции на этом шаге безусловно-оптимальное управление u_1^* и состояние в множестве x_1 системы S перед вторым шагом. С этими данными входим во второе множество u_2 управлений для второго шага и определяем u_2^* и т. д.

Безусловно-оптимальное значение целевой функции для всего N-шагового процесса $z_{\text{extr}} = F_1(x_0,\ u_1^*)$.

Искомое оптимальное управление можно записать в виде вектора

$$\mathbf{u}^* = (u_1^*;\ u_2^*;\ \ldots;\ u_{N-1}^*;\ u_N^*).$$

Описанная вычислительная процедура метода динамического программирования станет понятной, когда читатель разберет конкретный числовой пример с производственным содержанием, приведенный ниже.

Пример 8.1. На данной сети дорог (рис. 8.1) указаны стоимости доставки единицы груза из пункта в пункт. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта *1* в пункт *10.*

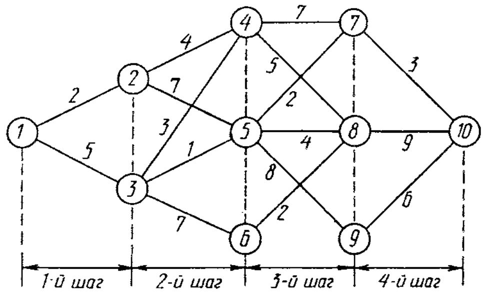


Рис. 8.1

Решение. Согласимся, что минимизировать затраты по доставке целесообразно применительно к единице груза, ибо понятно, что если затраты минимальны при перевозке единицы груза, то они будут минимальными и при перевозке любого количества груза.

Концепция динамического программирования предполагает, что процессу принятия решения в оптимизационной задаче может быть придан шаговый характер. С этой целью разобьем все пункты сети на группы (табл. 8.1). К группе I отнесем пункт *1*, к группе II — пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта *1* (таковыми будут *2* и *3*), к группе III отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (таковыми будут *4*, *5* и *6*), и т. д. В результате движение транспорта с грузом из пункта *1* в пункт *10* можно рассматривать как четырехшаговый процесс: на первом шаге транспорт перемещается из пункта *1* в какой-то пункт группы II, на втором шаге — из пункта группы II в пункт группы III и т. д.

Таблица 8.1

I	II	III	IV	V
1	*2* *3*	*4* *5* *6*	*7* *8* *9*	*10*

После разбиения пунктов сети на группы формирование наиболее экономного маршрута может быть реализовано за четыре шага.

В рассматриваемой задаче в качестве физической системы выступает транспорт с грузом, перемещающийся из начального состояния c_1 (из пункта *1*) в конечное состояние c_{10} (пункт *10*), и сеть дорог. За состояние c_i системы перед i-м шагом естественно принять местонахождение транспорта с грузом в пункте, в котором он пребывает перед этим шагом. Управление u_i на i-м шаге состоит в выборе дороги (i, j), по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении к пункту *10*. Состояние в конце шага определяется номером пункта, в который будет доставлен груз в результате сделанного выбора (принятого управления), а значение z_i целевой функции на i-м шаге — это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

В соответствии с вычислительной схемой метода динамического программирования фактическое формирование искомого оптимального управления данным процессом состоит из двух процедур: условной оптимизации и безусловной оптимизации. Условная оптимизация осуществляется в результате «попятного» движения от последнего шага исследуемого явления к его первому шагу; в процессе этого движения находятся шаговые условно-оптимальные управления. Безусловная оптимизация осуществляется в процессе движения в прямом направлении от первого шага к последнему; при этом из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений формируется безусловное оптимальное управление всем данным процессом.

Условную оптимизацию начнем с анализа четвертого шага. Возможные состояния, в которых транспорт с грузом может оказаться перед четвертым шагом, зависят от управлений на предшествующих шагах и соответствуют его местонахождению либо в пункте *7*, либо в пункте *8*, либо в пункте *9*. Обозначим эти состояния соответственно c_7, c_8, c_9. Они образуют множество возможных состояний на начало четвертого шага. Это будет множество x_3. Из каждого указанного состояния можно перейти в конечное состояние c_{10} единственным путем: из пункта *7* в пункт *10* груз может быть доставлен только дорогой (*7*, *10*), из *8* в *10* — дорогой (*8*, *10*), из *9* в *10* — дорогой (*9*, *10*). Решения о доставке груза по названным дорогам и являются управлениями на четвертом шаге, соответствующими указанным состояниям. Итак, множество u_4 управлений на четвертом шаге состоит из элементов: (*7*, *10*), (*8*, *10*) и (*9*, *10*).

Условно-оптимальные затраты на этом шаге в общем случае выражаются основным функциональным уравнением, записанным для четвертого шага, если в равенстве (8.2) положить $N = 4$:

$$F_4(x_3, u_4) = \min_{u_4} z_4(x_3, u_4).$$

В данном случае для каждого состояния целевая функция z_4 является однозначной (каждому состоянию соответствует единственное управление), поэтому $\min\limits_{u_4} z_4(x_3, u_4) = z_4(x_3, u_4)$, т. е. $F_4(x_3, u_4) = z_4(x_3, u_4)$. Как видно из рис. 8.1, функция $F_4(x_3, u_4)$ в зависимости от состояний и управлений (от x_3 и u_4) принимает значения 3, 9 и 6, а управления (*7*, *10*), (*8*, *10*), (*9*, *10*) будут условно-оптимальными соответственно для состояний c_7, c_8, c_9. Этим завершается первый этап условной оптимизации.

Для большей наглядности результаты проведенных рассуждений оформим в виде табл. 8.2.

Таблица 8.2

x_3	u_4	x_4	F_4
c_7	(*7*, *10*)	c_{10}	3
c_8	(*8*, *10*)	c_{10}	9
c_9	(*9*, *10*)	c_{10}	6

Переходя ко второму этапу условной оптимизации — анализу третьего шага, запишем функциональное уравнение для этого шага, которое получится из равенства (8.1) при $i = 3$:

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{u_3} (z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3)). \qquad (8.4)$$

Из рис. 8.1 видно, что множеству x_2 возможных состояний перед третьим шагом соответствует местоположение транспорта с грузом либо в пункте *4* (состояние c_4), либо в пункте *5* (состояние c_5), либо в пункте *6* (состояние c_6), т. е. множество x_2 состоит из трех элементов: c_4, c_5, c_6. Множеству u_3 возможных управлений на третьем шаге соответствует выбор одной из дорог, ведущих из пунктов *4*, *5* и *6* в пункты *7*, *8*, *9*: для пункта *4* это либо (*4*, *7*), либо (*4*, *8*); для пункта *5* — либо (*5*, *7*), либо (*5*, *8*), либо (*5*, *9*); для пункта *6* — (*6*, *8*). Таким образом, множество u_3 управлений на третьем шаге состоит из шести элементов: (*4*, *7*), (*4*, *8*), (*5*, *7*), (*5*, *8*), (*5*, *9*), (*6*, *8*). Множество значений целевой функции $z_3(x_2, u_3)$ — непосредственных затрат на перевозки единицы груза из пунктов *4*, *5* и *6* в соседние пункты *7*, *8*, *9* — состоит: из элементов (см. рис. 8.1) *7* и *5* для состояния c_4; из элементов *2*, *4*, *8* для состояния c_5; из элемента *2* для состояния c_6.

Как же найти условно-оптимальное управление на третьем шаге для каждого из возможных состояний, гарантирующее минимальные транспортные затраты?

Рассмотрим состояние c_4. В отличие от четвертого шага, где для каждого состояния c_7, c_8 и c_9 существовала только одна дорога (одно управление), ведущая в пункт *10*, а потому выбора не было, здесь две дороги (два управления) ведут в направлении пункта *10*: (*4*, *7*) и (*4*, *8*). Следовательно, в данном случае предстоит выбор наиболее экономного пути в пункт *10*. Этот выбор мы сделаем с помощью уравнения (8.4), найдя при этом и минимальные затраты. Используя данные, приведенные на рис. 8.1, и результаты условной оптимизации четвертого шага (см. табл. 8.2), получаем

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{(4,7),(4,8)} (7 + 3;\ 5 + 9) = 10.$$

Из этого равенства видно, что минимальные затраты в 10 ден. ед. соответствуют выбору дороги (*4*, *7*). Итак, для состояния c_4 условно-оптимальным управлением будет выбор дороги (*4*, *7*), при этом условно-оптимальные транспортные затраты на участке от пункта *4* до конечного пункта *10* составят 10 ден. ед.

Аналогичным образом для состояния c_5 находим

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{(5,7),(5,8),(5,9)} (2 + 3;\ 4 + 9;\ 8 + 6) = 5,$$

откуда следует, что условно-оптимальным управлением будет выбор дороги (*5*, *7*), обеспечивающий условно-оптимальные затраты в 5 ден. ед. Для состояния c_6 получаем условно-оптимальные затраты

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{(6,8)} (2 + 9) = 11,$$

которые соответствуют условно-оптимальному управлению (*6*, *8*) (выбору дороги (*6*, *8*)).

В компактном виде приведенные выкладки записаны в форме табл. 8.3. Этим завершается второй этап условной оптимизации.

Таблица 8.3

x_2	u_3	x_3	z_3	F_4	$z_3 + F_4$	F_3
c_4	(*4*, *7*)	c_7	7	3	10	10
	(*4*, *8*)	c_8	5	9	14	–
$\underline{c_5}$	$\underline{(5,\ 7)}$	$\underline{c_7}$	2	3	5	$\underline{5}$
	(*5*, *8*)	c_8	4	9	13	–
	(*5*, *9*)	c_9	8	6	14	–
c_6	(*6*, *8*)	c_8	2	9	11	11

Третий этап условной оптимизации — анализ второго шага — осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме:

$$F_2(x_1, u_2) = \min_{u_2} (z_2(x_1, u_2) + F_3(x_3)).$$

Как видно из рис. 8.1, здесь множество x_1 состояний образуют элементы c_2 и c_3, а множество управлений —

элементы (*2*, *4*), (*2*, *5*), (*3*, *4*), (*3*, *5*), (*3*, *6*). Значения целевой функции $z_2(x_1, u_2)$ заданы на рис 8.1, а значения $F_3(x_2)$ получены на предыдущем этапе условной оптимизации (см. табл. 8.3).

Читателю предлагается выполнить соответствующие подробные выкладки, результаты которых приведены в табл. 8.4. Этим завершается третий этап условной оптимизации.

Таблица 8.4

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	$z_2 + F_3$	F_2
c_2	(*2*, *4*)	c_4	4	10	14	–
	(*2*, *5*)	c_5	7	5	12	12
$\underline{c_3}$	(*3*, *4*)	c_4	3	10	13	–
	$\underline{(3, 5)}$	$\underline{c_5}$	1	5	6	$\underline{6}$
	(*3*, *6*)	c_6	7	11	18	–

Заключительным этапом процедуры условной оптимизации является анализ первого шага. Особенность этого шага состоит в том, что в его начале состояние c_1 системы определено однозначно: транспорт с грузом находится в пункте *1*, так что множество x_0 состояний содержит единственный элемент c_1, а множество u_1 управлений — два элемента: (*1*, *2*) и (*1*, *3*). Функциональное уравнение для этого шага имеет вид

$$F_1(x_0, u_1) = \min_{u_1} (z_1(x_0, u_1) + F_2(x_1)).$$

Результаты вычислений приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

x_0	u_1	x_1	z_1	F_2	$z_1 + F_2$	F_1
$\underline{c_1}$	(*1*, *2*)	c_2	2	12	14	–
	$\underline{(1, 3)}$	$\underline{c_3}$	5	6	11	$\underline{11}$

Как видно из табл. 8.5, условно-оптимальным управлением для этого шага является выбор дороги (*1*, *3*), обеспечивающий минимальные суммарные затраты $F_1 (x_0, u_1) = F_1(1,(1, 3)) = 11$ на всем пути от пункта *1* до пункта *10*. Что же касается структуры этого пути (наиболее экономного маршрута), то она выяснится в процессе процедуры безусловной оптимизации.

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление (наиболее экономный маршрут), которое будет составлено из найденных ранее (при условной оптимизации) шаговых условно-оптимальных управлений (дорог между отдельными пунктами сети). Из табл. 8.5 видно, что из начального пункта *1* (состояние c_1) груз следует направлять по дороге (*1*, *3*), ибо именно этому условно-оптимальному шаговому управлению соответствуют минимальные затраты (см. последний столбец табл. 8.5). В результате груз окажется в пункте *3* (состояние c_3). Переходя к табл. 8.4, замечаем, что из пункта *3* груз необходимо доставлять дорогой (*3*, *5*) в пункт *5* (состояние c_5) (см. последний столбец табл. 8.4). Из табл. 8.3 видно, что далее груз должен перевозиться по дороге (*5*, *7*) до пункта *7* (состояние c_7), откуда, как это следует из табл. 8.2, он направляется дорогой (*7*, *10*) в конечный пункт *10* (состояние c_{10}). Таким образом, наиболее экономный маршрут пролегает через пункты *1*, *3*, *5*, *7* и *10*, при этом транспортные расходы минимизируются и составляют 11 ден. ед. на единицу груза.

При использовании метода динамического программирования часто получаются побочные результаты, связанные с рассматриваемой задачей и нередко имеющие не менее важное значение, чем основной результат. В данном случае кроме оптимального маршрута доставки груза из пункта *1* в пункт *10* информация, содержащаяся в табл. 8.2—8.5, позволяет находить наиболее экономный маршрут в пункт *10* из любого другого пункта данной сети дорог. Находятся эти маршруты так же, как и сформированный выше маршрут *1—3—5—7—10*. Так, например, оптимальный маршрут из пункта *2* в пункт *10* пройдет через пункты *5* и *7*.

Заметим в заключение, что в рассматриваемом примере проиллюстрирована одна из главных особенностей метода динамического программирования: при выборе решения на каждом шаге необходимо руководствоваться интересами всего оптимизируемого процесса, а не только данного шага. Именно этим объясняется включение в наиболее экономный маршрут дороги (*1*, *3*), удельные транспортные затраты на которой в 2,5 раза выше, чем на дороге (*1*, *2*). Эта «жертва» на первом шаге принесена с тем, чтобы минимизировать общие затраты на всем четырехшаговом маршруте.

8.1. На сети дорог, изображенной на рис. 8.2, *а*, *б*, указаны стоимости перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети. Найти наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта *А* в пункт *Б*. Чему равны суммарные затраты по доставке единицы груза оптимальным маршрутом?

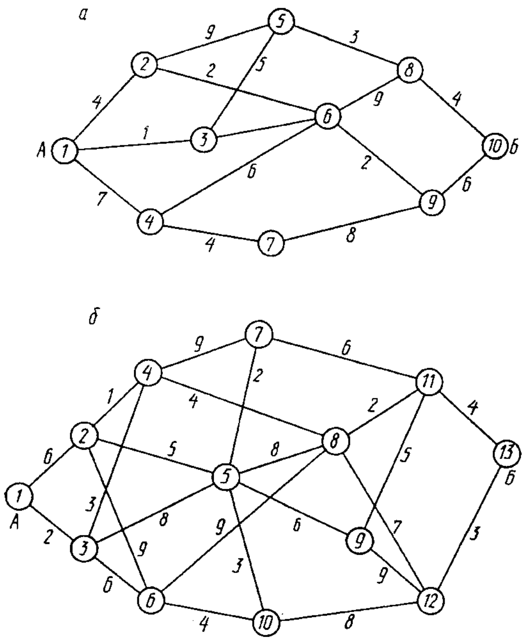


Рис. 8.2

8.2. На сети дорог, изображенной на рис. 8.3, *а*, *б*, указаны стоимости перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети. Найти на сети маршруты, ведущие в конечный пункт *12* из всех остальных пунктов, при перевозке груза по которым затраты минимизируются. Определить величину этих затрат для каждого найденного оптимального маршрута.

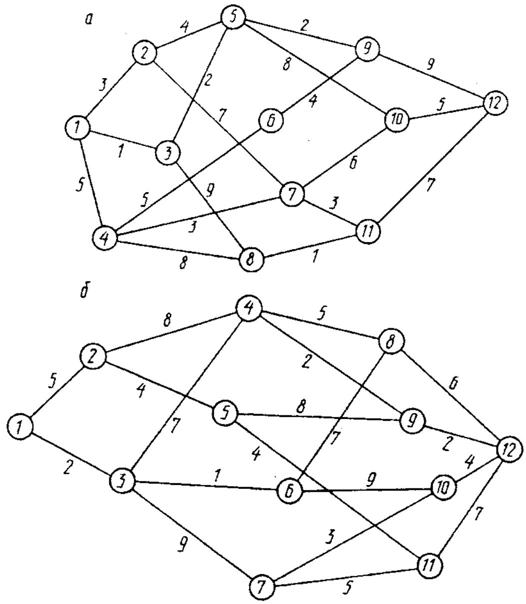


Рис. 8.3

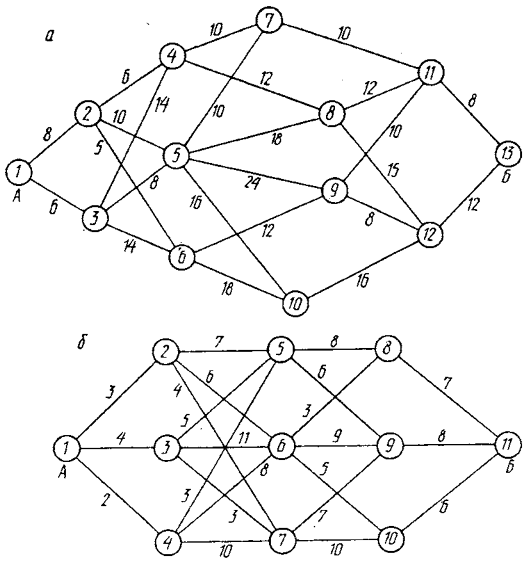
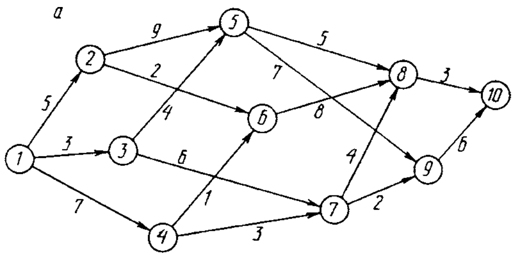


Рис. 8.4



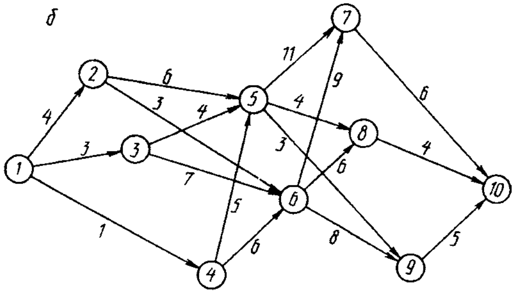


Рис. 8.5

8.3. Определить кратчайший маршрут движения транспорта из начального пункта *А* в конечный пункт *Б* на сети дорог, изображенной на рис. 8.4, *а, б*. Расстояния между промежуточными пунктами сети на рисунке указаны. Чему равна протяженность оптимального маршрута?

8.4. На сетевом графике комплекса работ, изображенном на рис. 8.5, *а, б,* найти критический путь и определить критический срок.

8.2. Производственные задачи, решаемые методом динамического программирования

Задачи оптимального распределения ресурсов и перспективного планирования. Задачи на оптимальное распределение ресурсов по различным категориям мероприятий возникают в производственной практике особенно часто. Это могут быть задачи о распределении средств на приобретение оборудования, закупку сырья и найм рабочей силы; задачи о распределении товаров по торговым и складским помещениям; задачи о распределении средств между различными отраслями промышленности и т. п.

Рассмотрим числовой пример широко распространенной задачи, в которой решается вопрос о том, как спланировать работу группы предприятий, чтобы экономический эффект от выделенных этим предприятиям дополнительных финансовых или материальных ресурсов был максимальным.

Пример 8.2. Производственное объединение выделяет четырем входящим в него предприятиям кредит в сумме 100 млн ден. ед. для расширения производства и увеличения выпуска продукции. По каждому предприятию известен возможный прирост $z_i(u_i)$ $(i = \overline{1, 4})$ выпуска продукции (в денежном выражении) в зависимости от выделенной ему суммы u_i. Для упрощения вычислений выделяемые суммы кратны 20 млн ден. ед. (табл. 8.6). При этом предполагаем, что прирост выпуска продукции на i-м предприятии не зависит от суммы средств, вложенных в другие предприятия, а общий прирост выпуска в производственном объединении равен сумме приростов, полученных на каждом предприятии объединения.

Таблица 8.6

Выделяемые средства u_i, млн ден. ед.	Предприятие			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях $z_i(u_i)$, млн ден. ед.			
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$	$z_4(u_i)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Требуется так распределить кредит между предприятиями, чтобы общий прирост выпуска продукции на производственном объединении был максимальным.

Решение. В рассматриваемой задаче физической системой S является производственное объединение, а в качестве шага процесса принятия решения следует понимать назначение той или иной суммы средств конкретному предприятию: на первом шаге — первому предприятию, на втором — второму и т. д. В данном случае процесс разбивается на четыре шага.

Приступая к фактическому решению задачи, необходимо выяснить, какой практический смысл имеют математические символы, в которых записан общий принцип оптимальности Беллмана (8.1), применительно к данной задаче.

Состояние производственного объединения (состояние системы S) будет характеризоваться в каждый данный момент конкретным вариантом распределения кредита между предприятиями. Состояние производственного объединения (состояние системы S) перед выбором размера суммы, ассигнуемой i-му предприятию (перед i-м шагом), определяется величиной остатка кредита после выделения средств другим $i - 1$ предприятиям (на предшествующих $i - 1$ шагах). Поскольку возможны различные варианты распределения средств (от 0 до 100 млн ден. ед.), то и состояния производственного объединения перед i-м шагом могут быть различными, и каждое из них будет характеризоваться соответствующим значением оставшейся суммы. Совокупность этих значений и составит множество x_{i-1}. Этим же символом обозначим и множество состояний системы перед i-м шагом.

Принятое на i-м шаге решение (управление) о сумме средств, выделяемых i-му предприятию, будет зависеть от величины остатка кредита к моменту выделения средств i-му предприятию (к началу i-го шага), а потому может принимать различные значения, совокупность которых и составляет множество u_i. Этим же символом будем обозначать и множество управлений на i-м шаге. В соответствии с условием задачи элементами множества u_i будут числа 0, 20, 40, 60, 80 и 100.

Состояние производственного объединения после выделения средств i-му предприятию (состояние системы S в конце i-го шага) определяется величиной нераспределенной суммы средств, которая может быть различной в зависимости от выделенной i-му предприятию суммы (от выбранного управления из множества u_i), а потому и состояние объединения (состояние системы S) будет характеризоваться одним из элементов множества состояний в конце i-го шага, т. е. множества x_i. В условиях данной задачи элементами множества x_i будут числа 0, 20, 40, 60, 80, 100.

Целевая функция $z_i(x_{i-1}, u_i)$ означает прирост выпуска продукции на i-м предприятии при условии, что величина остатка кредита перед выделением ему выбранной из множества u_i суммы определялась элементом множества x_{i-1}. Выражение $F_i(x_{i-1}, u_i)$ означает максимальный суммарный прирост, полученный на всех предприятиях, начиная с i-го, при условии, что перед выделением этому предприятию некоторой допустимой суммы, равной элементу множества u_i, остаток кредита характеризовался некоторым элементом множества x_{i-1}.

Процедуру условной оптимизации начинаем с четвертого шага, на котором средства выделяются четвертому предприятию. Из равенства (8.2) при $N = 4$ с учетом максимизации целевой функции получаем следующее функциональное уравнение:

$$F_4(x_3, u_4) = \max_{u_4} z_4(x_3, u_4).$$

Как видно из табл. 8.6, все функции $z_i(u_i)$ $(i = \overline{1, 4})$ однозначны: каждому значению суммы выделенных средств соответствует единственное значение прироста выпуска продукции, а поэтому $F_4(x_3, u_4) = z_4(x_3, u_4)$. Состояние производственного объединения (состояние системы S) перед выделением средств четвертому предприятию (перед четвертым шагом) точно не определено, поэтому необходимо проанализировать все допустимые варианты (состояния из множества x_3). Это понятно, поскольку пока неизвестны управления (величины ассигнований), выбиравшиеся ранее на первых шагах (для первых трех предприятий). Итак, подлежат анализу все элементы множества x_3 состояний: 0, 20, ..., 100 и множества u_4 управлений: 0, 20, ..., 100. Напомним, что в интересах всего четырехшагового процесса может оказаться целесообразным выделение четвертому предприятию суммы в 0 млн ден. ед., поэтому мы не исключаем из множеств x_3 и u_4 элемент 0. Результаты условной оптимизации четвертого шага приведены в табл. 8.7, где для каждого состояния из множества x_3 указаны единственное условно-оптимальное управление из множества u_4 и соответствующая условно-оптимальная величина F_4 прироста выпуска продукции, совпадающая на этом шаге с непосредственным приростом z_4.

Таблица 8.7

x_3	u_4	z_4	F_4
0	0	0	0
20	20	16	16
40	40	37	37
60	60	46	46
80	80	63	63
100	100	80	80

На втором этапе условной оптимизации исследуем третий шаг, для которого основное функциональное уравнение (8.1) при $i = 3$ имеет вид

$$F_3(x_2, u_3) = \max_{u_3} (z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3)). \qquad (8.5)$$

Множества x_2 и x_3 состоят из элементов 0, 20, ..., 100, множество u_3 допустимых управлений — из тех же элементов. Для каждого допустимого состояния надлежит выбрать условно-оптимальное управление и найти условно-оптимальную величину прироста выпуска продукции. Так, если на момент выделения средств третьему предприятию в наличии имеется 20 млн ден. ед., то третьему предприятию можно выделить либо 0, либо 20 млн ден. ед. Используя условия задачи (см. табл. 8.6) и результаты условной оптимизации четвертого шага (см. табл. 8.7), на основе равенства (8.5) находим

$$F_3(x_2, u_3) = \max_{0,20} (z_3(20, 0) + F_4(20), z_3(20, 20) + F_4(0)) =$$

$$= \max_{0,20} (0 + 16; 11 + 0) = 16.$$

Отсюда видно, что максимальная величина прироста в рассматриваемом варианте составляет 16 млн ден. ед. и достигается в том случае, когда третьему предприятию средства не выделяются (прирост обеспечивается только четвертым предприятием). Итак, если к моменту выделения средств третьему предприятию имеется 20 млн ден. ед., то условно-оптимальным управлением на третьем шаге будет выделение третьему предприятию суммы в 0 млн ден. ед., при этом условно-оптимальное значение целевой функции равно 16.

Аналогичным образом осуществляется выбор условно-оптимальных управлений и для всех остальных допустимых состояний из множества x_2. Например, если к моменту выделения средств третьему предприятию имеется 60 млн ден. ед., то этому предприятию можно выделить либо 0, либо 20, либо 40, либо 60 млн ден. ед. Определенно решается вопрос с привлечением равенства (8.5), на основе которого получаем

$$F_3(x_2, u_3) = \max_{0,\,20,\,40,\,60} (0 + 46;\ 11 + 37;\ 36 + 16;\ 45 + 0) = 52.$$

Из этого равенства видно, что максимальное значение прироста в 52 млн ден. ед. достигается в случае, если третьему предприятию будет выделено 40 млн ден. ед. Это и есть условно-оптимальное управление для рассмотренного варианта на третьем шаге.

Все вычисления для третьего шага приведены в табл. 8.8.

Таблица 8.8

x_2	u_3	x_3	z_3	F_4	$z_3 + F_4$	F_3
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	16	16	16
	20	0	11	0	11	–
40	0	40	0	37	37	37
	20	20	11	16	27	–
	40	0	36	0	36	–
60	0	60	0	46	46	–
	20	40	11	37	48	–
	40	20	36	16	52	52
	60	0	45	0	45	–
80	0	80	0	63	63	–
	20	60	11	46	57	–
	40	40	36	37	73	73
	60	20	45	16	61	–
	80	0	60	0	60	–
100	0	100	0	80	80	–
	20	80	11	63	74	–
	40	60	36	46	82	82
	60	40	45	37	82	82
	80	20	60	16	76	–
	100	0	77	0	77	–

Читателю предлагается самостоятельно закончить процедуру условной оптимизации. Для контроля результаты приведены в табл. 8.9 и 8.10. В этих таблицах (в отличие от табл. 8.8) сохранены только условно-оптимальные управления, а все заведомо невыгодные варианты опущены.

Таблица 8.9

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	$z_2 + F_3$	F_2
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	16	16	16
40	0	40	0	37	37	37
60	0	60	0	52	52	52
80	0	80	0	73	73	73
100	20	80	12	73	85	85

Таблица 8.10

x_0	u_1	x_1	z_1	F_2	$z_1 + F_2$	F_1
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	16	16	16
40	0	40	0	37	37	37
60	0	60	0	52	52	52
80	0	80	0	73	73	73
100	0	100	0	85	85	85

После завершения условной оптимизации переходим к безусловной оптимизации — поиску наиболее выгодного распределения кредита между предприятиями. Обращаемся к табл. 8.10, ибо она соответствует первому шагу. Из этой таблицы видно, что при кредите в 100 млн ден. ед. максимальный прирост выпуска продукции на всех четырех предприятиях составляет 85 млн ден. ед. (см. столбец F_1), если первому предприятию средств не выделять (см. столбец u_1). Остаток кредита 100 – 0 = 100 (см. столбец x_1) подлежит оптимальному распределению между остальными тремя предприятиями.

Из табл. 8.9 следует, что из 100 млн ден. ед. (см. столбец x_1) второму предприятию надлежит выделить 20 млн ден. ед. (см. столбец u_2), а остаток 100 – 20 = 80 млн ден. ед. (см. столбец x_2) необходимо оптимально распределить между оставшимися двумя предприятиями. Из табл. 8.8

находим, что из 80 млн ден. ед. (см. столбец x_2) третьему предприятию надо выделить 40 млн ден. ед. (см. столбец u_3), после чего остается 80 – 40 = 40 млн ден. ед. (см. столбец x_3). Наконец, из табл. 8.7 следует, что последние 40 млн ден. ед. (см. столбец x_3) ассигнуются четвертому предприятию (см. столбец u_4). Найденное оптимальное распределение кредита можно записать в виде вектора $\mathbf{u}^* = (u_1^*;\ u_2^*;\ u_3^*;\ u_4^*) = (0;\ 20;\ 40;\ 40)$. Именно такое распределение обеспечивает производственному объединению максимальный прирост выпуска продукции в 85 млн ден. ед.

Заметим в заключение, что, решив поставленную задачу о нахождении оптимального распределения 100 млн ден. ед. между четырьмя предприятиями, мы попутно получили возможность найти оптимальные распределения кредита в 20, 40, 60 и 80 млн ден. ед. между теми же предприятиями. Эти распределения можно найти по табл. 8.7—8.10, пользуясь изложенной методикой. Так, читателю предлагается убедиться в оптимальности следующего распределения 60 млн ден. ед. по предприятиям объединения: $u_1^* = 0$, $u_2^* = 0$, $u_3^* = 40$, $u_4^* = 20$, обеспечивающего объединению максимальный прирост выпуска продукции в 52 млн ден. ед.

8.5. Фермеру принадлежит стадо скота, насчитывающее 60 голов. Один раз в году фермер решает, сколько голов скота продать и сколько оставить. Прибыль от продажи одной головы скота в любом году рассматриваемого четырехлетнего периода составляет 10 ден. ед. Количество оставленных голов скота в следующем году увеличивается на 100 %. По истечении четырех лет фермер намеревается продать все стадо, так как переходит на производство другой продукции. Производственные помещения не позволяют ему содержать более 200 голов скота. Найти оптимальный план продажи скота по годам четырехлетнего периода, при котором прибыль, полученная за этот период, будет максимальной.

8.6. Производственному объединению из четырех предприятий выделяется банковский кредит в сумме 60 млн ден. ед. для увеличения выпуска продукции. Значения $z_i(u_i)$ $(i = \overline{1, 4})$ дополнительного дохода, получаемого на предприятиях объединения в зависимости от выделенной суммы u_i, приведены в табл. 8.11. Распределить выделенный кредит между предприятиями так, чтобы дополнительный доход объединения был максимальным.

Таблица 8.11

Выделяемые средства u_i, млн ден. ед.	Предприятие			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Получаемый доход, млн ден. ед.			
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$	$z_4(u_i)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44

8.7. Решить задачу 8.6 для производственного объединения из трех предприятий по данным, приведенным в табл. 8.12.

Таблица 8.12

Выделяемые средства u_i, млн ден. ед.	Предприятие		
	№ 1	№ 2	№ 3
	Получаемый доход, млн ден. ед.		
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$
20	9	11	13
40	17	34	28
60	29	46	37

8.8. На трех станках, работающих параллельно, необходимо изготовить 20 изделий. Накладные расходы (постоянные затраты на единицу оборудования, не относимые на себестоимость продукции), затраты на производство единицы продукции и максимальная производительность для каждого станка указаны в табл. 8.13.

Таблица 8.13

Номер станка	Накладные расходы	Затраты на производство единицы продукции	Производительность станка, изделий
1	10	10	6
2	30	2	8
3	20	5	12

Найти оптимальный план загрузки станков, минимизирующий затраты.

Указание. За i-й шаг процесса принятия решений целесообразно взять выбор i-го станка для загрузки, а за состояние — объем работы, выполненной на станках, загруженных на предыдущих шагах. Множество состояний определяется исходя из производительности станка, общего количества требуемых изделий и количества продукции, произведенной на станках, загруженных на предшествующих шагах.

8.9. Совет директоров фирмы изучает предложения по наращиванию мощностей на трех принадлежащих фирме предприятиях. На реализацию данного мероприятия фирма выделяет средства в объеме 5 млн ден. ед. Каждое предприятие представляет на рассмотрение проекты, характеризующиеся суммарными затратами C_i и доходом R_i, связанными с реализацией каждого из проектов. Соответствующие данные приведены в табл. 8.14, в которую включен также проект с нулевыми затратами, что позволяет учесть возможность отказа от расширения какого-либо предприятия. Прочерки в таблице говорят о том, что соответствующий проект неприменим на данном предприятии. Каждое предприятие может выбрать любой из предложенных проектов. Требуется выбрать такой проект расширения производства для каждого предприятия, чтобы получить максимальный суммарный доход от инвестиций в объеме 5 млн ден. ед.

Таблица 8.14

Проект	Предприятие					
	№ 1		№ 2		№ 3	
	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
$П_1$	0	0	0	0	0	0
$П_2$	1	5	2	8	1	3
$П_3$	2	6	3	9	–	–
$П_4$	–	–	4	12	–	–

8.10. Самолет загружается предметами $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Предмет $П_i$ имеет массу m_i и стоимость r_i $(i = \overline{1, 3})$. Грузоподъемность самолета равна M. Необходимые числовые данные (в условных единицах) приведены в табл. 8.15. Установить, сколько предметов каждого типа следует поместить в самолет, чтобы общая стоимость груза была максимальной. Задачу решить для трех вариантов грузоподъемности самолета: а) $M = 15$; б) $M = 4$; в) $M = 3$.

Таблица 8.15

$П_i$	m_i	r_i
$П_1$	2	65
$П_2$	3	80
$П_3$	1	30

8.11. Решить задачу 8.10 по данным табл. 8.16 и 8.17.

Таблица 8.16

$П_i$	m_i	r_i	M
$П_1$	4	70	
$П_2$	1	20	6
$П_3$	2	40	

Таблица 8.17

$П_i$	m_i	r_i	M
$П_1$	1	30	
$П_2$	2	60	4
$П_3$	3	80	

Задачи о замене оборудования. Своевременная замена устаревшего оборудования новым — одна из насущных проблем любой сферы производственной деятельности. Дело в том, что с течением времени любое оборудование изнашивается и физически, и «морально», а потому на каком-то этапе его эксплуатация становится менее выгодной, нежели приобретение и использование нового оборудования. В связи с этим и возникает задача определения наиболее подходящего момента замены. В качестве критерия оптимальности при замене оборудования в промышленности обычно принимают минимум ожидаемых затрат или максимум ожидаемой прибыли за некоторый период времени. Рассматриваются различные постановки задачи о замене оборудования. Мы ограничимся наиболее простой ситуацией.

В начале планового периода из N лет имеется оборудование возраста t лет. Для каждого года планового периода известны стоимость $r(t)$ произведенной с использованием имеющегося оборудования продукции и затраты $v(t)$, связанные с его эксплуатацией. Эти характеристики зависят от возраста t оборудования. Известны также остаточная стоимость s оборудования, не зависящая от его возраста, и цена p единицы нового оборудования, не меняющаяся в рассматриваемом плановом периоде.

Требуется разработать оптимальную политику в отношении имеющегося оборудования, т. е. в начале каждого года планового периода установить, сохранить в этом году оборудование или продать его по остаточной стоимости s и купить новое по цене p, с тем чтобы ожидаемая прибыль за N лет достигла максимальной величины.

В качестве физической системы S в описанной ситуации выступает оборудование, состояние которого с течением времени изменяется. В качестве шага процесса принятия решения здесь естественно считать год планового периода. Таким образом, мы имеем дело с N-шаговым процессом.

Состояние оборудования (состояние системы S) будет полностью характеризоваться его возрастом t. Судя по условию задачи, параметр t может принимать значения 0, 1, 2, ..., $t - 1$, t. Значение $t = 0$ соответствует новому оборудованию (оборудованию «нулевого возраста»).

Дадим толкование общим обозначениям, в которых записано основное функциональное уравнение (8.1), применительно к рассматриваемой задаче: x_{i-1} — множество состояний оборудования перед i-м годом; элементами этого множества будут числа 1, 2, ..., t, характеризующие возраст оборудования; перед началом планового периода не исключается и оборудование нулевого возраста; u_i — множество управлений (решений), которые могут быть приняты в начале i-го года. В данной задаче в начале любого года планового периода по условию можно принять одно из двух управлений: 1) оборудование сохранить до $(i + 1)$-го года, 2) оборудование заменить, реализовав старое по остаточной стоимости s и приобретя новое по цене p. Таким образом, множество u_i состоит всего из двух элементов, которые мы кратко будем обозначать «сохранение» и «замена».

Поскольку в рассматриваемой задаче управление выбирается в начале каждого года, то здесь целесообразно различать два множества состояний оборудования: $x_i^{\text{н}}$ — множество состояний сразу после выбора управления в i-м году и x_i — множество состояний в конце i-го года. В случае сохранения оборудования его возраст не изменяется и характеризуется соответствующим элементом множества x_{i-1}, в случае замены возраст нового оборудования принимается равным нулю. К концу года и в том, и в другом случае оборудование «постареет» на один год.

Остальным элементам уравнения (8.1) дадим следующее толкование: z_i — прибыль в i-м году от использования оборудования; $F_i(x_{i-1}, u_i)$ — условно-оптимальная прибыль от использования оборудования в период с i-го по N-й год при условии, что перед i-м годом возраст оборудования характеризовался элементом множества x_{i-1} и в начале i-го года было принято некоторое управление из множества u_i; $F_{i+1}(x_i)$ — условно-оптимальная прибыль от использования оборудования в период с $(i + 1)$-го по N-й год при условии, что в конце i-го года возраст оборудования характеризовался элементом множества x_i.

Основное функциональное уравнение для последнего, N-го, года планового периода в соответствии с равенством (8.2) запишется в следующем виде:

$$F_N(x_{N-1}, u_N) = \max_{u_N} z_N(x_{N-1}, u_N). \tag{8.6}$$

Прибыль z_N в N-м году зависит от состояния оборудования, в котором оно оказалось сразу после выбора управления в начале этого года, и характера управления («сохранение» или «замена»), а поэтому равенство (8.6) целесообразно переписать в форме

$$F_N(x_{N-1}, u_N) = \max_{u_N} z_N(x_N^{\text{н}} , u_N). \tag{8.7}$$

При этом если в начале года выбрано управление «сохранение», то прибыль z_N выражается разностью

$$r(x_N^{\text{н}}) - v(x_N^{\text{н}}); \tag{8.8}$$

если же выбрано управление «замена», то прибыль z_N можно записать в виде

$$s - p + r(0) - v(0). \tag{8.9}$$

Учитывая выражения (8.8) и (8.9), прибыль в N-м году в зависимости от выбранного управления запишем условно в следующей форме:

$$z_N(x_N^{\text{н}}, u_N) = \begin{cases} r(x_N^{\text{н}}) - v(x_N^{\text{н}}) & \text{– сохранение,} \\ s - p + r(0) - v(0) & \text{– замена.} \end{cases} \tag{8.10}$$

Понятно, что максимальная прибыль $F_N(x_{N-1}, u_N)$ определяется наибольшим из выражений (8.8) и (8.9). Согласимся, что в случае, если оба управления («сохранение» и «замена») приводят к одной и той же прибыли, целесообразно выбрать управление «сохранение», так как имеющееся оборудование нам хорошо известно и мы к нему привыкли.

При произвольном $i < N$ основное функциональное уравнение применительно к рассматриваемой задаче запишется в виде

$$F_i(x_{i-1}, u_i) = \max_{u_i} (z_i(x_{i-1}^{\text{н}} , u_i) + F_{i+1}(x_i)), \tag{8.11}$$

где

$$z_i(x_i^{\text{н}}, u_i) = \begin{cases} r(x_i^{\text{н}}) - v(x_i^{\text{н}}) & \text{– сохранение,} \\ s - p + r(0) - v(0) & \text{– замена.} \end{cases} \tag{8.12}$$

Пользуясь функциональными уравнениями (8.7), (8.10), (8.11) и (8.12), можно развернуть процедуру условной оптимизации, начав ее с последнего года планового периода. При этом последовательно в каждом году будут найдены условно-оптимальные значения F_N, F_{N-1}, ..., F_2, F_1 прибыли для оборудования различного возраста t. После этого останется пройти процесс в прямом направлении и сформировать безусловную оптимальную политику в отношении имеющегося оборудования. Описанная методика станет понятной, когда читатель разберет числовой пример, приводимый ниже.

Пример 8.3. Разработать оптимальную политику по критерию прибыли на ближайшие четыре года в отношении оборудования не старше шести лет, если для каждого года планового периода известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой с использованием этого оборудования, и эксплуатационные расходы $v(t)$ (табл. 8.18). Известны также остаточная стоимость s, равная 4 и не зависящая от возраста оборудования, и цена p нового оборудования, равная 13 и не меняющаяся в плановом периоде.

Таблица 8.18

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	27	26	26	25	24	23	21
$v(t)$	15	15	16	16	16	17	19

Решение. Начнем процедуру условной оптимизации с анализа последнего, четвертого, года планового периода. Функциональные уравнения (8.7) и (8.10) с учетом числовых данных примера и табл. 8.18 принимают вид:

$$F_4(x_3, u_4) = \max_{u_4} z_4(x_4^{\text{н}}, u_4), \tag{8.13}$$

$$z_4(x_4^{\text{н}}, u_4) = \begin{cases} r(x_4^{\text{н}}) - v(x_4^{\text{н}}) & \text{– сохранение,} \\ 3 & \text{– замена.} \end{cases} \tag{8.14}$$

Множество x_3 характеризует состояние оборудования перед четвертым годом и состоит из элементов 1, 2, ..., 6. Множество $x_4^{\text{н}}$ состояний оборудования после выбора управления в начале четвертого года состоит из элементов 0, 1, 2, ..., 6. Для каждого из них найдем прибыль z_4.

Если возраст оборудования 1 год, то, пользуясь равенством (8.14) и табл. 8.18, находим при первом («сохранение») и втором («замена») управлениях соответствующие величины 11 и 3 прибыли z_4:

$$z_4(1, u_4) = \begin{cases} r(1) - v(1), \\ \quad 3 \end{cases} = \begin{cases} 11 - \text{сохранение}, \\ \ 3 - \text{замена}. \end{cases}$$

Из этого равенства видно, что на четвертом году оборудование целесообразно сохранить, так как при этом прибыль будет больше, чем при замене (11 > 3).

Итак, с учетом равенства (8.13) утверждаем, что на четвертом году условно-оптимальным будет управление «сохранение», поскольку в этом случае достигается условно-оптимальное (максимальное) значение F_4 прибыли. Результаты анализа будем записывать в табл. 8.19.

Таблица 8.19

x_3	u_4	$x_4^{\text{н}}$	z_4	F_4
1	Сохранение Замена	1 0	11 3	<u>11</u> –
<u>2</u>	<u>Сохранение</u> Замена	<u>2</u> 0	10 3	<u>10</u> –
3	Сохранение Замена	3 0	9 3	9 –
4	Сохранение Замена	4 0	8 3	8 –
5	Сохранение Замена	5 0	6 3	6 –
6	Сохранение Замена	6 0	2 3	– 3

Предположим теперь, что к началу четвертого года имеется оборудование возраста 2 года. Тогда аналогично предыдущему получаем

$$z_4(2, u_4) = \begin{cases} r(2) - v(2), \\ \quad 3 \end{cases} = \begin{cases} 10 - \text{сохранение}, \\ \ 3 - \text{замена}. \end{cases}$$

Понятно, что и в этом случае условно-оптимальным будет управление «сохранение», а условно-оптимальная величина F_4 прибыли равна 10.

Действуя аналогично, найдем условно-оптимальные управления и условно-оптимальные значения прибыли для остальных элементов 3, 4, 5 и 6 множества x_3 (см. табл. 8.19).

Переходя к анализу третьего года планового периода, записываем функциональные уравнения (8.11) и (8.12) при $i = 3$:

$$F_3(x_2,\ u_3) = \max_{u_3}\,(z_3(\,x_3^{\text{н}}\,,\ u_3) + F_4(x_3)), \tag{8.15}$$

$$z_3(x_3^{\text{н}},\ u_3) = \begin{cases} r(x_3^{\text{н}}) - v(x_3^{\text{н}}) - \text{сохранение}, \\ \quad 3 \qquad\quad - \text{замена}. \end{cases} \tag{8.16}$$

На этом этапе подлежит условной оптимизации двухлетний период, состоящий из третьего и четвертого годов, из которых четвертый уже оптимизирован, и результаты этого необходимо учесть (см. слагаемое $F_4(x_3)$ в равенстве (8.15)).

К началу третьего года состояние (возраст) оборудования может выражаться числами 1, 2, ..., 6. Это будут элементы множества x_2.

Предположим, что к началу третьего года имелось оборудование возраста один год. Тогда с учетом данных табл. 8.18 равенство (8.16) приобретает вид

$$z_3(1,\ u_3) = \begin{cases} r(1) - v(1) \\ \quad 3 \end{cases} = \begin{cases} 11 - \text{сохранение}, \\ \ 3 - \text{замена}. \end{cases}$$

Учитывая результат условной оптимизации четвертого года (см. табл. 8.19), в соответствии с равенством (8.15) находим:

$$F_3(x_2,\ u_3) = \max_{u_3}\,(z_3(1;\ \text{сохранение}) + F_4(2)),$$

$$z_3((0;\ \text{замена}) + F_4(1)) = \max_{u_3}\,(11 + 10;\ 3 + 11) = 21.$$

Из последнего равенства видно, что на третьем году условно-оптимальным в данной ситуации будет управление «сохранение», так как именно при этом управлении прибыль за два последних года достигает условно-оптимальной (максимальной) величины F_3, равной 21. В компактной форме результаты проведенных рассуждений записаны в первых двух строках табл. 8.20.

Таблица 8.20

x_2	u_3	$x_3^н$	z_3	x_3	F_4	$z_3 + F_4$	F_3
<u>1</u>	<u>Сохранение</u>	1	11	<u>2</u>	10	21	<u>21</u>
	Замена	0	3	1	11	14	–
2	Сохранение	2	10	3	9	19	19
	Замена	0	3	1	11	14	–
3	Сохранение	3	9	4	8	17	17
	Замена	0	3	1	11	14	–
4	Сохранение	4	8	5	6	14	14
	Замена	0	3	1	11	14	–
5	Сохранение	5	6	6	3	9	–
	Замена	0	3	1	11	14	14
6	Сохранение	6	2	–	–	–	–
	Замена	0	3	1	11	14	14

Аналогичные рассуждения помогают заполнить остальные строки табл. 8.20 для оборудования возраста 2, 3, ..., 6 лет.

В табл. 8.21 и 8.22 приведены результаты условной оптимизации второго и первого годов планового периода с учетом ранее выполненной оптимизации соответственно двух и трех последних лет этого периода. В указанных таблицах (в отличие от табл. 8.20) сохранены лишь те строки, которые соответствуют условно-оптимальным управлениям. Читателю предлагается выполнить все опущенные выкладки.

Таблица 8.21

x_1	u_2	$x_2^н$	z_2	x_2	F_3	$z_2 + F_3$	F_2
1	Сохранение	1	11	2	19	30	30
2	Сохранение	2	10	3	17	27	27
<u>3</u>	<u>Замена</u>	0	3	<u>1</u>	21	24	<u>24</u>
4	Замена	0	3	1	21	24	24
5	Замена	0	3	1	21	24	24
6	Замена	0	3	1	21	24	24

Таблица 8.22

x_0	u_1	$x_1^н$	z_1	x_1	F_2	$z_1 + F_2$	F_1
0	Сохранение	0	12	1	30	42	42
1	Сохранение	1	11	2	27	38	38
2	Сохранение	2	10	3	24	34	34
3	Сохранение	3	9	4	24	33	33
4	Замена	0	3	1	30	33	33
5	Замена	0	3	1	30	33	33
6	Замена	0	3	1	30	33	33

Процедура условной оптимизации завершена. При этом в табл. 8.19 содержатся условно-оптимальные управления только для четвертого года, в табл. 8.20 — для двухлетнего периода из третьего и четвертого годов, в табл. 8.21 — для трехлетнего периода из второго, третьего и четвертого годов, в табл. 8.22 — для всего четырехлетнего периода с первого по четвертый год. По этим таблицам в процессе безусловной оптимизации можно сформировать оптимальную политику для оборудования любого возраста не старше шести лет в течение четырехлетнего периода.

Предположим, что оптимальную политику на ближайшие четыре года необходимо разработать в отношении оборудования двухлетнего возраста. По строке, соответствующей элементу 2 столбца x_0 табл. 8.22, находим, что при оптимальной политике прибыль от использования интересующего нас оборудования составит 34 ден. ед. (см. столбец F_1) при условии, что в первом году планового периода оборудование будет сохранено (см. столбец u_1).

Переходя к табл. 8.21 и помня, что за год оборудование «постареет» на год и ко второму году станет трехлетним, в строке, соответствующей элементу 3 столбца x_1, обнаруживаем элемент «замена», что говорит о необходимости замены оборудования на втором году планового периода. По прошествии года новое оборудование (нулевого возраста) достигнет годовалого возраста. Обращаясь к строке, соответствующей элементу 1 столбца x_2 табл. 8.20, устанавливаем, что на третьем году планового периода оборудование следует сохранить (см. столбец u_3). К началу четвертого года в нашем распоряжении будет оборудование двухлетнего возраста. По табл. 8.19 (см. строку, соответствующую элементу 2 столбца x_3) заключаем, что и на четвертом году оборудование надлежит сохранять (см. столбец u_4).

Итак, оптимальная политика на ближайшие четыре года по отношению к оборудованию двухлетнего возраста предполагает, что на первом году оно сохраняется, на втором — заменяется новым и это оборудование сохраняется в оставшиеся два года. При такой политике прибыль в плановом периоде максимизируется и составляет 34 ден. ед. Результат решения примера можно записать в виде следующей цепочки:

$$F_1(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{1-й год}} F_2(3)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{2-й год}} F_3(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{3-й год}} F_4(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}}.$$

Формирование оптимальной политики станет более наглядным, если основные результаты, содержащиеся в последних столбцах табл. 8.19—8.22, записать в виде сводной таблицы, которую мы назовем *матрицей максимальных прибылей* (табл. 8.23). Чтобы различить в этой таблице, в результате какой политики (сохранения либо замены) получается то или иное значение максимальной прибыли, разграничим жирной чертой элементы таблицы, соответствующие различным политикам. В результате в первом столбце окажутся отделенными все элементы, начиная с элемента, соответствующего четырехлетнему возрасту оборудования (см. табл. 8.22). Аналогичное разделение элементов произведем во всех других столбцах. Элементы, расположенные выше жирной линии, находятся в «области сохранения» оборудования, оказавшиеся ниже жирной линии, — в «области замен».

Вернемся к рассмотренному примеру и сформируем оптимальную политику, пользуясь табл. 8.23. По условию к началу первого года возраст оборудования составляет два года. На пересечении первого столбца и строки $t = 2$ находим элемент 34 — максимальную прибыль за четыре года. Этот элемент оказался в области сохранения. Следовательно, на первом году оборудование необходимо сохранить. К началу второго года мы придем с оборудованием возраста 2 + 1 = 3 года. На пересечении второго

Таблица 8.23

Возраст оборудования t, лет	Годы планового периода			
	1—4	2—4	3, 4	4
	Максимальная прибыль, ден. ед.			
0	42	–	–	–
1	38	30	21	11
2	34	27	19	10
3	33	24	17	9
4	33	24	14	8
5	33	24	14	6
6	33	24	14	3

столбца и строки $t = 3$ читаем значение 24, оказавшееся в области замен. Заменив оборудование и использовав его в течение года, мы к началу третьего года окажемся с оборудованием возраста 1 год. На пересечении третьего столбца и строки $t = 1$ находится элемент 21, расположенный в области сохранения. Значит, на третьем году оборудование надо сохранить. К началу четвертого года возраст оборудования достигнет 2 лет. На пересечении четвертого столбца и строки $t = 2$ стоит элемент 10, расположенный в области сохранения. Таким образом, и на четвертом году оборудование следует сохранить.

Читателю предлагается убедиться по матрице максимальных прибылей (см. табл. 8.23) в оптимальности следующей политики в отношении оборудования пятилетнего возраста:

$$33 \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-й год}} 30 \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{2-й год}} 19 \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{3-й год}} 9 \xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}} .$$

Для решения рассмотренной задачи можно применять и другие вычислительные схемы, но использованная схема позволяет строить простой машинный алгоритм решения.

Мы рассмотрели задачу о замене оборудования в упрощенной постановке. В реальных условиях часто требуется учитывать три варианта решений (управлений) на каждом шаге оптимизации: сохранить оборудование, произвести его капитальный ремонт, продать устаревшее оборудование и приобрести более совершенное. Идеи решения задачи в такой постановке те же, что использовались выше, но резко возрастает объем вычислительных работ.

8.12. В начале планового периода из N лет имеется оборудование возраста не старше t лет. Для каждого года планового периода известны стоимость $r(t)$ произведенной с использованием этого оборудования продукции и затраты $v(t)$, связанные с его эксплуатацией. Известны также остаточная стоимость s оборудования и цена p единицы нового оборудования. Требуется разработать оптимальную политику в отношении имеющегося оборудования, т. е. в начале каждого года планового периода установить, сохранять в этом году оборудование или продать его по остаточной стоимости и купить новое, с тем чтобы ожидаемая прибыль за N лет достигла максимальной величины. Задачу решить при следующих числовых данных:

а) $N = 8$, $s = 2$, $p = 6$, значения $r(t)$ и $u(t)$ см. в табл. 8.24.

Таблица 8.24

t	0	1	2	3	4	5
$r(t)$	46	46	45	45	45	43
$v(t)$	15	15	17	18	18	19

Пользуясь составленной матрицей максимальных прибылей для оборудования не старше 5 лет, сформировать оптимальную политику по отношению к оборудованию, использовавшемуся до начала планового периода в течение: 4 лет; 1 года;

б) $N = 10$, $s = 4$, $p = 18$, значения $r(t)$ и $v(t)$ см. в табл. 8.25.

Таблица 8.25

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	31	30	28	28	27	26	26	25	24	24	23
$v(t)$	8	9	9	10	10	10	11	12	14	16	18

На основе матрицы максимальных прибылей, составленной для оборудования не старше 10 лет, сформировать оптимальную политику для оборудования возраста: 7 лет; 3 года; 9 лет.

8.13. Разработать оптимальную политику использования и замены оборудования не старше 6 лет, если известны: стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с помощью данного оборудования, ежегодные эксплуатационные расходы $v(t)$, остаточная стоимость s и стоимость p нового оборудования. Продолжительность планового периода принять равной 6 годам. Задачу решить при следующих числовых данных:

а) $t = 4$, $s = 2$, $p = 10$, значения $r(t)$ и $v(t)$ см. в табл. 8.26;

Таблица 8.26

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	22	21	20	18	16	15	13
$v(t)$	12	13	14	15	16	17	18

б) $t = 5$, $s = 1$, $p = 11$, значения $r(t)$ и $v(t)$ см. в табл. 8.27.

Таблица 8.27

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	25	23	21	19	17	15	13
$v(t)$	13	15	17	19	21	23	25

Задачи оптимального управления поставками ресурсов. Несвоевременная поставка ресурсов, как и недопоставка, нарушает ритм производства, ведет к снижению выпуска продукции, а значит, и дохода предприятия. Потери возрастают вследствие замедления оборачиваемости средств. Предприятие терпит убытки и в случае чрезмерных затрат на хранение и содержание избыточных запасов ресурсов, когда омертвляются в запасах значительные средства, исключаемые из оборота. В этой связи возникает задача оптимизации управления поставками и запасами ресурсов с целью минимизации затрат на организацию снабжения предприятия ресурсами с учетом потребностей в них. Обратимся к простейшей задаче такого типа.

Пример 8.4. Для ритмичной работы предприятия необходимо систематическое пополнение запаса ресурса R, расходуемого при производстве продукции. Потребность ресурса в рассматриваемый плановый период, состоящий из четырех месяцев, характеризуется по месяцам следующими числами: 150, 50, 100 и 100 ед. На начало первого месяца на складах предприятия имеется запас ресурса в объеме 100 ед. Складские площади ограниченны, и хранить можно к концу месяца не более 300 ед. ресурса R. По завершении планового периода предприятие перейдет на выпуск новой продукции и потребность в ресурсе R отпадет, а поэтому к концу четвертого месяца весь его запас должен быть израсходован. Регулярное пополнение запаса в плановом периоде связано с определенными затратами, зависящими от объема u_i партии поставки. Эта зависимость — функция $K_i(u_i)$ затрат на пополнение запаса (затраты на организацию заказа, оплата заказа, транспортные расходы) — задана табл. 8.28. Пополнение запаса производится партиями поставок в объемах, кратных 50 ед. (вагон, автомашина и т. п.). Хранение запасенного ресурса также требует соответствующих затрат, величина которых в i-м месяце зависит от среднего объема $\overline{m_i}$ запаса, хранимого в этом месяце. Функция $\varphi_i(\overline{m_i})$ затрат на хранение задана табл. 8.29.

Таблица 8.28

u_i	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$K_i(u_i)$	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

Таблица 8.29

$\overline{m}_i$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$\varphi_i(\overline{m}_i)$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54

Требуется так организовать процесс пополнения и хранения запаса ресурса R на предприятии в плановом периоде, чтобы суммарные затраты на пополнение запаса и хранение его остатков были минимальными при непременном условии бесперебойного выпуска продукции.

Решение. В качестве физической системы S в данном случае выступает действующее предприятие с происходящими на нем процессами пополнения, потребления и хранения запаса ресурса R. Эти процессы естественно распадаются на отдельные шаги — месяцы планового периода. Процесс выбора управления также многошаговый. Он распадается на четыре шага.

Дадим толкование обозначениям, в которых записано основное функциональное уравнение (8.1), применительно к данной задаче. Символ x_{i-1} означает множество значений объема запаса ресурса R, имеющегося на складах предприятия перед i-м месяцем $(i = \overline{1, 4})$; x_j — множество значений остатка ресурса перед $(i + 1)$-м месяцем; u_i — множество значений объема поставки ресурса R в начале i-го месяца (множество управлений, которые могут быть приняты в начале i-го месяца); $F_i(x_{i-1}, u_i)$ —условно-оптимальные затраты на организацию поставки ресурса R и его хранение в течение последних $N - (i - 1)$ месяцев при условии, что запас ресурса перед этим периодом характеризовался элементом множества x_{i-1}, а выбранный объем поставки характеризовался элементом множества u_i; $z_i(x_{i-1}, u_i)$ — значение целевой функции в i-м месяце, характеризующее суммарные затраты на пополнение запаса и хранение неизрасходованных остатков в i-м месяце при условии, что перед этим месяцем объем запаса характеризовался элементом множества x_{i-1}, а управление было выбрано из множества u_i; численные значения целевой функции находятся по формуле

$$z_i(x_{i-1}, u_i) = K_i(u_i) + \varphi_i(\overline{m_i}), \tag{8.17}$$

где средний объем $\overline{m_i}$ хранимых запасов в i-м месяце определяется выражением

$$\overline{m_i} = v_i/2 + x_i \tag{8.18}$$

(здесь v_i — объем потребления ресурса в i-м месяце); $F_{i+1}(x)$ — условно-оптимальные затраты на пополнение запаса и хранение остатков, начиная с $(i + 1)$-го месяца и до конца планового периода, при условии, что объем запаса перед $(i + 1)$-м месяцем характеризовался элементом множества (x_i).

Приступая к условной оптимизации последнего, четвертого, месяца планового периода, запишем соответствующее функциональное уравнение, получаемое из уравнения (8.2) при $N = 4$:

$$F_4(x_3,\ u_4) = \max_{u_4} z_4(x_3,\ u_4). \qquad (8.19)$$

По условию задачи в четвертом месяце требуется 100 ед. ресурса, а к концу месяца весь запас должен быть израсходован, поэтому множество x_3 допустимых остатков ресурса перед четвертым месяцем будет состоять из элементов 0, 50 и 100. В таком случае поставки могут осуществляться партиями объемом соответственно в 100, 50 или 0 ед. Это будут элементы множества u_4 допустимых управлений на четвертом месяце. Условно-оптимальные затраты F_4 меняются в зависимости от величины остатка и выбранного объема партии поставки (условно-оптимального управления). Все допустимые варианты представлены в табл. 8.30. При расчетах использованы формулы (8.17)—(8.19) и данные табл. 8.28 и 8.29.

Таблица 8.30

x_3	u_4	x_4	K_4	$\overline{m}_4$	φ_4	z_4	F_4
0	100	0	40	50	8	48	48
50	50	0	48	50	8	56	56
<u>100</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	50	8	8	<u>8</u>

Например, если остаток ресурса перед четвертым месяцем составлял 100 ед., то на четвертом месяце поставлять ресурс нет необходимости, так как спрос на него ($v_4 = 100$) будет покрыт этим остатком. Одновременно будет выполнено и требование о полном использовании запаса к концу четвертого месяца (остаток равен нулю). Следовательно, объем поставки будет равен нулю, а значит, не потребуются и затраты на пополнение запаса ($K_4(u_4) = K_4(0) = 0$). Средний объем хранимых запасов в четвертом месяце $\overline{m}_4 = v_4/2 + x_4 = 100/2 + 0 = 50$, а затраты на хранение $\varphi_4(\overline{m}_4) = \varphi_4(50) = 8$. Так что целевая функция $z_4(x_3,\ u_4) = z_4(100,\ 0) = K_4(0) + \varphi_4(50) = 0 + 8 = 8$, а условно-оптимальное значение затрат $F_4(x_3,\ u_4) = F_4(100,\ 0) = \max\limits_{u_4} z_4(100,\ 0) = 8$.

Все эти результаты и записаны в последней строке табл. 8.30.

Переходя ко второму этапу условной оптимизации — анализу периода из двух последних месяцев, из которых для четвертого условно-оптимальные управления найдены (см. табл. 8.30), запишем основное функциональное уравнение, положив в равенстве (8.1) $i = 3$:

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{u_3} (z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3)). \qquad (8.20)$$

Множество x_2 допустимых остатков ресурса к концу второго месяца состоит из элементов 0, 50, 100, 150 и 200, а множество u_3 допустимых управлений (объемов партий поставок в третьем месяце) — из элементов 200, 150, 100, 50 и 0.

Предположим, что на начало третьего месяца объем запаса равен нулю. Учитывая потребность в ресурсе в этом месяце (100 ед.), мы можем заказать (выбрать управление) либо 100, либо 150, либо 200 ед. ресурса. Найдем значения целевой функции (8.17) для этих вариантов:

$$\begin{aligned}
z_3(0, 100) &= K_3(100) + \varphi_3(100/2 + 0) = 40 + 8 = 48,\\
z_3(0, 150) &= K_3(150) + \varphi_3(100/2 + 50) = 32 + 30 = 62,\\
z_3(0, 200) &= K_3(200) + \varphi_3(100/2 + 100) = 24 + 41 = 65.
\end{aligned}$$

Учитывая результаты оптимизации четвертого месяца (см. табл. 8.30) и найденные значения целевой функции z_3, на основе равенства (8.20) имеем

$$F_3(0, u_3) = \min_{100,150,200} (48 + F_4(0); 62 + F_4(50); 65 + F_4(100)) =$$
$$= \min_{100,150,200} (48 + 48; 62 + 56; 65 + 8) = 73.$$

Из этого равенства видно, что если объем запаса на начало третьего месяца равен нулю, то условно-оптимальным управлением на третьем месяце будет выбор партии поставки объемом в 200 ед., ибо в этом случае суммарные затраты в двухмесячном периоде минимизируются и составляют 73 ден. ед. Это и есть условно-оптимальные затраты F_3 за этот период.

Аналогичным образом анализируются и все остальные допустимые варианты. Результаты вычислений записаны в табл. 8.31. В этой и последующих таблицах сохранены лишь те строки, которые соответствуют условно-оптимальным управлениям.

Таблица 8.31

x_2	u_3	x_3	$\overline{m}_3$	K_3	φ_3	z_3	F_4	F_3
$\underline{0}$	$\underline{200}$	$\underline{100}$	150	24	41	65	8	$\underline{73}$
50	150	100	150	32	41	73	8	81
100	0	0	50	0	8	8	48	56
150	0	50	100	0	30	30	56	86
200	0	100	150	0	41	41	8	49

Таблица 8.32

x_1	u_2	x_2	K_2	$\overline{m}_2$	φ_2	z_2	F_3	F_2
0	250	200	21	225	51	72	49	121
$\underline{50}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	25	3	3	73	$\underline{76}$
100	0	50	0	75	15	15	81	96
150	0	100	0	125	36	36	56	92
200	0	150	0	175	46	46	86	132
250	0	200	0	225	51	51	49	100

В табл. 8.32 приведены результаты условной оптимизации второго месяца планового периода с учетом результатов условной оптимизации третьего и четвертого месяцев (см. табл. 8.31). На начало второго месяца объем запаса ресурса может быть равным 0, 50, 100, 150, 200 или 250 ед. (это элементы множества x_1).

В табл. 8.33 помещены результаты условной оптимизации первого месяца с учетом ранее оптимизированного периода из трех последующих месяцев (см. табл. 8.32). На начало первого месяца объем запаса ресурса R по условию задачи равен 100 ед. Так что множество x_0 состоит из единственного элемента 100. Элементами же множества u_1 управлений на первом месяце могут быть числа 50, 100, ..., 300. Именно такими могут быть объемы партий поставки ресурса, если иметь в виду, что общая потребность в ресурсе на предстоящие четыре месяца составляет 400 ед. и другие условия задачи.

Таблица 8.33

x_0	u_1	x_1	K_1	$\overline{m}_1$	φ_1	z_1	F_2	F_1
100	100	50	40	125	36	76	76	152

После завершения условной оптимизации можно найти безусловно-оптимальное управление поставками ресурса, гарантирующее минимальные суммарные затраты на пополнение и хранение запасенного ресурса. Для этого надо пройти еще раз весь условно-оптимизированный плановый период, но уже в «прямом» направлении, и выписать из табл. 8.33, 8.32, 8.31 и 8.30 соответствующие шаговые условно-оптимальные управления, которые и составят искомое оптимальное управление поставками в плановом периоде. Итак, из табл. 8.33 видим, что минимальные суммарные затраты на управление поставками в четырехмесячном периоде составляют 152 ден. ед. (см. столбец F_1) при условии, что в первом месяце будет заказана партия ресурса в объеме 100 ед. (см. столбец u_1). Вместе с имевшимся начальным запасом в 100 ед. в первом месяце на складах предприятия сосредоточится 200 ед. ресурса R. Из них 150 ед. пойдет на удовлетворение потребностей производства в этом месяце. К концу месяца останется 50 ед. (см. столбец x_1).

Переходя к табл. 8.32, замечаем по строке, соответствующей элементу 50 столбца x_1, что во втором месяце пополнять запас не следует (см. столбец u_2), поскольку имеющихся 50 ед. как раз достаточно для удовлетворения спроса в этом месяце. Запас к концу месяца будет исчерпан (см. столбец x_2). По строке табл. 8.31, соответствующей элементу 0 столбца x_2, делаем вывод, что в третьем месяце следует запасти 200 ед. ресурса (см. столбец u_3). Из них 100 ед. будет израсходовано в этом месяце, а 100 ед. останется (см. столбец x_3). И, наконец, по строке, соответствующей элементу 100 из столбца x_2 табл. 8.30, видим, что в четвертом месяце запасать ресурс не следует (см. столбец u_4), так как только в этом случае при удовлетворении потребностей производства в данном месяце к концу его весь ресурс будет израсходован в полном соответствии с условием задачи (см. столбец x_4).

Кратко ответ можно записать в виде вектора $u^* = (100; 0; 200; 0)$. При этом векторе управления затраты минимизируются и составляют 152 ден. ед.

8.14. Исключив из условия примера 8.4 указание о том, что на начало первого месяца на складах предприятия имеется запас ресурса в объеме 100 ед., найти оптимальные управления поставками для всех допустимых объемов запаса ресурса на начало первого месяца планового периода. При каком значении начального запаса суммарные затраты на пополнение и хранение ресурса в плановом периоде будут минимальными?

8.15. В плановом периоде из N месяцев требуется минимизировать издержки при перепроизводстве и недопроизводстве (дефиците) продукции относительно спроса на нее, а также издержки, связанные с изменением скорости производства, при некоторых известных колебаниях спроса с течением времени. Введем обозначения: v_i — скорость спроса на продукцию в i-м месяце $(i = \overline{1, N})$; x_{i-1} — скорость производства в $(i - 1)$-м месяце; g_i — издержки, связанные с отклонением скорости производства от скорости спроса; u_i — скорость производства в i-м месяце; G_i — издержки, связанные с изменением скорости производства в начале i-го месяца; c — максимальные возможности предприятия по скорости производства продукции. Полагаем, что функции v_i и u_i линейные, а потому они определяются количеством продукции в конце месяца. Функции g_i и G_i имеют вид:

$$g_i = (u_i - v_i)^2, \ G_i = 0{,}5(u_i - x_{i-1})^2.$$

Минимальные издержки производства, начальную скорость производства и скорости производства по месяцам планового периода следует определить при таких исходных данных: а) $N = 4$, $v_i = 10; 5; 3; 3$, $c = 5$; б) $N = 4$, $v_i = 5; 10; 2; 5$, $c = 3$; в) $N = 4$, $v_i = 4; 5; 3; 3$, $c = 4$.

Указание. Для уменьшения объема вычислений положить, что скорость производства может изменяться с дискретностью единица.

8.16. Предприниматель заключил контракт на поставку продукции в течение пяти месяцев в следующих объемах (по месяцам): 90, 125, 140, 100 и 45 ед. Поставки осуществляются в конце каждого месяца как за счет вновь произведенной продукции, так и за счет продукции, хранящейся в запасах, в том числе созданных до заключения контракта. Стоимость хранения единицы продукции равна 20 ден. ед. в месяц. Предполагается, что затраты на хранение определяются средним уровнем запаса и к концу пятого месяца запасы должны быть исчерпаны. Складские помещения предприятия не позволяют хранить более 200 ед. продукции. Стоимость наладки оборудования на один производственный цикл равна 3000 ден. ед. Наладка осуществляется только в начале каждого месяца (если в этом месяце продукция производится). Требуется определить, какое количество продукции следует производить в каждом месяце, чтобы суммарные затраты на наладку оборудования и хранение готовой продукции были минимальными.

Указание. Целесообразно ввести следующие обозначения: u_i — количество продукции, произведенной в i-м месяце ($i = \overline{1, 5}$); x_{i-1} — объем запаса продукции на конец ($i - 1$)-го месяца; v_i — спрос на продукцию в i-м месяце; K — затраты на переналадку оборудования.

8.17. Предприниматель планирует найм сезонных рабочих на пять недель для уборки урожая. Потребность в рабочей силе по неделям планового периода распределяется следующим образом: 5, 7, 8, 4 и 6 чел. Количество рабочих в начале каждой недели регулируется путем найма и увольнения. При найме рабочих предприниматель терпит убытки в виде накладных расходов по найму. Сохранение в течение какой-либо недели контингента рабочих, превышающего минимальную потребность, приводит к убыткам, вызванным простоями рабочих. При этом убыток от одного рабочего на i-й неделе ($i = \overline{1, 5}$) составляет $c_i = 3$ ден. ед. Накладные расходы, связанные с наймом K рабочих, определяются зависимостью $c_2 = 4 + 2K$ (ден. ед.). Параметры c_1 и c_2 остаются постоянными для любой недели планового периода. Перед началом планового периода предприниматель может иметь любое разумное количество рабочих.

В конце пятой недели все рабочие должны быть уволены. Предполагается, что при увольнении рабочего предприниматель не несет никаких накладных расходов. Составить оптимальный план найма и увольнения сезонных рабочих, при котором убытки предпринимателя минимизируются.

8.18. В условиях задачи 8.17 найти оптимальный план найма и увольнения сезонных рабочих, если потребность в рабочей силе по неделям планового периода характеризуется следующими данными: а) 6, 5, 3, 6 и 8; перед началом планового периода было нанято 5 рабочих; б) 8, 4, 7, 8 и 2; перед началом планового периода было нанято 6 рабочих.

8.19. Предприятие осуществляет поставку деталей (в тысячах штук) потребителям в течение пяти месяцев. Спрос на детали в i-м месяце равен v_i $(i = \overline{1, 5})$. Спрос может удовлетворяться как за счет деталей, произведенных в i-м месяце в объеме u_i, так и за счет запаса x_{i-1}, созданного к началу i-го месяца. Не отправленные в течение i-го месяца детали, как из запаса, так и вновь произведенные, образуют запас на конец i-го месяца. Складские помещения предприятия не позволяют хранить более 3 тыс. деталей. Затраты на производство деталей определяются функцией $\varphi_i(u_i)$, а затраты на содержание запаса—функцией $\psi_i(x_i) = x_i$. Найти оптимальный объем начального запаса и объемы производства по месяцам так, чтобы гарантировать предприятию минимальные затраты, а потребителям полное удовлетворение их спроса. Задачу решить при следующих данных: а) $\varphi_i(u_i) = u_i^2$, $v_i = 1, 2, 3, 2, 1$; б) $\varphi_i(u_i) = 2u_i$, $v_i = 1, 3, 2, 1, 1$.

8.20. Предприятие производит станки, спрос на которые по месяцам квартала выражается числами 3, 4 и 3. На начало квартала на складе предприятия имеется один станок, а хранить на складе можно не более четырех станков. Поскольку в следующем квартале предприятие переходит на выпуск станков другой серии, к концу квартала все станки должны быть реализованы. Суммарные затраты $c_i(x_i, v_i)$ предприятия в i-м месяце складываются из затрат $c(x_i)$ на производство x_i станков в этом месяце и затрат $2v_i$ на хранение v_i станков, находящихся на складе и ожидающих отправки потребителю, т. е. $c_i(x_i, v_i) = c(x_i) + 2v_i$. Затраты на производство $c(x_i)$ в свою очередь состоят из условно-постоянных затрат, равных 8 ден. ед., и пропорциональных затрат в размере 2 ден. ед. на каждый станок, так что $c(x_i) = 8 + 2x_i$. Производственные мощности предприятия не позволяют производить более 6 станков в месяц. Найти оптимальный план выпуска станков по месяцам квартала, при котором полностью удовлетворяется спрос потребителей, а суммарные затраты предприятия на производство станков и их хранение минимизируются.

9

РАВНОВЕСИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА

9.1. Модель экономического равновесия

В управлении экономикой требуется учитывать как внутренние связи управляемого объекта (системы), так и его взаимодействие с внешней экономической средой. Внутренние связи элементов системы выражаются в обмене (затратах на производственные нужды) продукцией (услугами) между ними. В таком случае часть продукции, производимой в системе, затрачивается на обслуживание данных связей. В менеджменте необходимо учитывать и эту часть продукции.

Один из подходов учета внутрисистемных связей представлен в виде модели экономического равновесия В. В. Леонтьева. Рассмотрим основные понятия и определения этой модели.

Предполагается, что моделируемая экономическая система содержит некоторое число $n > 1$ взаимодействующих элементов, называемых *отраслями*. Каждая отрасль, входящая в систему, производит продукцию одного вида и может обмениваться ей с любыми другими отраслями. Это означает, что, с одной стороны, продукцию данной i-й отрасли $(i = \overline{1, n})$ может потреблять любая из n отраслей системы, с другой — что данная отрасль может потреблять на производственные нужды продукцию любых отраслей системы, включая свою собственную.

Для отображения в модели внутрисистемных затрат продукции вводится понятие *коэффициента прямых затрат продукции*, который отражает удельные затраты продукции (в расчете на единичный выпуск). Коэффициент прямых затрат a_{ij} выражает взаимодействие двух отраслей системы — i-й (*производящей*) и j-й (*потребляющей*). Он численно равен интенсивности обмена продукцией. Сказанное можно представить в виде следующей схемы:

$$\begin{array}{c} a_{ij} \\ \Downarrow \\ i \to j. \end{array}$$

Числовое значение коэффициента прямых затрат определяет уровень потребления продукции i-й отрасли внутри системы (на производственные нужды) в расчете на единичный выпуск продукции j-й отрасли и имеет смысл нормы затрат i-й продукции для выпуска единицы j-й продукции в валовом (внутри системы, предприятия) выражении. В этом случае i-я отрасль является производящей, а j-я — потребляющей. Любая отрасль может быть как производящей, так и потребляющей.

Нулевое значение коэффициента прямых затрат указывает на отсутствие прямых связей между конкретными отраслями. Предполагается, что среди коэффициентов прямых затрат имеются ненулевые, в противном случае никакие отрасли не связаны между собой, что лишает смысла рассмотрение их как системы.

Выпуск продукции разделяют на *валовой* (внутренний) и *конечный* (внешний). Они различаются на величину производственных затрат. Обозначим через $\mathbf{x}$ n-мерный вектор валового выпуска, а через $\mathbf{y}$ — вектор конечного выпуска такой же размерности. Тогда *вектор производственных затрат* $\mathbf{d}$ можно представить как разность между векторами валового и конечного выпусков:

$$\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

Квадратная матрица $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$, элементами которой являются коэффициенты прямых затрат, называется *матрицей прямых затрат*. Она описывает внутрисистемные затраты продукции. Предполагается линейная зависимость затрат от уровня валового выпуска. Это означает, что при заданном уровне валового выпуска j-й (потребляющей) отрасли величина затрат продукции i-й (производящей) отрасли определяется соотношением

$$d_{ij} = a_{ij} x_j \quad (i, j = \overline{1, n}), \tag{9.1}$$

где d_{ij} — затраты продукции i-й отрасли в j-й, соответствующие выпуску x_j; x_j — валовой выпуск продукции j-й отрасли.

Соотношение (9.1), выражающее в модели В. В. Леонтьева пропорциональность затрат объему валового выпуска, называют *гипотезой линейности*.

Коэффициенты прямых затрат отражают интенсивность внутрисистемных потоков продукции. Строки матрицы A соответствуют производящим отраслям, а ее столбцы — потребляющим.

Затраты продукции i-й отрасли в системе определяются как суммарные затраты во всех отраслях:

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, n})$$

при заданном валовом выпуске $\mathbf{x}$. Тогда конечный выпуск отраслей определяется соотношением

$$y_i = x_i - d_i = x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, n}).$$

Более удобной является матричная форма данного выражения, связывающего векторы конечного и валового выпусков системы:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - A\mathbf{x} = E\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (E - A)\mathbf{x}, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ — вектор конечного выпуска; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ — вектор валового выпуска; A — матрица прямых затрат; E — единичная матрица порядка n.

Выражение (9.2) называется *основным балансовым соотношением*. На практике более употребительной является форма этого соотношения, представленная в виде, разрешенном относительно вектора валового выпуска. Для ее получения применим метод обратной матрицы, т. е. умножим уравнение (9.2) слева на матрицу

$$B = (E - A)^{-1}, \tag{9.3}$$

в результате чего получим искомое соотношение:

$$\mathbf{x} = B\mathbf{y}. \tag{9.4}$$

Соотношение (9.4) позволяет вычислять сбалансированный валовой выпуск для получения заданного конечного выпуска системы.

Матрица B, определяемая выражением (9.3), называется *матрицей полных затрат продукции.*

Пример 9.1. Задана матрица прямых затрат

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определить необходимый сбалансированный валовой выпуск для обеспечения требуемого конечного выпуска

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В матрице A заданы коэффициенты интенсивности внутрисистемных потоков продукции по направлениям, представленным в табл. 9.1.

Т а б л и ц а 9.1

Направление затрат	Интенсивность потока продукции
1-я отрасль → 2-я отрасль	0,1
1-я отрасль → 3-я отрасль	0,5
3-я отрасль → 2-я отрасль	0,4

Прменяя соотношение (9.3), последовательно находим:

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений выполняем умножение взаимно обратных матриц:

$$B(E - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

В результате получена единичная матрица, что подтверждает правильность вычисления матрицы B.

Воспользуемся формулой (9.4) для вычисления вектора валового выпуска, сбалансированного с заданным конечным выпуском:

$$\mathbf{x} = B\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Если требуется единичный конечный выпуск j-й отрасли, то сбалансированный валовой выпуск совпадает с j-м столбцом матрицы B, что следует непосредственно из соотношения (9.4). Сказанное справедливо для всех $j = \overline{1, n}$ и определяет экономический смысл столбцов матрицы полных затрат как норм внутрисистемных затрат продукции отраслей на конечный выпуск продукции.

Допустим, требуется определить единичный конечный выпуск продукции 2-й отрасли, тогда сбалансированный валовой выпуск

$$\mathbf{x} = B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

совпадает со вторым столбцом матрицы B.

Равенство валового и конечного выпусков продукции 2-й отрасли в последнем случае объясняется тем, что на производственные нужды продукция этой отрасли не затрачивается ни в одной из отраслей, поскольку вторая строка матрицы прямых затрат состоит только из нулей.

Продукция 3-й отрасли выпускается в объеме 0,4 и используется во 2-й отрасли, что совпадает с соответствующим элементом матрицы прямых затрат.

Валовой выпуск продукции 1-й отрасли равен 0,3 и превышает соответствующие прямые затраты на величину косвенных затрат, равных 0,2. Косвенные затраты вызываются необходимостью обеспечения валового выпуска продукции 3-й отрасли на уровне 0,4 и определяются произведением $a_{13}x_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$. Именно в таком объеме продукция 3-й отрасли затрачивается косвенно через 1-ю отрасль на выпуск единицы продукции 2-й отрасли.

Из рассмотренного примера можно сделать вывод, что в общем случае полные относительные затраты продукции, представленные элементами матрицы B, состоят из двух частей — прямых и косвенных затрат. *Прямые затраты продукции* соответствуют технологическим нормам в данной отрасли и осуществляются напрямую, в то время как *косвенные затраты* формируются в результате использования продукции других отраслей-посредников, в которых имеют место прямые затраты, что приводит к косвенному переносу этих затрат в продукцию конечной потребляющей отрасли. В этом случае можно сказать, что продукция отраслей-посредников обеспечивает доставку в конечный продукт продукции отраслей, осуществивших первичные затраты продукции некоторой производящей отрасли. Уточним, что отраслью-посредником может выступать также и сама потребляющая отрасль.

9.2. Вычисление матрицы полных затрат

В примере 9.1 матрица полных затрат B представлена в готовом виде как обратная по отношению к матрице $E - A$, без рассмотрения метода ее получения. Один из методов обращения матрицы основан на промежуточном вычислении *присоединенной матрицы*, составленной из алгебраических дополнений, с последующим делением ее элементов на определитель исходной матрицы. Данный метод изучается в курсе высшей математики. Читателю рекомендуется применять его при рассмотрении последующих примеров, сравнивая получаемые результаты с результатами использования описываемого ниже приближенного (экономического) метода.

Обратная матрица не существует, если ее определитель равен нулю. В этом случае матрица называется *вырожденной*. Вычислительная процедура обращения матрицы является одной из наиболее трудоемких в линейной алгебре.

Матрица полных затрат может быть вычислена приближенно на основе использования экономического смысла ее элементов. Приближенный метод вычисления матрицы B по своей природе является итерационным и основан на последовательном уточнении элементов искомой матрицы. В некоторых случаях этот метод обеспечивает точное вычисление матрицы B (см. пример 9.2).

Пусть имеется матрица прямых затрат A и известен требуемый конечный выпуск $\mathbf{y}$. Предположим, что в первом приближении искомый валовой выпуск $\mathbf{x}$ мало отличается от конечного выпуска (хотя это и не всегда верно, что не помешает корректности дальнейших рассуждений) $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{y}$. Используя указанное приближенное значение вектора валового выпуска, находим (в первом же приближении) значение вектора производственных затрат продукции как произведение матрицы прямых затрат на вектор конечного выпуска (см. формулу (9.2)):

$$\mathbf{d}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{y}.$$

Здесь индекс в круглых скобках указывает номер приближения.

Первое приближение производственных затрат продукции используем для уточнения вектора валового выпуска:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = E\mathbf{y} + A\mathbf{y} = (E + A)\mathbf{y}.$$

Уточненное значение валового выпуска применим для очередного уточнения вектора производственных затрат:

$$\mathbf{d}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(2)} = A(E + A)\mathbf{y} = (A + A^2)\mathbf{y}.$$

Последовательное уточнение вектора валового выпуска производится многократно.

Второе приближение вектора валового выпуска определяется соотношением

$$\mathbf{x}^{(2)} = (E + A + A^2)\mathbf{y}.$$

Вычисление приближения номера k вектора валового выпуска выполняется по формуле

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(E + \sum_{t=1}^{k} A^t\right)\mathbf{y}.$$

Если исходная матрица прямых затрат A продуктивна, то существует предел последовательности приближенных значений векторов валового выпуска $\mathbf{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, что соответствует следующему соотношению:

$$\mathbf{x} = \left(E + \sum_{t=1}^{\infty} A^t\right)\mathbf{y}. \qquad (9.5)$$

Сравнив выражения (9.4) и (9.5), запишем окончательную формулу для вычисления матрицы полных затрат:

$$B = E + \sum_{t=1}^{\infty} A^t. \qquad (9.6)$$

На практике приходится ограничиваться суммированием конечного числа степеней матрицы A, что в общем случае позволяет получать лишь приближенные значения элементов матрицы полных затрат. Но может встретиться случай, когда матрица A в некоторой степени является нулевой, а значит, и все последующие ее степени — тоже нулевые. Тогда можно получить точное значение матрицы полных затрат, ограничившись конечным числом слагаемых в правой части соотношения (9.6).

Пример 9.2. Вычислить матрицу полных затрат продукции для матрицы прямых затрат из примера 9.1.

Р е ш е н и е. Последовательным умножением вычисляем степени матрицы прямых затрат:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = O.$$

Тогда

$$B = E + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix},$$

что совпадает с матрицей B, полученной при рассмотрении примера 9.1.

Как видно из представленных вычислений, точное значение матрицы полных затрат получается при суммировании всего лишь двух слагаемых, поскольку все степени матрицы A, начиная с третьей, равны нулю.

Точное вычисление матрицы полных затрат приближенным методом может быть невозможным из-за того, что последовательность степеней матрицы прямых затрат не содержит нулевой матрицы и при использовании формулы (9.6) придется ограничиться приближенным результатом. Заметим, что рассматриваемый приближенный метод обеспечивает получение результата с любой наперед заданной точностью.

Пример 9.3. Пусть задана матрица прямых затрат

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить матрицу полных затрат B приближенным методом.

Р е ш е н и е. Находим последовательные степени матрицы A:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \; A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}075 & 0{,}025 \\ 0{,}15 & 0{,}05 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0{,}0375 & 0{,}0125 \\ 0{,}0750 & 0{,}0250 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матрицы полных затрат по формуле (9.6) при суммировании первых четырех слагаемых дает приближенное ее значение:

$$B \approx B^{(4)} = E + \sum_{t=1}^{4} A^t = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}1875 \\ 1{,}125 & 1{,}375 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения приведем точное значение матрицы полных затрат:

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 0{,}2 \\ 1{,}2 & 1{,}4 \end{bmatrix}.$$

При нахождении точного значения матрицы B по формуле (9.6) потребовалось бы, строго говоря, суммирование бесконечного числа степеней матрицы A. Однако суммирование степеней матрицы A всего лишь до десятой дает практически точное значение матрицы B:

$$B^{(10)} = \begin{bmatrix} 1{,}5994 & 0{,}1998 \\ 1{,}1988 & 1{,}3996 \end{bmatrix}.$$

9.1. Для приведенных ниже матриц прямых затрат найти соответствующие им матрицы полных затрат приближенным методом с точностью до 0,0001:

а) $\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}22 \\ 1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}03 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$.

9.2. Применив приближенный метод, вычислить матрицы полных затрат, если заданы матрицы прямых затрат:

а) $\begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$.

9.3. Затраты ресурсов

Кроме внутрисистемного обеспечения технологического процесса, заключающегося в потреблении части продукции на производственные нужды, как правило, имеет место потребление производственных ресурсов, не производящихся в системе.

Определим *ресурсы* как необходимые по технологии данного производства продукты, которые непосредственно в системе не производятся.

Можно выделить следующие типы ресурсов:

1) сырье и материалы;

2) комплектующие изделия;

3) оборудование;

4) трудовые ресурсы.

Степень использования ресурсов отражает уровень зависимости моделируемого объекта от внешней экономической среды. К особому типу относятся трудовые ресурсы, использование которых имеет место в любой экономической системе.

Каждый из перечисленных четырех типов ресурсов может иметь множество разновидностей. Так, перечень сырья, материалов и комплектующих изделий автомобильного завода содержит примерно 10 тыс. наименований.

Трудовые ресурсы различаются по множеству признаков, важнейшими из которых с производственной точки зрения являются профессия и квалификация (разряд) рабочего. Достаточно сказать, что каталог профессий содержит около 5 тыс. наименований. Хотя на конкретном предприятии список рабочих профессий значительно меньше, однако только по названным двум признакам список разновидностей трудовых ресурсов может насчитывать по крайней мере многие сотни позиций.

Что касается использования ресурсов остальных типов, то количество их разновидностей определяет степень самообеспеченности экономической системы. Так, государство, в достаточной степени обеспеченное природными ресурсами, способно производить практически любые виды продукции производственного назначения. Заметим попутно, что это имеет важное стратегическое значение. Напротив, функционирование небольшого предприятия основано на интенсивном взаимодействии с внешней экономической средой, представленной поставщиками и потребителями. Именно от поставщиков поступают на предприятие сырье, материалы, комплектующие изделия и оборудование. Все ресурсы, включая трудовые, вступают на предприятии во взаимодействие, результатом которого является производство продукции.

Обозначим через m общее число разновидностей используемых ресурсов, а через r_{ij} $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ — норму прямого использования i-го ресурса при производстве единицы продукции j-й отрасли. Матрица размерности $m \times n$, составленная из элементов r_{ij}, называется *матрицей прямых затрат ресурсов.* Она обозначается $R = \left[r_{ij}\right]_{m \times n}$.

Вычислим потребность в ресурсах, которую обозначим через m-мерный вектор $\mathbf{w}$, исходя из предположения пропорциональности уровня их расхода в зависимости от уровня валового выпуска. Тогда справедливо соотношение

$$\mathbf{w} = R\mathbf{x}. \tag{9.7}$$

Заменив в последнем соотношении $\mathbf{x}$ его выражением через $\mathbf{y}$ (см. формулу (9.4)), получим

$$\mathbf{w} = RB\mathbf{y} = S\mathbf{y}, \tag{9.8}$$

где $S = RB$ — *матрица полных затрат ресурсов.*

Сравнивая соотношения (9.7) и (9.8), приходим к выводу, что элементы матрицы S имеют смысл норм затрат ресурсов на конечный выпуск продукции. В практике управления предприятием часто исходят из необходимого уровня именно конечного выпуска продукции, предназначенной для отгрузки потребителям. Необходимый конечный выпуск определяется на основе как маркетинговых исследований, так и договоров на поставку продукции. Если емкость рынка достаточна, то проводится оптимизация конечного выпуска по различным критериям.

Пример 9.4. Вычислить матрицу полных затрат ресурсов, если заданы матрица прямых затрат продукции (см. примеры 9.1 и 9.2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}$$

и матрица прямых затрат ресурсов

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Учитывая, что

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix},$$

находим матрицу полных затрат ресурсов:

$$S = RB = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 4 & 4{,}8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Если известен вектор цен ресурсов

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{bmatrix},$$

то *себестоимость конечного продукта* j-й отрасли может быть выражена как суммарная стоимость полных затрат ресурсов на единицу продукции:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i s_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{9.9}$$

Вычисление себестоимости продукции j-й отрасли по формуле (9.9) соответствует скалярному умножению j-го столбца матрицы S на вектор цен. Тогда определение вектора себестоимости $\mathbf{z}$ можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{z} = S'\mathbf{c}. \tag{9.10}$$

9.3. Найти матрицу полных затрат ресурсов, если заданы матрица прямых затрат продукции A (см. примеры 9.1 и 9.2) и матрица прямых затрат ресурсов R:

а) $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}22 \\ 1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}03 & 0 \end{bmatrix}$, $R = [8 \quad 2]$;

г) $A = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix}$, $R = [3 \quad 1]$;

д) $A = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$, $R = [5 \quad 1]$;

е) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

ж) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 7{,}2 & 3{,}1 & 2{,}5 \\ 4{,}3 & 9{,}2 & 0 \\ 1{,}4 & 2{,}3 & 6{,}1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

з) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

и) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

9.4. Оптимизация конечного выпуска продукции

В условиях достаточного спроса на продукцию целесообразно проводить оптимизацию конечного выпуска с учетом производственных возможностей предприятия, цен на ресурсы и оптовых цен на продукцию.

Если известен вектор оптовых цен на продукцию

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{bmatrix},$$

можно определить критерий прибыли как разность между оптовыми ценами и себестоимостью:

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{z}.$$

Производственные возможности системы определяются вектором наличия ресурсов

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix},$$

что позволяет записать ограничения на конечный выпуск в виде неравенства $S\mathbf{y} \le \mathbf{b}$. Тогда задача оптимизации конечного выпуска может быть представлена следующим образом:

$$\max\begin{Bmatrix} L_1 & = & (\mathbf{k}, \mathbf{y}) \\ L_2 & = & (\mathbf{p}, \mathbf{y}) \\ L_3 & = & (\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix}, \; S\mathbf{y} \le \mathbf{b}, \; \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \qquad (9.11)$$

Ниже рассматривается числовой пример независимой оптимизации по указанным критериям.

Пример 9.5. Предприятие заключает договоры на поставку продукции трех видов. Найти наилучший (оптимальный) объем поставок продукции, если условия работы предприятия определены: матрицей прямых затрат продукции (см. примеры 9.1, 9.2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix},$$

матрицей прямых затрат ресурсов (см. пример 9.4)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

ценой ресурсов

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix},$$

оптовыми ценами на продукцию

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 260 \\ 560 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

Оптимизацию проводить по критериям: L_1 —прибыли, L_2 —товарного выпуска, L_3 — себестоимости.

Р е ш е н и е. Для формирования соответствующей ЗЛП требуется предварительное вычисление:

1) матрицы полных затрат продукции (см. соотношение (9.4))

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix};$$

2) матрицы полных затрат ресурсов (см. выражение (9.8))

$$S = RB = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 4 & 4{,}8 & 11 \end{bmatrix};$$

3) себестоимости конечной (реализуемой) продукции (см. соотношение (9.10))

$$\mathbf{z} = S'\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 4{,}8 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 510 \\ 700 \end{bmatrix}.$$

Запишем ограничения ЗЛП по использованию ресурсов:

$$\mathbf{w} \le \mathbf{b} \Leftrightarrow S\mathbf{y} \le \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 4 & 4{,}8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 500 \\ 440 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y_2 + 5y_3 \le 500, \\ 4y_1 + 4{,}8y_2 + 11y_3 \le 440. \end{cases}$$

Совместно с условиями неотрицательности получаем ЗЛП:

$$\max \begin{Bmatrix} L_1 = 60y_1 + 50y_2 + 20y_3 \\ L_2 = 260y_1 + 560y_2 + 720y_3 \\ L_3 = 200y_1 + 510y_2 + 700y_3 \end{Bmatrix},$$

$$9y_2 + 5y_3 \le 500,$$
$$4y_1 + 4{,}8y_2 + 11y_3 \le 440,$$
$$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}.$$

Результаты независимой оптимизации по трем указанным критериям представлены в табл. 9.2 (через u обозначены двойственные оценки ресурсов).

Таблица 9.2

Критерии оптимизации		
Прибыль	Товарный выпуск	Себестоимость
$L_1^* = 6600$	$L_2^* = 42\ 377{,}78$	$L_3^* = 37\ 000$
$y_1^* = 500$	$y_1^* = 43{,}33$	$y_1^* = 0$
$y_2^* = 0$	$y_2^* = 55{,}56$	$y_2^* = 44$
$y_3^* = 0$	$y_3^* = 0$	$y_3^* = 20{,}08$
$u_1 = 0$	$u_1 = 27{,}56$	$u_1 = 30$
$u_2 = 15$	$u_2 = 65$	$u_2 = 50$

В зависимости от конкретных условий функционирования системы ограничения задачи (9.11) могут быть дополнены рядом других соотношений, например ограничениями снизу на уровень выпуска некоторых видов продукции и др.

9.4. Пусть известны вектор наличия ресурсов **b**, вектор цен ресурсов **c**, вектор оптовых цен на продукцию **p**; найти оптимальное значение прибыли L^* и соответствующие оптимальный конечный выпуск **y** и двойственные оценки ресурсов **u**:

а) $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}22 \\ 1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 200 \\ 430 \\ 175 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 750 \\ 300 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 87 \\ 150 \\ 375 \\ 150 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4790 \\ 3472 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}03 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = [270]$, $\mathbf{c} = [25]$,

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 257{,}6836 \\ 203{,}8418 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = [51{,}3]$, $\mathbf{c} = [0{,}87]$,

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}$;

д) $A = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = [250]$, $\mathbf{c} = [8]$,

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 50{,}97521 \\ 10{,}429751 \end{bmatrix}$;

е) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 329 \\ 535 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 200 \\ 307 \\ 280 \end{bmatrix}$;

ж) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 7{,}2 & 3{,}1 & 2{,}5 \\ 4{,}3 & 9{,}2 & 0 \\ 1{,}4 & 2{,}3 & 6{,}1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 720 \\ 800 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7{,}2 \\ 3{,}5 \\ 4{,}9 \\ 6{,}3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 103{,}75 \\ 184{,}79 \\ 285{,}34 \end{bmatrix}$;

з) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 1000 \\ 900 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 40{,}35 \\ 22{,}77 \\ 31{,}49 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1067{,}5986 \\ 680{,}5983 \\ 820{,}5291 \end{bmatrix}$;

и) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \\ 50 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 207 \\ 148 \\ 157 \\ 250 \\ 273 \\ 200 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 14387{,}7 \\ 14073 \\ 18587 \end{bmatrix}$.

10

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ И В СИСТЕМЕ РЕАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО МЕНЕДЖМЕНТА

10.1. Вычислительные аспекты реализации симплексного метода

В данном параграфе кратко излагаются особенности симплексного метода решения ЗЛП, влияющие на его эффективность.

В предыдущих главах уже рассматривалась основная вычислительная процедура симплексного метода (жорданово исключение), предназначенная для выполнения минимального преобразования в опорном решении системы линейных уравнений (см. также приложение). Это преобразование заключается в изменении статуса пары переменных — базисной и небазисной. При выполнении указанной процедуры выбранная небазисная переменная приобретает статус базисной, а одна из бывших базисных переменных, наоборот, становится небазисной. Иначе говоря, пара переменных обменивается статусом, в результате чего получается новый опорный план. После выполнения такой процедуры новый набор базисных переменных отличается от исходного только одной переменной. Указанное минимальное преобразование опорного плана достаточно эффективно при использовании процедуры жорданова исключения, если для исходного опорного плана известна так называемая *предпочтительная* (другие термины — предпочитаемая, базисная, симплексная) *форма ЗЛП*.

Переход к новому опорному плану приводит в общем случае к изменению значения критерия. В симплексном методе выбор пары переменных подчинен требованию улучшения значения критерия при переходе к новому опорному плану, для чего требуется знание предпочтительной формы. Это обеспечивает перебор опорных планов, направленный на последовательное улучшение значения критерия, в результате чего достигается оптимальный план, если он существует. При этом реализуется основная идея симплексного метода — направленный (на улучшение значения критерия) перебор опорных планов.

Пусть исходная ЗЛП представлена в канонической (стандартной) форме

$$\begin{Bmatrix} \max(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \qquad (10.1)$$

где $\mathbf{c} = [c_1\ c_2\ \ldots\ c_n]$ — вектор коэффициентов критерия; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ — вектор переменных, к которым здесь будем причислять также и дополнительные переменные, возможно появившиеся в результате приведения ограничений типа неравенств к каноническому типу — равенств; $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ — матрица системы ограничений (уравнений); $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$ — вектор правых частей системы ограничений.

Предпочтительная форма представления ЗЛП дает возможность ответить на ряд важных вопросов, что позволяет построить алгоритм направленного поиска оптимального опорного плана, который называется *симплексным методом решения ЗЛП*. Информация, заключенная в этих ответах, однозначно определяется выбором так называемых базисных переменных из числа основных переменных канонического представления задачи.

Предпочтительная форма ЗЛП может быть получена из ее канонической формы (10.1) путем простых, но довольно громоздких преобразований. Выбор базисных переменных однозначно определяет предпочтительную форму ЗЛП.

Пусть из основных переменных некоторым способом выбраны в качестве базисных m переменных (по числу независимых ограничений), образующих вектор $\mathbf{x}_б$. Остальные переменные образуют вектор небазисных переменных $\mathbf{x}_{нб}$. Тогда предпочтительную форму системы ограничений можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}_б = A_б^{-1}\mathbf{b} - A_б^{-1}A_{нб}^{-1}\mathbf{x}_{нб} = A_б^{-1}\mathbf{b} - T\mathbf{x}_{нб}, \qquad (10.2)$$

где $A_б^{-1}\mathbf{b}$ — вектор свободных членов выражения базисных переменных через небазисные; $A_б^{-1}$ — матрица, составленная из столбцов матрицы A, соответствующих базисным переменным; $A_{нб}$ —

матрица, составленная из столбцов матрицы A, соответствующих небазисным переменным; $T = A_б^{-1} A_{нб}$ — матрица коэффициентов выражений базисных переменных через небазисные.

Пример 10.1. Пусть имеется ЗЛП, представленная в канонической форме:

$$\max(2x_1 + 3x_2 + 9x_3);$$
$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 190,$$
$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60,$$
$$x \geq 0.$$

Требуется представить данную задачу в предпочтительной форме.

Решение. Используя принятые в выражении (10.2) обозначения, запишем в векторно-матричном виде элементы данной задачи:

вектор коэффициентов критерия

$$\mathbf{c} = [2\ 3\ 9];$$

матрица системы ограничений

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix};$$

вектор правых частей системы ограничений

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 190 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве базисных выбраны переменные x_1 и x_3, то $\mathbf{x}_б = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ — вектор базисных переменных, $\mathbf{x}_{нб} = [x_2]$ — вектор небазисных переменных, $A_б = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ — матрица, составленная из столбцов матрицы A, соответствующих базисным переменным, $A_{нб} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ — матрица, составленная из столбцов матрицы A, соответствующих небазисным переменным.

Произведя необходимые вычисления, находим: $A_б^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}7 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$; $T = A_б^{-1}A_{нб} = \begin{bmatrix} -2{,}7 \\ 3{,}8 \end{bmatrix}$ — матрица коэффициентов выражений базисных переменных через небазисные; $A_б^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$ — вектор свободных членов выражения базисных переменных через небазисные.

С учетом проведенных вычислений можно записать предпочтительную форму задачи относительно выбранных базисных переменных:

$$\begin{aligned} &x_1 = 15 - 2{,}7x_2, \\ &x_3 = 10 + 3{,}8x_2, \\ &\max f = 120 - 25{,}8x_2. \end{aligned}$$

Предпочтительная форма критерия получается путем подстановки выражений базисных переменных через небазисные в исходную форму критерия, благодаря чему из выражения для критерия исключаются базисные переменные. Коэффициенты перед небазисными переменными в предпочтительной форме записи критерия равны приращению критерия при единичном изменении небазисной переменной. Так, например, при увеличении небазисной переменной x_2 на единицу текущее значение критерия, равное 120, уменьшится на 25,8. Коэффициенты предпочтительной формы критерия называются *оценками небазисных переменных относительно текущего базиса*. Ниже будут рассмотрены два способа вычисления указанных оценок. Вследствие отрицательности оценки переменной x_2 приходим к заключению, что текущий базис является оптимальным, поскольку включение в базис этой единственной небазисной переменной приведет к уменьшению критерия, а следовательно, план при таком изменении базиса ухудшится.

Опорный план, соответствующий выбранному базису, получим из системы ограничений (уравнений) предпочтительной формы ЗЛП, придавая нулевое значение небазисной переменной x_2:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Полученная предпочтительная форма может быть записана в симплексную таблицу (табл. 10.1). Попытка включить в базис переменную x_2 (табл. 10.2) приводит, как известно, к ухудшению критерия.

Представленная в табл. 10.1 запись предпочтительной формы ЗЛП называется *сокращенной симплексной таблицей*.

Таблица 10.1

Базис		$-x_2$
x_1	15	−2,7
x_3	10	3,8
f	120	25,8

Таблица 10.2

Базис		$-x_3$
x_1	22,11	0,711
x_2	2,632	0,263
f	52,11	−6,789

Предпочтительную форму ЗЛП относительно базисных переменных x_1, x_2 можно получить путем применения соотношения (10.2) к исходной форме задачи, что связано с обращением матрицы

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

последующим вычислением матрицы

$$T = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,711 \\ 0,263 \end{bmatrix},$$

значений базисных переменных в опорном плане

$$x_б = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 190 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,11 \\ 2,63 \end{bmatrix}$$

и получением предпочтительной формы критерия $f = 52,11 + 6,789x_3$. Лишь только после таких не совсем тривиальных в общем случае вычислений может быть заполнена симплексная таблица (см. табл. 10.2). В случае большого числа базисных переменных наиболее трудоемким является вычисление обратной матрицы.

Читателю знаком другой способ включения в базис новой переменной. Он состоит в жордановом исключении (см. приложение) и связан с применением так называемого правила четырехугольника. В процессе вычисления используется табличная форма представления предпочтительной формы ЗЛП в виде сокращенной симплексной таблицы, примером которой могут служить табл. 10.1 и 10.2.

Рассмотрим более эффективную вычислительную процедуру элементарного симплексного преобразования, основанную на эквивалентной форме записи соотношения (10.2)

$$E\mathbf{x}_б = A_б^{-1}\mathbf{b} - T\mathbf{x}_{нб}. \qquad (10.3)$$

Представим выражение (10.3) в числовой форме с использованием базиса, соответствующего табл. 10.2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22{,}11 \\ 2{,}632 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}711 \\ 0{,}263 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix}.$$

Запишем полученную предпочтительную форму ЗЛП в симплексную таблицу (табл. 10.3), которую удобно использовать для ручных вычислений.

Таблица 10.3

Базис		x_1	x_2	x_3	θ
x_1	22,11	1	0	0,711	31
x_2	2,63	0	1	0,263	10
f	52,11	0	0	–6,789	

Заполнение данной таблицы по сравнению с заполнением табл. 10.1 и 10.2 имеет две особенности.

1. В заголовке таблицы представлен полный перечень переменных, включая и базисные. При этом все переменные даны без знака «–», хотя оценки небазисных переменных (в нашем случае в единственном числе) указаны в строке критерия с обратным знаком. Заметим, что заполнение столбцов, соответствующих базисным переменным, не требует каких-либо вычислений, как и при переходе к следующей таблице, в чем мы убедимся ниже.

2. В основной части таблицы в столбцах, соответствующих базисным переменным, находится единичная матрица. Поскольку нумерация переменных может быть произвольной, то допускается перестановка столбцов указанной единичной матрицы в последующих симплексных таблицах. В этом случае говорят, что при перестановке столбцов, соответствующих базисным переменным, может быть получена единичная матрица, хотя для реализации вычислительного алгоритма перехода к очередной симплексной таблице этого не требуется. Можно определить очень простое формальное правило расстановки единичных элементов в столбцах таблицы, соответствующих базисным переменным. Единица находится на пересечении строки и столбца, соответствующих одной и той же базисной переменой. Остальные элементы столбцов равны нулю.

Рассмотренная запись предпочтительной формы ЗЛП называется *симплексной таблицей с единичной матрицей*. Включение в таблицу единичной матрицы имеет ту отрицательную сторону, что таблица занимает больше места. Но преимущество такой таблицы неизмеримо выше. Объем вычислений, связанных с элементарным преобразованием симплексной таблицы (переходом к другому опорному плану), более чем в два раза меньше по сравнению с алгоритмом преобразования сокращенной симплексной таблицы.

Будем считать симплексную таблицу, представленную в виде табл. 10.3, начальной. Хотя мы заранее знаем, что включение в базис единственной небазисной переменной x_3 приведет к оптимальному опорному плану, на примере этого преобразования рассмотрим алгоритм пересчета таблицы при элементарном симплексном преобразовании, основанный на представлении предпочитаемой формы с включением в расчетную таблицу единичной матрицы. Алгоритм одного цикла улучшения опорного плана состоит из четырех шагов. Лишь четвертый шаг существенно отличается от применяемого ранее алгоритма пересчета элементов симплексной таблицы по правилу четырехугольника.

Шаг 1. Выбирается разрешающий столбец. При этом единственным требованием к выбору разрешающего столбца является положительность оценки соответствующей этому столбцу небазисной переменной, а следовательно, отрицательность числа, находящегося в строке критерия этого столбца (поскольку оценки небазисных переменных записаны в строке критерия с обратным знаком).

Содержательный смысл данного шага состоит в нахождении такой небазисной переменной, которую полезно включить в число базисных с точки зрения связанного с этим благоприятного изменения (увеличения) критерия. Ясно, что новая базисная переменная выбирается только среди *перспективных переменных*, т. е. переменных, имеющих положительную оценку. Если окажется, что получен опорный план, относительно которого ни одна из небазисных переменных не является перспективной (оценки всех небазисных переменных неположительны, а следовательно, все элементы строки критерия симплексной таблицы неотрицательны), то он является оптимальным.

В рассматриваемом примере единственной перспективной небазисной переменной является x_3, поэтому столбец табл. 10.3, связанный с указанной переменной, и выбирается в качестве разрешающего.

Шаг 2. Выбирается разрешающая строка. Для этого вычисляются симплексные отношения (записываемые в столбец θ) для каждой из текущих базисных переменных путем деления их значений на соответствующие элементы разрешающего столбца. Величина симплексного отношения указывает значение новой базисной переменной, при котором достигается нулевое значение соответствующей базисной переменной текущего базиса. Симплексное отношение существует только для тех строк, у которых в разрешающем столбце имеется строго положительный элемент. Если в разрешающем столбце отсутствуют ненулевые положительные элементы, то ЗЛП не имеет решения по причине неограниченности критерия. В нашем случае каждая из базисных переменных имеет симплексное отношение. Минимальное из этих отношений равно 10, что и определяет разрешающую строку. Ей соответствует переменная x_2, которая при предельно допустимом значении новой базисной переменной $x_3 = 10$ приобретает нулевое значение и становится небазисной.

Таким образом, после выполнения первых двух шагов рассматриваемого алгоритма становится известным требуемое преобразование базиса, в результате которого переменные x_2 и x_3 обмениваются статусом. Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечнии разрешающих строки и столбца, называется *разрешающим*.

Следующие два шага алгоритма связаны с получением новой (преобразованной) симплексной таблицы. Ее формирование начинается с указания перечня переменных нового базиса (табл. 10.4).

Таблица 10.4

Базис		x_1	x_2	x_3	θ
x_1	15	1	–2,7	0	
x_3	10	0	3,8	1	
f	120	0	25,8	0	

Шаг 3. Преобразовывается разрешающая строка. Для этого каждый ее элемент делится на разрешающий элемент и записывается в строку x_3 новой таблицы. Смысл данного преобразования заключается в решении разрешающего уравнения предпочтительной формы ЗЛП относительно новой базисной переменной.

Шаг 4. По единому алгоритму преобразовываются остальные строки, включая строку критерия. При этом удобно рассматривать каждую из преобразуемых строк как вектор.

Из преобразуемой строки вычитается преобразованная разрешающая строка, умноженная на элемент разрешающего столбца преобразуемой строки.

Результат преобразования всех оставшихся строк представлен в табл. 10.4. Легко видеть, что для вычисления каждого из оставшихся элементов новой таблицы требуется выполнить одно умножение и одно сложение (или вычитание).

Если поместить преобразованную разрешающую строку в старую симплексную таблицу (табл. 10.5), то для пересчета каждого из оставшихся элементов используются три числа, находящихся в вершинах прямоугольного треугольника. Одна из вершин соответствует преобразуемому элементу, вторая находится в том же столбце преобразованной разрешающей строки, третья — элемент

Таблица 10.5

Базис		x_1	x_2	x_3	θ
x_1	22,11	1	0	0,711	
x_3	10	0	3,8	1	
f	52,11	0	0	–6,789	

разрешающего столбца преобразуемой строки. Преобразуемый элемент всегда соответствует прямому углу треугольника.

Например, при пересчете значения критерия выполняются следующие арифметические операции: 52,11 – 10(–6,789) = 120. Полученный результат записывается на место старого значения 52,11.

Подобный алгоритм пересчета естественным образом реализуется в массиве оперативной памяти компьютера, когда на месте старой таблицы получается новая, что, кстати, не требует дополнительной памяти для хранения старой таблицы, поскольку преобразованные элементы в дальнейших вычислениях не нужны.

Заметим, что столбцы новой таблицы, соответствующие базисным переменным, можно заполнять без всяких вычислений нулями и единицами. Впрочем, они могут быть вычислены и в рамках правила преобразования на четвертом шаге данного алгоритма. В результате после пересчета всех элементов табл. 10.5 по правилу треугольника она приобретает вид табл. 10.4. Поскольку единственная небазисная переменная имеет отрицательную оценку, найденный план оптимален.

Сравнивая правило четырехугольника пересчета одного элемента сокращенной симплексной таблицы (требуется два умножения, одно вычитание и одно деление) и соответствующее ему правило треугольника (требуется одно умножение и одно сложение) симплексной таблицы с единичной матрицей, приходим к выводу, что правило треугольника является более эффективным. Заметим, что для задач большой размерности это основная вычислительная операция элементарного симплексного преобразования.

Пример 10.2. Требуется решить ЗЛП

$$\max(5x_1 + 8x_2);$$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &\le 420, \\ x_1 + 2x_2 &\le 80, \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 300, \\ x &\ge 0. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Запишем задачу в канонической форме, для чего введем в правые части ресурсных ограничений неотрицательные дополнительные переменные:

$$\max(5x_1 + 8x_2);$$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 420, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 80, \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 300, \\ x &\ge 0. \end{aligned}$$

Используя дополнительные переменные в качестве базисных, запишем предпочтительную форму данной задачи:

$$\begin{aligned} x_3 &= 420 - (6x_1 + 7x_2), \\ x_4 &= 80 - (x_1 + 2x_2), \\ x_5 &= 300 - (3x_1 + 4x_2), \\ L &= 0 - (-5x_1 - 8x_2). \end{aligned}$$

Этой записи соответствует опорный план $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 420$, $x_4 = 80$, $x_5 = 300$.

Запишем предпочтительную форму в симплексную таблицу с единичной матрицей (табл. 10.6).

Таблица 10.6

Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	420	6	7	1	0	0	60
x_4	80	1	2	0	1	0	40
x_5	300	3	4	0	0	1	75
f	0	–5	–8	0	0	0	

Оптимизация критерия приводит к последовательному включению в базис переменных x_2 и x_1. Связанные с этим преобразования предпочтительной формы представлены в табл. 10.7 и 10.8.

Таблица 10.7

Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	140	5/2	0	1	–7/2	0	56
x_2	40	1/2	1	0	1/2	0	80
x_5	140	1	0	0	–2	1	140
f	320	–1	0	0	4	0	

Таблица 10.8

Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_1	56	1	0	2/5	–1,4	0	
x_2	12	0	1	–1/5	1,2	0	
x_5	84	0	0	–2/5	–3/5	1	
f	376	0	0	2/5	13/5	0	

Отсутствие в строке критерия табл. 10.8 отрицательных чисел является признаком оптимальности соответствующего опорного плана $x_1 = 56$, $x_2 = 12$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 84$, $f = 376$.

При ручном решении ЗЛП (с учебными целями), как правило, возможно представление дробных чисел в виде рациональных дробей, как это сделано в табл. 10.6—10.8. Такой прием позволяет исключить ошибки округления.

В рассмотренном выше алгоритме оценки небазисных переменных вычисляются в рамках общего алгоритма элементарного симплексного преобразования, что оправдывает их запись с обратным знаком в строке критерия. Иногда целесообразно прямое вычисление оценок, что соответствует использованию предпочтительной формы системы ограничений для исключения базисных переменных из исходного критерия канонической формы ЗЛП.

Рассмотрим алгоритм прямого вычисления оценок небазисных переменных на примере табл. 10.8. Пусть требуется вычислить оценку небазисной переменной x_3.

Сначала вычислим величину z_3 как произведение столбца x_3 указанной симплексной таблицы и столбца коэффициентов критерия при соответствующих базисных переменных. Необходимые для этого данные представлены в табл. 10.9.

Таблица 10.9

БП	Коэффициент при базисной переменной	Столбец x_3
x_1	5	2/5
x_2	8	–1/5
x_5	0	–2/5

В результате получим $z_3 = 5(2/5) + 8(-1/5) + 0(-2/5) = 2 - 8/5 = 2/5$. Тогда искомая оценка вычисляется как разность между значением коэффициента критерия при переменной x_3 и найденной величиной z_3, что дает $-2/5$. Напомним, что указанная оценка записывается в симплексную таблицу (см. табл. 10.8) с обратным знаком с целью пересчета по общему с остальными строками способу (шаг 4 алгоритма).

Вектор-строка оценок небазисных переменных вычисляется по формуле

$$\Delta = \mathbf{c}_{\text{нб}} - \mathbf{z} = \mathbf{c}_{\text{нб}} - \mathbf{c}_{\text{б}} T, \tag{10.4}$$

где $\mathbf{c}_{\text{нб}}$ — вектор коэффициентов критерия при небазисных переменных; $\mathbf{c}_{\text{б}}$ — вектор коэффициентов критерия при базисных переменных.

Вычисление оценок рассмотренным способом соответствует подстановке в критерий выражений базисных переменных через небазисные с последующим приведением подобных членов для получения его предпочтительной формы (см. пример 10.1).

Применение выражения (10.4) для вычисления оценок небазисных переменных целесообразно, например, при нахождении предпочтительной формы ЗЛП методом обратной матрицы. В других случаях применение выражения (10.4) удобно, когда затруднителен пересчет оценок небазисных переменных в рамках общего алгоритма пересчета строк симплексной таблицы, например при использовании M-задачи в методе искусственного базиса.

10.2. Отображение процесса решения задачи линейного программирования симплексным методом

Исходя из целей решения ЗЛП симплексным методом, а также используемых технических средств, определяют целесообразный способ отображения вычислительного процесса нахождения решения. Так, в случае решения задачи небольшой размерности вручную с учебными целями (возможно с применением калькулятора) наиболее целесообразной формой записи текущих результатов в процессе решения задачи является расширенная симплексная таблица с единичной матрицей (см. § 10.1). Сокращенную симплексную таблицу при ручных вычислениях применяют тогда, когда возникают трудности размещения текущих результатов вычислений (например, при решении задач с числом переменных более 10).

При разработке компьютерной программы обязательным является принцип хранения текущей предпочтительной формы в наиболее компактном виде для достижения эффективного использования основной памяти компьютера.

На рис. 10.1 представлена схема хранения текущих результатов вычислений в процессе решения задачи для компьютерного варианта алгоритма симплексного метода. Здесь одномерные массивы β и γ предназначены для хранения номеров соответственно

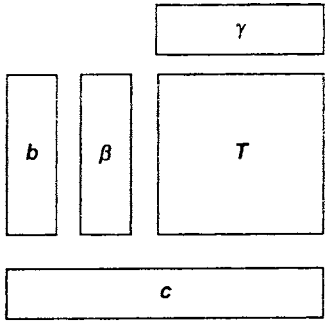


Рис. 10.1

базисных и небазисных переменных. Массивы **b** и T предназначены для размещения значений базисных переменных и матрицы предпочтительной формы соответственно. Коэффициенты критерия хранятся неизменными в массиве **c**. В данной схеме обозначения массивов совпадают с обозначениями, использованными при записи предпочтительной формы ЗЛП (см. выражения (10.3), (10.4)).

Для хранения симплексных отношений θ и оценок небазисных переменных Δ выделение специальных массивов нецелесообразно. Поскольку симплексные отношения вычисляются исключительно для определения минимального из них, то в цикле вычисления можно обойтись без их засылки в массив. То же относится и к вектору оценок небазисных переменных. На конечном этапе процесса вычислений, после получения оптимальной симплексной таблицы, компоненты вектора Δ выводятся как значения двойственных переменных.

10.3. Требования к программному обеспечению для решения общей задачи линейного программирования симплексным методом

Опыт применения имеющихся компьютерных программ позволяет сформулировать основные принципы проектных решений при разработке новых систем программного обеспечения для решения ЗЛП как в учебном процессе, так и в реальных системах экономического менеджмента.

Программное обеспечение решения ЗЛП должно гарантировать:

1) высокую точность нахождения решения задачи;

2) решение ЗЛП достаточно большой (максимальной относительно имеющихся ресурсов компьютера) размерности;

3) достаточно быстрое решение ЗЛП.

Это три основных требования. В случае использования программы для производственного применения она должна удовлетворять дополнительным требованиям.

1. Необходимо наличие средств, позволяющих включать программу в интегрированную систему обработки данных. Это обеспечивается обязательным наличием возможности вывода электронной формы результатов решения (на внешние носители, в вычислительную сеть и т. п.).

2. Формат представления решения должен быть совместим с известными прикладными программными инструментами, такими, как Excel и др.

3. Система подготовки описания математической модели (ввода, формирования данных) должна быть максимально гибкой (например, в перспективе допускать использование территориально распределенных баз данных). Желательно наличие автоматических средств актуализации математической модели.

4. Программное обеспечение должно иметь современный экранный интерфейс, что определяет эффективность применения программного продукта.

Первое основное требование (обеспечение высокой точности результата решения задачи) достигается за счет специальных приемов, причем выполнение вычислений с повышенной (двойной) точностью является не главным, а скорее даже вредным.

Основная проблема реализации симплексного алгоритма — накопление ошибок округления, что свойственно всем без исключения точным итерационным методам вычислений. Избавиться от ошибок округления в общем случае принципиально невозможно при любом числе разрядов, используемых для представления чисел в процессе вычислений. Однако подавить накопление ошибок округления вполне возможно путем периодического применения метода обратной матрицы при пересчете симплексной таблицы. Хотя ошибки округления, возникающие при обращении матрицы, будут иметь место, но исключается эффект их накопления.

Метод обратной матрицы полезно использовать в конце вычислений после получения оптимальной симплексной таблицы. В результате уточнения симплексной таблицы может оказаться, что в действительности базис не является оптимальным. В таком случае включается симплексный алгоритм оптимизации. Этот прием допускает минимальную точность вычислений при реализации симплексного метода и способствует более эффективному использованию оперативной памяти, что в свою очередь обеспечивает возможность решения задач повышенной размерности. Обычный формат представления числа с плавающей точкой (4 байта — слово) заведомо достаточен для решения любых ЗЛП при использовании указанного механизма подавления ошибок округления.

Обеспечение второго основного требования (высокая размерность решаемых задач) достигается как за счет экономного использования основной памяти (одинарная точность), так и с помощью специальных математических методов (декомпозиции). Емкость оперативной памяти современных компьютеров допускает решение ЗЛП размерностью примерно 3000×3000 и более без применения методов декомпозиции.

Что касается скорости решения задачи (третье основное требование), то проблемы с быстродействием процессора возникать не могут. Однако упускать почти бесплатное увеличение скорости решения задачи за счет применения правила треугольника вместо правила четырехугольника при выполнении элементарного симплексного преобразования было бы ошибочным. Заметим, что отказ от вычислений с двойной точностью также способствует экономии ресурса быстродействия процессора. Кроме того, массовые вычислительные операции желательно ориентировать на максимальное использование сверхбыстрых регистров процессора, что может быть достигнуто за счет применения инструментальных средств программирования, близких базовому языку компьютера.

Хотя использование жесткого диска как виртуальной оперативной памяти для размещения симплексной таблицы легко достигается в операционной среде Windows и позволяет решать ЗЛП сверхбольшой размерности, но при этом придется позаботиться о включении в алгоритм программы механизма прерывания процесса оптимизации вследствие резкого снижения быстродействия алгоритма. Для компенсации указанного эффекта замедления скорости решения задачи при использовании виртуальной памяти приходится тщательно продумывать динамику загрузки фрагментов расчетной таблицы в основную память компьютера.

11

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Приводимые ниже контрольные задания охватывают все основные темы дисциплины «Математическое программирование». Задания можно использовать при формировании контрольных работ для студентов как дневной, так и заочной формы обучения. Количество контрольных работ и их объем устанавливаются решением кафедры. Поскольку предлагаемые задачи предполагают использование наиболее распространенных в настоящее время оптимизационных методов, теория которых излагается на лекциях, то в целях освоения «внутренней» математики методов решение задач следует выполнять вручную. Именно поэтому составленные задачи имеют сравнительно небольшую размерность и не требуют громоздких вычислений. Вместе с тем в учебных целях студентам можно рекомендовать проверить правильность решения задачи на персональной ЭВМ.

ЗАДАНИЕ № 1

Темы: «Линейное программирование», «Двойственность в линейном программировании»

1—30. На предприятии имеется возможность выпускать n видов продукции Π_j $(j = \overline{1, n})$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2 и P_3. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами b_1, b_2 и b_3. Расход ресурса i-го $(i = \overline{1, 3})$ вида на единицу продукции j-го вида составляет a_{ij} единиц. Цена единицы продукции j-го вида равна c_j ден. ед. Требуется:

1) симплексным методом найти план выпуска продукции по видам с учетом имеющихся ограниченных ресурсов, который обеспечивал бы предприятию максимальный доход; дать содержательный ответ, вскрыв экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи;

2) сформулировать в экономических терминах двойственную задачу и составить ее математическую модель;

3) используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи — двойственные оценки y_i^* $(i = \overline{1, 3})$;

4) указать наиболее дефицитный и недефицитный (избыточный) ресурсы, если они имеются;

5) с помощью двойственных оценок y_i^* обосновать рациональность оптимального плана, сопоставив оценку затрат $\varphi_{\min}$ израсходованных ресурсов и максимальный доход $j_{\max}$ от реализации готовой продукции по всему оптимальному плану и по каждому виду продукции в отдельности;

6) определить величину Δb_s ресурса P_s, введением которого в производство можно компенсировать убыток и сохранить максимальный доход на прежнем уровне (ресурсы предполагаются взаимно заменяемыми), получаемый при исключении из производства Δb_r ед. ресурса P_r, что вызывает уменьшение максимального дохода на $\Delta_r f_{\max}$ ед.;

7) оценить целесообразность приобретения Δb_k ед. ресурса P_k по цене c_k за единицу;

8) установить, целесообразно ли выпускать новую продукцию $П_l$, на единицу которой ресурсы P_1, P_2 и P_3 расходуются в количествах a_{1l}, a_{2l} и a_{3l} ед., а цена единицы готовой продукции составляет p_l ед.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.1—11.3.

Таблица 11.1

	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	4	3	4	3	3	3	3	4	3	3
b_1	20	150	280	1200	600	24	500	100	360	180
b_2	37	180	80	150	30	10	550	260	192	210
b_3	30	120	250	3000	144	6	200	370	180	244
a_{11}	2	2	2	15	10	5	2	2,5	18	4
a_{12}	2	3	1	20	20	7	1	2,5	15	2
a_{13}	3	4	1	25	23	4	0	2	12	1
a_{14}	0	—	1	—	—	—	—	1,5	—	—
a_{21}	3	1	1	2	1	5	0	4	6	3
a_{22}	1	4	0	3	1	2	2	10	4	1
a_{23}	1	5	1	2,5	1	1	1	4	8	3
a_{24}	2	—	1	—	—	—	—	6	—	—
a_{31}	0	3	1	35	5	2	0	8	5	1
a_{32}	1	4	2	60	6	1	1	7	3	2
a_{33}	1	2	1	60	6	1	0	4	3	5
a_{34}	4	—	0	—	—	—	—	10	—	—
c_1	11	8	4	300	35	18	3	40	9	10
c_2	6	7	3	250	60	12	4	50	10	14
c_3	9	6	6	450	63	8	1	100	16	12
c_4	6	—	7	—	—	—	—	80	—	—
r	2	3	3	1	3	2	1	2	2	1
Δb_r	1	2	4	2	3	1	6	6	3	2
s	3	1	2	2	2	1	3	1	1	3
k	2	3	2	2	3	1	1	3	2	1
Δb_k	3	5	3	5	4	3	8	10	5	7
b_k	2	2	6	30	10	2	1	5	1	5
l	5	4	5	4	4	4	4	5	4	4
a_{1l}	8	4	8	18	15	6	2	3	27	4
a_{2l}	4	6	6	4	1	3	1	9	9	5
a_{3l}	8	8	12	50	3	4	4	12	7	8
p_l	40	30	35	400	25	20	5	120	15	30

Таблица 11.2

	Номер задачи									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	4	5	3	3	3	4	5	4	4	3
b_1	2	3	400	6000	12	1000	3	4	24	12
b_2	2	2	250	5000	25	500	5	3	12	27
b_3	2	2	200	9000	18	1200	4	3	35	6
a_{11}	1	1	1/6	1	6	1	1	1	1	2
a_{12}	1	1	3/7	1	4	2	2	3	2	1
a_{13}	0	1	1/4	1	3	3	3	0	4	6
a_{14}	2	2	—	—	—	1	6	1	8	—
a_{15}	—	2	—	—	—	—	2	—	—	—
a_{21}	0	0	1/4	1/2	5	2	2	2	3	3
a_{22}	1	1	1/7	1	3	1	3	1	5	3
a_{23}	1	1	1/4	5	2	0	1	0	1	9
a_{24}	0	1	—	—	—	0	6	0	0	—
a_{25}	—	2	—	—	—	0	0	—	—	—
a_{31}	1	1	1/6	1/2	4	0	3	0	6	2
a_{32}	0	1	1/7	1/2	5	1	1	1	0	1
a_{33}	1	0	3/8	20	4	4	2	4	3	2
a_{34}	0	2	—	—	—	1	6	1	1	—
a_{35}	—	1	—	—	—	—	4	—	—	—
c_1	3	5	120	80	1	2	3	2	0,4	14
c_2	7	2	100	100	2	40	4	4	0,2	6
c_3	4	8	150	300	3	10	1	1	0,5	22
c_4	2	3	—	—	—	15	3	1	0,8	—
c_5	—	6	—	—	—	—	2	—	—	—
r	2	1	3	2	1	1	1	2	1	1
Δb_r	0,02	0,04	2	30	2	5	0,05	0,02	2	2
s	1	2	1	3	3	3	3	1	2	3
k	2	1	3	3	2	1	3	1	1	3
Δb_k	0,05	0,02	12	20	0,3	12	0,02	0,01	0,5	0,02
c_k	3	4	100	1,5	4	15	1,5	0,2	0,02	4
l	5	6	4	4	4	5	6	5	5	4
a_{1l}	3	2	11/20	10	7	3	2	1	4	3
a_{2l}	2	4	11/40	5	12	2	1	2	2	2
a_{3l}	4	7	11/40	8	9	10	2	1	3	4
p_l	15	20	150	200	30	80	45	15	8	30

Таблица 11.3

	Номер задачи									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	3	3	3	3	3	4	3	4	4	3
b_1	8	5	12	4	18	34	1	12	4	2
b_2	18	4	27	7	16	16	2	8	3	3
b_3	6	2	6	12	8	22	1	48	3	4
a_{11}	4	0	2	1	1	2	1	2	1	1
a_{12}	1	2	1	3	2	4	2	4	3	1
a_{13}	2	5	6	0	1	1	0	0	0	0
a_{14}	—	—	—	—	—	5	—	8	1	—
a_{21}	6	2	3	1	2	4	1	7	2	1
a_{22}	1	4	3	0	1	1	1	2	1	0
a_{23}	3	2	9	2	1	4	2	2	0	2
a_{24}	—	—	—	—	—	1	—	6	0	—
a_{31}	6	1	2	1	1	2	2	5	0	1
a_{32}	1	0	1	3	1	3	0	8	1	1
a_{33}	1	1	2	2	0	1	3	4	4	1
a_{34}	—	—	—	—	—	2	—	3	1	—
c_1	24	20	14	3	3	7	3	3	2	1
c_2	4	8	6	8	4	3	1	4	6	1
c_3	8	30	22	5	2	4	4	3	2	1
c_4	—	—	—	—	—	2	—	1	3	—
r	3	1	1	2	1	2	1	1	3	2
Δb_r	2	2	0,5	0,3	0,02	0,1	0,2	0,3	0,05	0,05
s	1	3	3	1	3	3	3	2	1	1
k	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2
Δb_k	0,05	0,02	0,05	0,02	0,05	0,02	0,005	0,03	0,005	0,002
c_k	2	5	1,5	2	1,2	1,3	0,2	1,2	0,15	0,3
l	4	4	4	4	4	5	4	5	5	4
a_{1l}	5	3	6	3	2	5	2	7	2	1
a_{2l}	8	5	5	1	3	4	1	5	4	2
a_{3l}	3	2	8	4	1	7	2	8	3	2
p_l	25	40	40	12	10	20	8	25	7	5

ЗАДАНИЕ № 2

Тема: **«Элементы теории матричных игр»**

31—40. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний: 1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта; 2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы; 3) оборудование требует капитального ремонта или замены. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1, a_2 или a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1, b_2 или b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2 или c_3 ден. ед. Указанные выше расходы предприятия включают кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях: а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2, q_3; б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны; в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя.

Указание. В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а — критерием Байеса, в п. 3б — критерием Лапласа, в п. 3в — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра γ в критерии Гурвица задается).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.4.

Таблица 11.4

	Номер задачи									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
a_1	5	4	7	6	9	10	8	7	10	13
a_2	11	6	11	10	12	8	11	12	17	9
a_3	9	9	9	15	10	13	7	20	13	15
b_1	7	5	6	15	7	18	15	15	12	20
b_2	12	3	8	9	14	14	10	11	15	12
b_3	6	7	16	18	9	10	16	17	9	11
c_1	15	20	21	13	15	25	12	23	21	18
c_2	10	15	10	24	11	12	9	9	8	10
c_3	16	6	12	12	18	9	18	13	14	14
q_1	0,30	0,40	0,15	0,15	0,20	0,35	0,35	0,15	0,35	0,30
q_2	0,50	0,45	0,60	0,55	0,65	0,45	0,50	0,65	0,55	0,45
q_3	0,20	0,15	0,25	0,30	0,15	0,20	0,15	0,20	0,10	0,25
γ	0,70	0,90	0,50	0,80	0,60	0,80	0,70	0,90	0,60	0,70

41—50. Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объем выпуска неосновной сезонной продукции *I*, *II* и *III*. Не проданная в течение сезона часть продукции позднее реализуется полностью по сниженной цене. Буквенные обозначения себестоимости продукции, отпускных цен и объемов реализации в зависимости от уровня спроса приведены в табл. 11.5.

Таблица 11.5

Вид продукции	Себестоимость единицы продукции	Отпускная цена за единицу продукции		Объем реализации (тыс. ед.) при уровне спроса		
		в течение сезона	после уценки	повышенном	среднем	пониженном
I	d_1	p_1	q_1	a_1	b_1	c_1
II	d_2	p_2	q_2	a_2	b_2	c_2
III	d_3	p_3	q_3	a_3	b_3	c_3

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;

2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

3) дать обоснованные рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, обеспечивающих предприятию наивысшую сумму прибыли.

Указание. Для уменьшении размерности платежной матрицы ограничиться исследованием лишь тех трех ситуаций, когда одновременно на все три вида продукции уровень спроса одинаков: повышенный (состояние Π_1), средний (состояние Π_2), пониженный (состояние Π_3).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.6.

Таблица 11.6

	Номер задачи									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d_1	1,3	1,5	2,2	0,7	3,4	1,8	3,2	2,6	3,8	4,4
d_2	1,7	2,1	1,6	2,4	1,7	2,5	1,8	3,7	2,6	2,1
d_3	0,9	1,4	3,4	1,8	2,5	0,9	2,7	1,5	3,2	3,5
p_1	2,6	2,3	3,7	1,8	4,5	2,7	4,7	3,4	4,7	5,2
p_2	3,0	3,4	2,4	3,7	2,8	3,8	2,5	4,2	3,9	3,5
p_3	1,8	2,8	4,5	2,5	3,2	1,5	3,8	2,8	4,5	4,7
q_1	2,1	1,8	3,2	1,2	3,2	1,4	3,5	2,8	3,5	4,1
q_2	1,8	2,2	1,6	2,4	1,4	2,6	1,2	3,2	2,8	2,6
q_3	0,7	1,6	3,2	1,2	1,8	0,8	2,1	1,7	3,2	3,2
a_1	19	22	17	28	18	24	36	14	26	38
a_2	28	32	18	19	36	24	46	38	42	16
a_3	32	44	29	37	26	41	18	24	28	39
b_1	14	17	12	16	13	17	25	8	16	22
b_2	16	18	9	20	19	14	28	22	29	9
b_3	18	28	17	21	14	22	12	13	17	24
c_1	8	12	6	7	5	9	10	5	8	12
c_2	7	10	4	8	9	7	12	9	10	4
c_3	9	13	8	10	6	9	5	7	11	13

51—60. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет b_1, b_2, b_3 или b_4 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме c_1 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят c_2 ед. в расчете на единицу сырья. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;

2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

3) дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными при следующих предположениях: а) вероятности q_1, q_2, q_3, q_4 потребности в сырье в количествах соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 ед. известны; б) потребление сырья в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 ед. представляется равновероятным; в) о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя.

Указаине. В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а — критерием Байеса, в п. 3б — критерием Лапласа, в п. 3в — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра γ в критерии Гурвица задается).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.7.

Таблица 11.7

	Номер задачи									
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
b_1	12	10	8	15	9	6	20	13	10	8
b_2	14	11	9	17	10	8	21	15	12	10
b_3	16	12	10	19	11	10	22	17	14	12
b_4	18	13	11	21	12	12	23	19	16	14
c_1	5	8	7	4	6	5	2	9	3	5
c_2	7	4	3	9	2	8	4	7	6	8
q_1	0,25	0,15	0,20	0,25	0,10	0,15	0,20	0,10	0,20	0,15
q_2	0,30	0,30	0,25	0,45	0,30	0,30	0,30	0,35	0,25	0,25
q_3	0,25	0,40	0,40	0,20	0,40	0,40	0,35	0,35	0,40	0,20
q_4	0,20	0,15	0,15	0,10	0,20	0,15	0,15	0,20	0,15	0,40
γ	0,60	0,80	0,70	0,90	0,80	0,60	0,90	0,70	0,80	0,60

ЗАДАНИЕ № 3

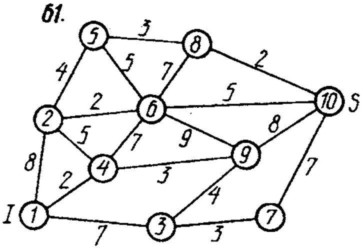
Т е м а: **«Программирование на сетях»**

61—90. На заданной сети указаны пропускные способности ребер. Предполагается, что пропускные способности в обоих направлениях одинаковы. Требуется:

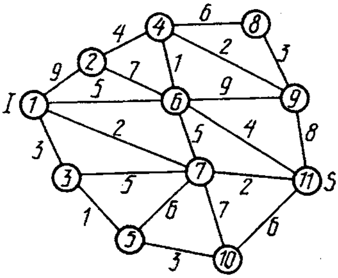
1) сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S;

2) выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

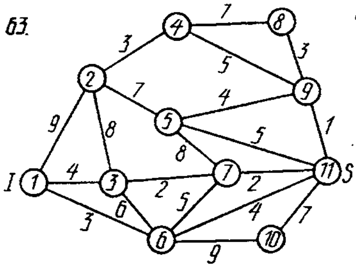
61.



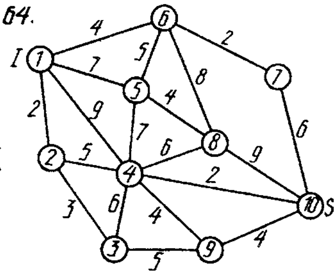
62.



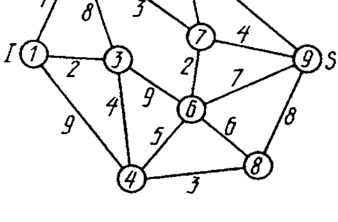
63.



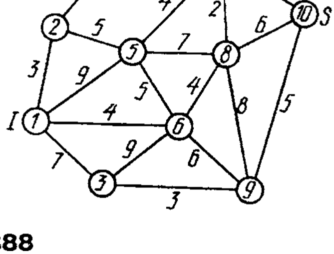
64.



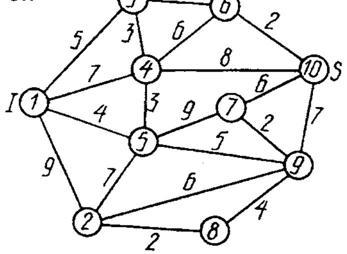
65.



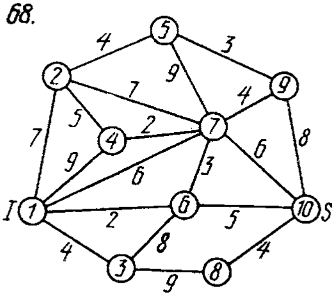
66.



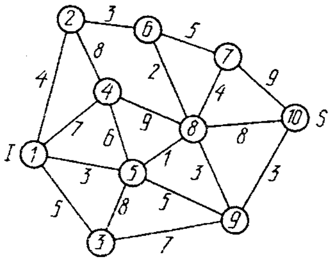
67.



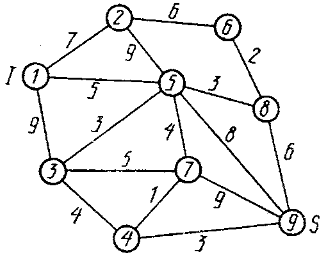
68.



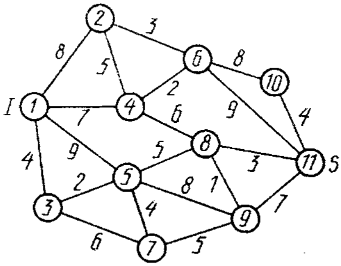
69.



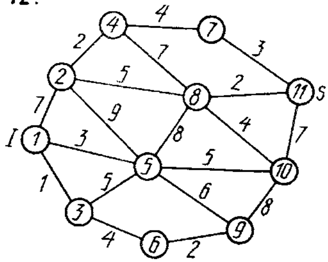
70.



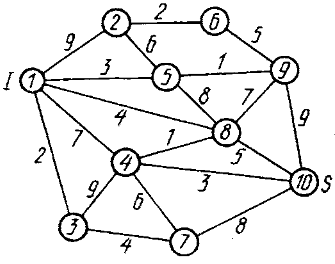
71.



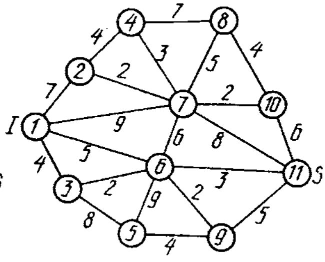
72.



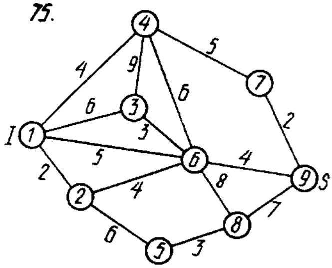
73.



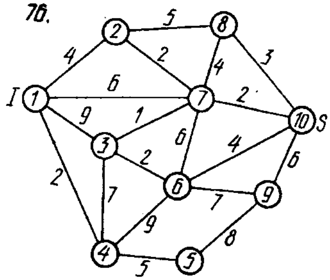
74.



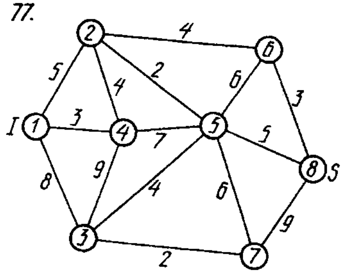
75.



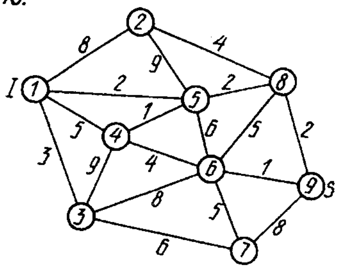
76.



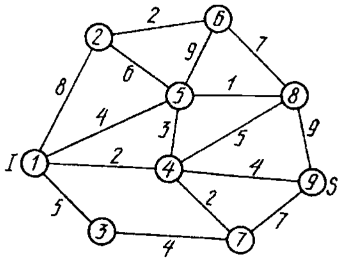
77.



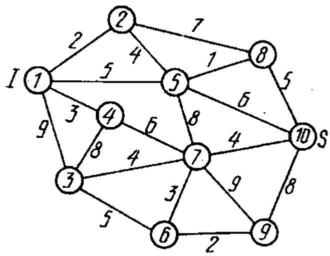
78.



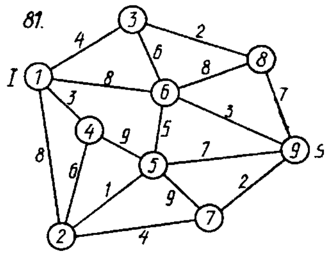
79.



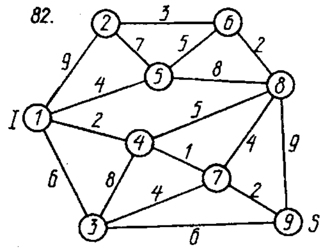
80.



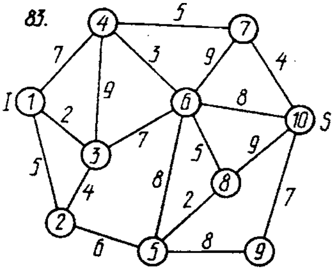
81.



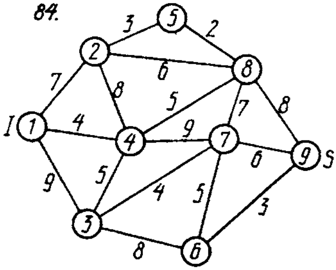
82.



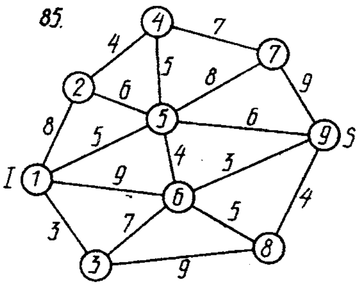
83.



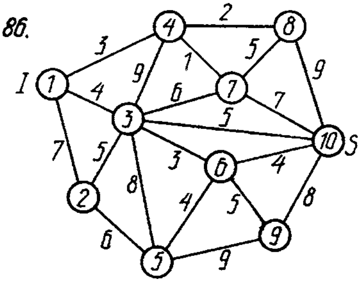
84.



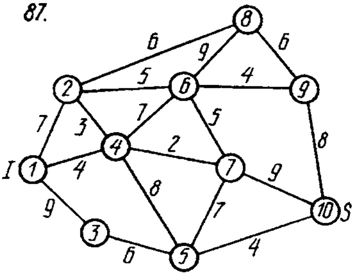
85.



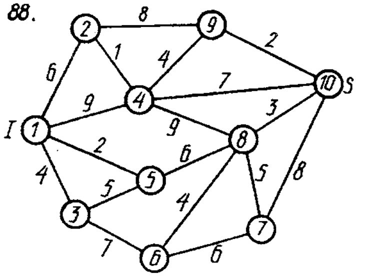
86.



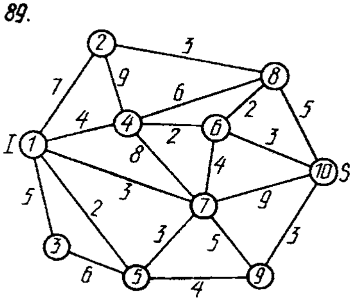
87.



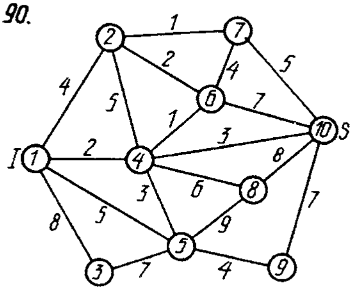
88.



89.

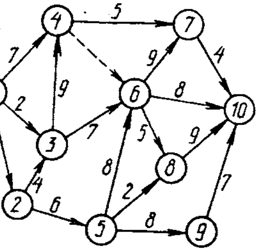


90.

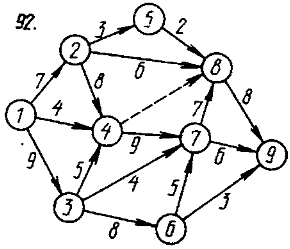


91—120. Рассчитать непосредственно на сетевом графике комплекса работ ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, минимальное время выполнения комплекса (критический срок). Выделить на сетевом графике критический путь. Для некритических работ найти полные и свободные резервы времени.

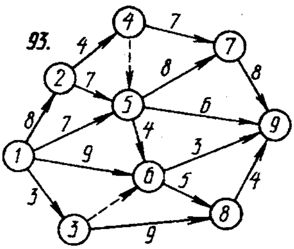
91.



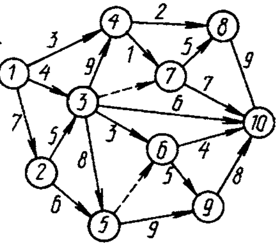
92.



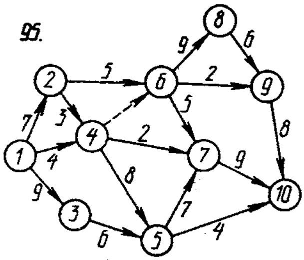
93.



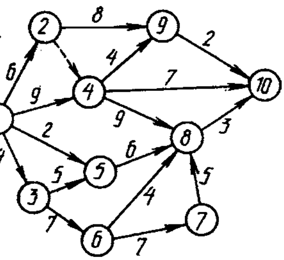
94.



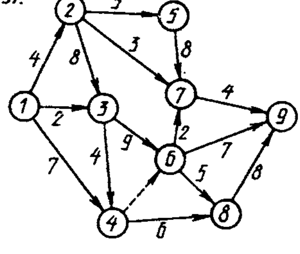
95.



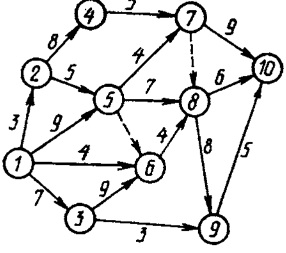
96.



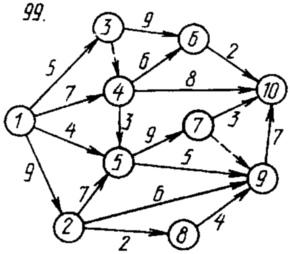
97.



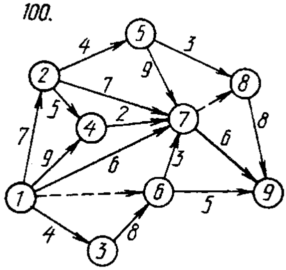
98.



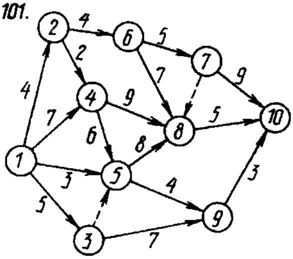
99.



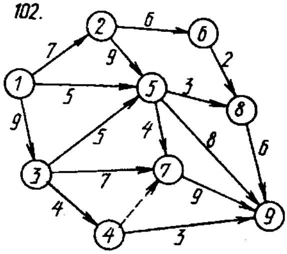
100.



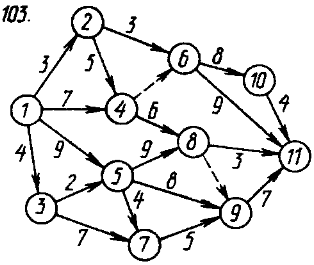
101.



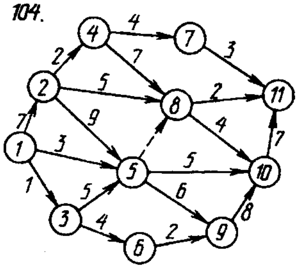
102.



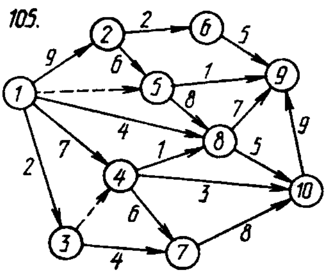
103.



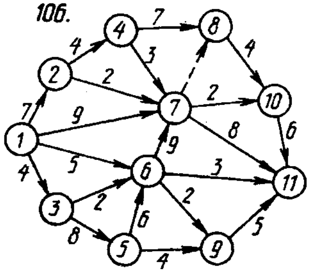
104.



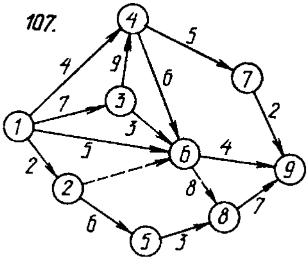
105.



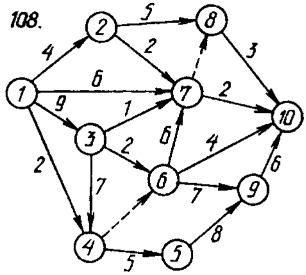
106.



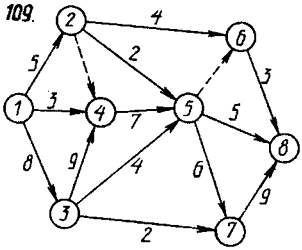
107.



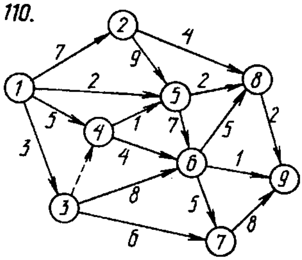
108.



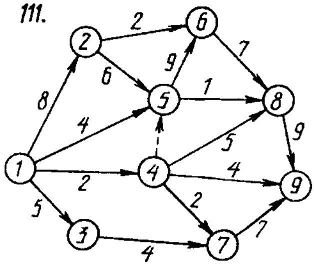
109.



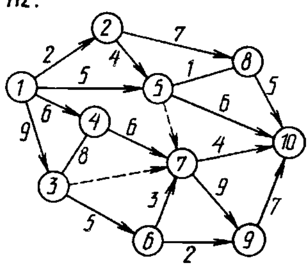
110.



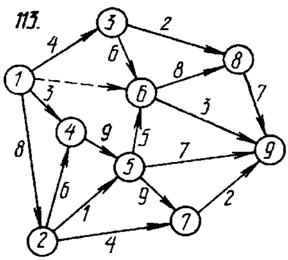
111.



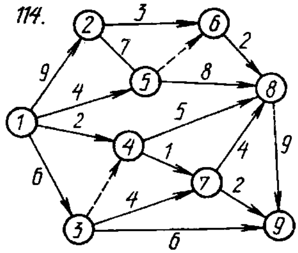
112.



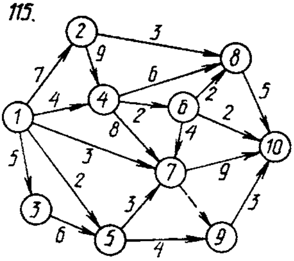
113.



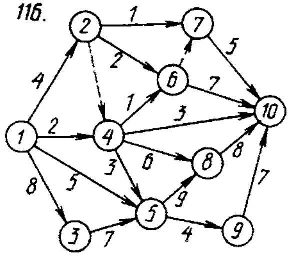
114.



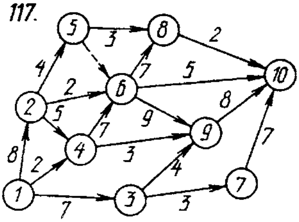
115.



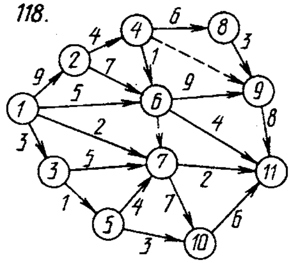
116.



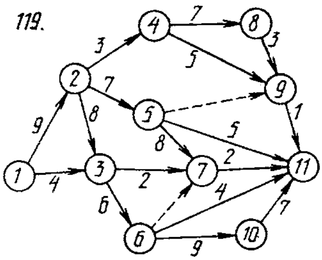
117.



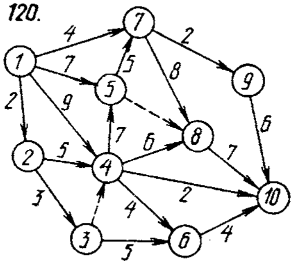
118.



119.



120.



На основе выполненных расчетов установить:

1) как повлияет на срок выполнения комплекса увеличение продолжительности работы (m, n), работы (r, s);

2) можно ли использовать полный резерв времени работы (e, f) для увеличения продолжительности работы (f, k) и работы (k, l), не увеличивая время выполнения комплекса;

3) изменится ли полный резерв времени работы (p, q), если время выполнения комплекса возрастет за счет увеличения продолжительности работы (r, s).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.8.

Таблица 11.8

Номер задачи	Работа					
	(m, n)	(r, s)	(e, f)	(f, k)	(k, l)	(p, q)
91	(5, 8)	(8, 10)	(1, 4)	(4, 7)	(7, 10)	(5, 8)
92	(3, 6)	(8, 9)	(1, 3)	(3, 7)	(7, 9)	(1, 4)
93	(3, 8)	(7, 9)	(1, 6)	(6, 8)	(8, 9)	(1, 5)
94	(4, 8)	(9, 10)	(3, 4)	(4, 8)	(8, 10)	(2, 5)
95	(5, 7)	(9, 10)	(2, 4)	(4, 7)	(7, 10)	(6, 9)
96	(4, 9)	(8, 10)	(1, 2)	(2, 9)	(9,10)	(6, 8)
97	(5, 7)	(8, 9)	(2, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(1, 3)
98	(5, 7)	(9, 10)	(2, 4)	(4, 7)	(7, 10)	(3, 9)
99	(1, 4)	(9, 10)	(1, 3)	(3, 6)	(6, 10)	(2, 9)
100	(3, 6)	(8, 9)	(2, 4)	(4, 7)	(7, 9)	(2, 7)
101	(3, 9)	(8, 10)	(2, 6)	(6, 7)	(7, 10)	(4, 8)
102	(3, 4)	(7, 9)	(2, 6)	(6, 8)	(8, 9)	(1, 5)
103	(5, 9)	(9, 11)	(2, 6)	(6, 10)	(10, 11)	(5, 9)
104	(3, 6)	(10, 11)	(2, 4)	(4, 8)	(8, 11)	(1, 5)
105	(2, 6)	(9, 10)	(1, 4)	(4, 7)	(7, 10)	(1, 8)
106	(2, 4)	(10, 11)	(1, 6)	(6, 9)	(9, 11)	(3, 6)
107	(2, 5)	(8, 9)	(1, 2)	(2, 5)	(5, 8)	(3, 6)
108	(2, 8)	(9, 10)	(1, 2)	(2, 7)	(7, 10)	(1, 4)
109	(2, 5)	(7, 8)	(1, 2)	(2, 6)	(6, 8)	(3, 5)
110	(1, 3)	(7, 9)	(4, 5)	(5, 8)	(8, 9)	(1, 5)
111	(4, 7)	(8, 9)	(1, 3)	(3, 7)	(7, 9)	(2, 6)
112	(2, 8)	(9, 10)	(2, 5)	(5, 8)	(8, 10)	(1, 4)
113	(3, 8)	(8, 9)	(2, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(2, 5)
114	(4, 7)	(8, 9)	(1,3)	(3, 7)	(7, 8)	(1, 5)
115	(6, 8)	(7, 10)	(3, 5)	(5, 9)	(9, 10)	(1, 4)
116	(4, 6)	(8, 10)	(1, 2)	(2, 6)	(6, 10)	(1, 5)
117	(5, 8)	(9, 10)	(1, 3)	(3, 7)	(7, 10)	(2, 6)
118	(4, 8)	(9, 11)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 10)	(1, 6)
119	(5, 7)	(10, 11)	(2, 4)	(4, 9)	(9, 11)	(1, 3)
120	(7, 9)	(8, 10)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 10)	(4, 8)

ЗАДАНИЕ № 4

Тема: «Транспортная задача»

121—130. В пунктах A_i $(i = \overline{1, 3})$ производится однородная продукция в количествах a_i ед. Себестоимость единицы продукции в i-м пункте равна c_i. Готовая продукция поставляется в пункты B_j ($j = \overline{1, 4}$), потребности которых составляют b_j ед. Стоимости c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $[c_{ij}]_{3\times4}$. Требуется:

1) методом потенциалов найти план перевозок продукции, при котором минимизируются суммарные затраты на ее изготовление и доставку потребителям, при обязательном условии, что продукция пункта, в котором себестоимость ее производства наименьшая, распределяется полностью;

2) вычислить суммарные затраты $f_{\min}$;

3) установить пункты, в которых остается нераспределенная продукция, и указать ее объем.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.9.

Таблица 11.9

	Номер задачи									
	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
a_1	400	750	250	300	450	350	250	200	500	500
a_2	300	200	550	700	200	750	650	500	900	200
a_3	500	550	350	400	350	300	300	300	100	600
c_1	2	4	4	2	3	2	2	4	2	4
c_2	3	3	1	1	5	4	1	5	5	5
c_3	1	1	5	4	1	3	5	2	3	3
b_1	350	450	300	250	150	200	350	150	200	250
b_2	250	300	150	450	300	50	50	450	650	150
b_3	150	350	400	150	50	600	150	50	150	350
b_4	250	250	150	350	400	400	450	250	300	250
c_{11}	2	1	2	3	6	4	5	3	7	4
c_{12}	6	6	6	7	4	5	10	4	7	8
c_{13}	4	5	3	6	8	8	4	8	8	3
c_{14}	7	3	5	4	3	6	6	2	4	7
c_{21}	6	4	8	7	5	4	7	4	6	5
c_{22}	2	3	7	5	1	7	8	1	1	1
c_{23}	7	5	10	4	4	1	10	4	2	6
c_{24}	1	7	5	9	4	2	9	5	7	4
c_{31}	6	5	2	3	7	2	1	9	4	4
c_{32}	10	8	7	6	11	6	5	10	7	6
c_{33}	7	10	5	5	9	4	4	6	5	5
c_{34}	5	4	3	1	6	7	2	5	6	3

131—140. На заводах № 1, 2 и 3 производится однородная продукция в количествах a_1, a_2 и a_3 ед. При этом затраты на производство единицы продукции на заводах составляют c_1, c_2 и c_3 ден. ед. Четырем потребителям требуется соответственно b_1, b_2, b_3 и b_4 ед. продукции. Расходы c_{ij} по перевозке единицы продукции с i-го завода j-му потребителю известны. Для полного удовлетворения потребностей необходимо увеличить выпуск продукции. При этом возможны следующие варианты: 1) расширить мощность завода № 1 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными Δc_1; 2) расширить мощность завода № 2 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными Δc_2; 3) наладить выпуск продукции на заводе № 4 с затратами на производство единицы продукции, равными c_4, и расходами по перевозке единицы продукции, равными соответственно c_{41}, c_{42}, c_{43} и c_{44}. Требуется:

1) методом потенциалов найти оптимальный план расширения производства продукции, при котором полностью удовлетворяется спрос, а совокупные затраты, связанные с изготовлением продукции и ее доставкой потребителям, минимизируются;

2) определить минимальные совокупные затраты на производство продукции и доставку ее потребителям по оптимальному плану расширения выпуска продукции.

Указание. Приведенные в задаче варианты увеличения выпуска продукции рассматривать в ходе решения как самостоятельные пункты производства в едином комплексе с данными пунктами (заводами). Таким образом, в распределительной таблице будет шесть поставщиков готовой продукции.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.10.

Таблица 11.10

	Номер задачи									
	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
a_1	700	600	300	200	500	800	200	250	600	900
a_2	300	400	600	500	700	300	600	450	450	300
a_3	600	700	1000	300	800	500	500	300	750	600

	Номер задачи									
	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
c_1	5	2	7	6	8	7	6	4	7	5
c_2	7	4	6	3	3	5	4	5	5	3
c_3	4	3	2	5	5	6	7	8	9	4
b_1	350	500	500	350	600	650	150	200	500	450
b_2	550	300	700	150	400	250	400	400	700	150
b_3	250	800	400	250	750	350	350	200	150	750
b_4	650	200	450	450	350	550	700	400	650	550
c_{11}	7	4	4	2	5	3	5	9	7	3
c_{12}	8	2	5	4	2	8	4	3	5	6
c_{13}	7	6	7	3	3	5	2	4	9	4
c_{14}	9	8	9	7	4	4	8	6	3	9
c_{21}	8	5	7	6	3	9	3	3	8	2
c_{22}	5	7	4	8	8	3	2	2	4	5
c_{23}	3	3	9	4	6	7	5	5	3	8
c_{24}	8	9	7	2	5	6	9	3	2	4
c_{31}	7	4	8	9	6	4	6	4	5	3
c_{32}	4	8	2	5	9	8	2	7	4	7
c_{33}	3	6	3	3	7	3	5	9	6	4
c_{34}	7	2	8	8	2	5	7	6	7	9
Δc_1	6	3	2	4	4	4	4	4	4	3
Δc_2	3	5	6	3	2	6	7	7	5	6
c_4	10	3	11	5	9	6	3	8	6	4
c_{41}	13	7	12	4	8	3	6	9	3	7
c_{42}	13	9	15	6	17	7	4	10	8	2
c_{43}	10	4	8	3	16	4	2	12	2	4
c_{44}	14	2	15	8	10	8	7	16	7	8

141—150. Студенческие отряды СО-1, СО-2 и СО-3 численностью в a_1, a_2 и a_3 человек принимают участие в сельскохозяйственных работах. Для уборки картофеля на полях $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$ необходимо выделить соответственно b_1, b_2, b_3 и b_4 человек. Производительность труда студентов зависит от урожайности картофеля, а также от состава отряда и характеризуется для указанных отрядов и полей элементами матрицы $[p_{ij}]_{3\times4}$ (в центнерах на человека за рабочий день). Требуется:

1) распределить студентов по полям так, чтобы за рабочий день было убрано максимально возможное количество картофеля;

2) определить, сколько центнеров картофеля будет убрано с четырех полей при оптимальном распределении студентов.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.11.

Таблица 11.11

	Номер задачи									
	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
a_1	40	35	25	20	45	30	25	30	35	20
a_2	30	40	30	45	15	25	35	40	25	35
a_3	25	55	35	25	30	45	50	20	40	55
b_1	15	60	22	30	20	32	30	14	28	36
b_2	35	25	15	14	22	24	18	26	15	32
b_3	21	30	23	26	18	28	40	16	37	24
b_4	24	15	30	20	30	16	22	34	20	18
p_{11}	9	6	8	7	4	9	6	5	7	6
p_{12}	7	5	4	6	5	7	9	8	4	5
p_{13}	5	4	7	9	6	8	6	4	6	9
p_{14}	5	9	6	5	6	4	8	7	5	8
p_{21}	6	4	7	9	6	6	5	9	7	6
p_{22}	8	6	9	5	7	6	9	8	5	4
p_{23}	5	7	8	6	4	7	8	5	6	8
p_{24}	7	5	6	7	9	5	7	9	8	6
p_{31}	9	8	9	4	7	4	5	7	9	9
p_{32}	6	4	7	8	6	7	4	9	4	8
p_{33}	8	9	5	5	8	9	6	8	7	4
p_{34}	5	6	8	9	4	5	8	6	4	7

ЗАДАНИЕ № 5

Тема: «Дискретное программирование»

151—160. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено b_1 тыс. ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади в b_2 кв. м. Предприятие может заказать машины типа A стоимостью a_{11} тыс. ден. ед., занимающие площадь (с учетом проходов)

a_{21} кв. м и выпускающие c_1 ед. продукции за смену, и машины типа $Б$ стоимостью a_{12} тыс. ден. ед., занимающие площадь a_{22} кв. м и обеспечивающие выпуск c_2 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа A можно заказать не более b_3 шт. Требуется:

1) составить математическую модель задачи, пользуясь которой, можно найти план приобретения машин, учитывающий возможности предприятия и обеспечивающий наивысшую производительность нового участка;

2) пользуясь одним из методов целочисленного линейного программирования, найти оптимальный план приобретения оборудования.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.12.

Таблица 11.12

	Номер задачи									
	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
b_1	30	20	272	36	80	49	50	48	24	72
b_2	850	660	27	672	5200	2128	3875	2604	984	1968
b_3	4	3	8	5	7	5	9	11	10	7
a_{11}	5	5	17	6	8	7	5	4	2	8
a_{12}	3	2	52	3	5	3	3	3	4	4
a_{21}	85	55	3	32	208	112	155	124	41	82
a_{22}	111	102	3	91	505	228	543	363	322	191
c_1	9	8	6	7	10	10	8	7	4	10
c_2	7	5	9	10	13	12	13	12	14	13

161—170. Из Минска в Могилев необходимо перевезти оборудование трех типов: b_1 ед. типа A, b_2 ед. типа $Б$ и b_3 ед. типа $В$. Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта: T_1 и T_2. На единицу транспорта вида T_1 оборудования типа A может быть погружено не более a_{11} ед., оборудования типа $Б$ — не более a_{21} ед., оборудования типа $В$ — не более a_{31} ед.; на единицу транспорта вида T_2 — не более a_{12}, a_{22}, a_{32} ед. оборудования соответственно типа A, $Б$ и $В$. Сменные затраты, связанные с эксплуатацией единицы транспорта вида T_1, составляют c_1 ден. ед., единицы транспорта вида T_2 — c_2 ден. ед. Требуется:

1) составить математическую модель задачи, позволяющую установить количество транспортных единиц того и другого вида, необходимое для перевозки оборудования с минимальными затратами;

2) пользуясь одним из методов целочисленного линейного программирования, найти оптимальный план заказывания транспорта.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.13.

Таблица 11.13

	Номер задачи									
	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
b_1	20	69	555	92	1953	594	22	50	40	138
b_2	40	84	138	128	147	24	560	4060	468	60
b_3	968	1911	135	686	126	105	138	20	20	2090
a_{11}	4	3	111	4	279	27	2	10	8	23
a_{21}	4	21	6	8	7	3	28	290	36	5
a_{31}	44	147	9	98	9	21	23	1	1	95
a_{12}	1	16	28	23	100	158	3	3	2	6
a_{22}	3	4	23	12	21	2	177	357	49	4
a_{32}	177	304	12	39	10	5	6	4	4	276
c_1	6	4	13	12	12	3	4	4	7	6
c_2	10	12	10	11	9	6	9	3	5	10

171—180. Для выполнения работ P_1, P_2 и P_3 сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок A и $Б$ стоимостью соответственно c_1 и c_2 ден. ед. каждый. С использованием новой техники необходимо выполнить не менее b_1 условных единиц работы P_1, не менее b_2 условных единиц работы P_2 и не менее b_3 условных единиц работы P_3. За рассматриваемый промежуток времени с использованием трактора марки A можно выполнить a_{11} условных единиц работы P_1, a_{21} работы P_2 или a_{31} работы P_3; с использованием трактора марки $Б$ — a_{12} условных единиц работы P_1, a_{22} работы P_2 или a_{32} работы P_3. Требуется:

1) составить математическую модель задачи, позволяющую найти такой вариант приобретения тракторов той и другой марки, при котором будут выполнены все

необходимые работы, а затраты на новую технику будут минимальными;

2) одним из методов целочисленного линейного программирования найти оптимальный вариант приобретения тракторов.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.14.

Таблица 11.14

	Номер задачи									
	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
b_1	20	45	63	77	2020	1357	92	60	3025	138
b_2	190	138	147	40	104	84	3712	1128	140	8460
b_3	88	1215	588	138	20	39	56	105	20	110
a_{11}	4	9	9	7	404	59	4	3	605	23
a_{21}	19	6	7	2	8	21	232	141	10	705
a_{31}	4	81	42	23	1	3	8	21	1	5
a_{12}	1	2	3	12	105	318	23	14	186	6
a_{22}	15	23	21	12	10	4	357	98	12	574
a_{32}	15	118	49	6	4	6	3	5	4	14
c_1	3	4	8	1	4	2	24	6	8	3
c_2	5	3	6	2	3	6	22	12	6	5

ЗАДАНИЕ № 6

Тема: «Выпуклое программирование»

181—210. Предприятие выпускает изделия *А* и *Б*, при изготовлении которых используется сырье C_1 и C_2. Известны запасы b_i ($i = 1, 2$) сырья, нормы a_{ij} ($j = 1, 2$) его расхода на единицу изделия, оптовые цены p_j изделий и их плановая себестоимость c_j^0. Как только объем выпускаемой продукции перестает соответствовать оптимальным размерам предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведет к повышению себестоимости продукции, и в первом приближении фактическая себестоимость c_j описывается функцией $c_j = c_j^0 + c_j' x_j$, где c_j' — некоторая постоянная величина. При поиске плана выпуска изделий, обеспечивающего предприятию наивысшую прибыль в

Таблица 11.15

Номер задачи	b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	$c'_1 = c'_2$
181	90	88	13	6	8	11	12	10	7	8	0,2
182	30	60	5	2	8	11	8	7	6	4	0,1
183	60	10	11	8	1	2	10	11	7	9	0,1
184	14	42	1	4	7	3	15	13	14	11	0,2
185	7	10	1	1	1	2	12	11	9	10	0,2
186	51	105	5	13	15	7	15	13	13	10	0,1
187	40	84	4	7	12	7	11	17	9	14	0,2
188	13	10	2	3	2	1	14	16	12	13	0,2
189	72	10	9	8	1	2	23	19	20	13	0,3
190	84	31	7	12	5	3	21	27	15	24	0,3
191	15	52	2	1	4	13	8,6	5,4	5	4,6	0,2
192	22,5	104	3	1,5	8	26	5	4	2,25	3,25	0,125
193	30	102	4	2	6	17	12	14	8	12	0,2
194	51	105	3	8,5	14	7	12	8	5	4,5	0,25
195	45	136	6	3	8	17	13	12	7,4	7,2	0,4
196	7,5	68	1	0,5	7	8,5	12,75	16	10	14	0,125
197	60	125	8	4	11	15	8	9	4,8	5,4	0,2
198	12	82,5	1,6	0,8	5,5	7,5	17	22,5	11	17	0,25
199	75	228	10	5	12	19	12	20	6,4	11,2	0,4
200	37,5	114	5	2,5	6	9,5	15,5	21,75	12,75	18,5	0,125
201	90	260	12	6	13	20	6	8	3,6	2,8	0,2
202	22,5	130	3	1,5	6,5	10	17	18,5	12	11	0,25
203	12	60	1	2	10	6	5	8	2,6	2,4	0,4
204	18	30	1,5	3	5	3	6,25	6,25	5	4	0,125
205	24	80	2	4	10	8	21	18,6	19	16,2	0,2
206	30	40	2,5	5	5	4	4	7	1	3	0,25
207	36	10	3	6	1	1	8	6	2,4	2	0,4
208	42	20	3,5	7	2	2	4	2,25	2	0,5	0,125
209	48	140	4	8	14	10	15,6	23,8	12	22,2	0,2
210	54	70	4,5	9	7	5	9	5	4	2	0,25

условиях нарушения баланса между объемом выпуска и оптимальными размерами предприятия, целевая функция принимает вид $f = (p_1 - (c_1^0 + c_1' x_1))x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2' x_2))x_2$, а ограничения по сырью $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le$ $\le b_2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Требуется:

1) составить математическую модель задачи применительно к числовым данным выполняемого варианта;

2) графическим методом решить полученную задачу и сформулировать ответ в экономических терминах в соответствии с условиями задачи.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.15.

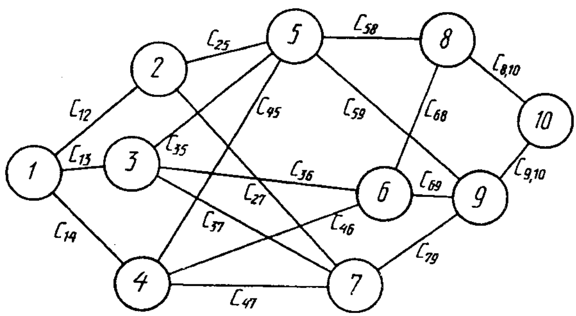
ЗАДАНИЕ № 7

Т е м а: **«Динамическое программирование»**

211—220. На данной сети дорог (рис. 11.1) имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта *1* в пункт *10*. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1) методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта *1* в пункт *10* и соответствующие ему затраты;

2) выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт *10* и указать отвечающие им минимальные затраты на доставку.



Р и с. 11.1

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.16.

Таблица 11.16

Тариф	Номер задачи									
	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
c_{12}	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4
c_{13}	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6
c_{14}	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1
c_{25}	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3
c_{27}	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5
c_{35}	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7
c_{36}	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3
c_{37}	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6
c_{45}	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2
c_{46}	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5
c_{47}	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9
c_{58}	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1
c_{59}	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8
c_{68}	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2
c_{69}	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3
c_{79}	4	1	5	4	9	2	8	6	1	5
$c_{8,10}$	3	7	9	6	2	5	1	7	9	3
$c_{9,10}$	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8

221—230. Для реконструкции и модернизации производства на n предприятиях выделены денежные средства c. По каждому из n предприятий известен возможный прирост $g_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x $(0 \le x \le c)$. Требуется:

1) распределить средства c между предприятиями так, чтобы суммарный прирост выпуска продукции на всех n предприятиях достиг максимальной величины $f_n(c)$ (этот основной результат задачи получить для $c = 100$ млн ден. ед. и $n = 4$);

2) используя выполненное решение основной задачи, найти: а) оптимальное распределение 100 млн ден. ед. между тремя предприятиями; б) оптимальное распределение 80 млн ден. ед. между тремя предприятиями.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.17.

Таблица 11.17

Номер задачи	Пред-приятие	Прирост выпуска продукции на i-м предприятии $g_i(x)$, млн ден.ед.	Часть средств, выделяемых предприятиям, млн ден. ед.				
			20	40	60	80	100
221	№ 1	$g_1(x)$	9	18	24	38	50
222			9	17	29	38	47
223			7	29	37	41	59
224			9	20	35	44	57
225			9	18	29	41	60
226			11	21	40	54	62
227			12	26	40	60	72
228			14	24	37	45	58
229			16	28	36	49	60
230			12	28	39	47	69
221	№ 2	$g_2(x)$	11	19	30	44	59
222			11	34	46	53	75
223			9	19	28	37	46
224			12	25	34	46	57
225			8	19	30	47	58
226			13	20	42	45	61
227			16	21	36	49	63
228			12	30	42	58	71
229			10	29	42	50	74
230			14	26	40	51	68
221	№ 3	$g_3(x)$	16	32	40	57	70
222			13	28	37	49	61
223			17	27	37	48	66
224			11	20	32	48	61
225			12	25	51	58	69
226			12	22	34	55	60
227			9	17	35	51	65
228			13	25	45	62	70
229			15	27	46	58	65
230			11	24	43	51	68
221	№ 4	$g_4(x)$	13	27	44	69	73
222			12	35	40	54	73
223			16	30	42	65	81
224			14	23	40	50	58
225			7	15	52	59	60
226			10	27	33	57	69
227			15	25	51	62	76
228			7	33	46	60	68
229			17	23	38	53	67
230			16	21	36	49	72

231—240. В начале планового периода продолжительностью N лет имеется оборудование возраста t. Известны: стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием этого оборудования; ежегодные расходы $v(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость s; стоимость p нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования). Требуется:

1) пользуясь функциональными уравнениями, составить матрицу максимальных прибылей $f_n(t)$ за N лет;

2) сформировать по матрице максимальных прибылей оптимальные стратегии замены оборудования данных возрастов t и t_1 лет в плановом периоде продолжительностью соответственно N и N_1 лет.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 11.18 и 11.19.

Таблица 11.18

	Номер задачи									
	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
N	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
N_1	8	6	7	8	6	9	8	7	9	6
t	7	7	8	6	8	7	6	9	6	9
t_1	1	4	5	5	4	6	5	4	8	3
s	0	2	2	0	3	0	5	2	0	1
p	10	11	14	10	10	8	17	12	6	13

Таблица 11.19

Номер задачи	Параметр	Возраст оборудования t										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
231	$r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
232		22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18
233		25	24	24	23	22	21	21	21	21	20	20
234		28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21
235		21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15
236		24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
237		28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21
238		20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13
239		26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
240		23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18

Окончание табл. 11.19

Номер задачи	Параметр	Возраст оборудования t										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
231	$v(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
232		12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18
233		13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20
234		16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21
235		11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
236		13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
237		15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
238		8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
239		15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
240		11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. (12; 6), 840. **1.2.** (500; 0; 500), 1 100 000. **1.3.** (2; 2), 2,2. **1.4.** (7; 5), 7722. **1.5.** (1; 5; 6), 2500. **1.6.** (9; 0; 45; 41; 30; 0), 486. **1.16.** (4; 3), 43. **1.17.** (800; 100), 19. **1.18.** (16,93; 12,9), 3839. **1.19.** (0; 3), 3; (6; 1), 13. **1.20.** (2,5; 3,5), 12. **1.21.** (–10; –6), 43. **1.22.** (1; 19/7), 23. **1.23.** Нет решения. **1.24.** $Z_{\min} \to -\infty$. **1.25.** Нет решения. **1.26.** (8; 9), 60; (2,6; 2,8), 19. **1.27.** Точки отрезка с концами (0; 2), (2,4; 0,8), 8. **1.28.** (9; 8), 42; (2; 3), 13. **1.54.** а) (40; 16; 0; 6); б) (4; 2; 24; 0; 8); в) (0; 0; 4; 0; 3; 9); г) (0; 0; 124; 140; 0; 0; 0; 12; 5; 58). **1.55.** а) (0; 0; 0; 7; 12; 10); б) (0; 0; 0; 0; 24; 12; 35); в) (0; 0; 6; 6; 1; 5); г) (4; 5; 0; 3; 0; 0; 7). **1.57.** (0; 12), 48. **1.58.** (10/3; 8/3), 46. **1.59.** (3/2; 3), 21. **1.60.** (3; 7), –4. **1.61.** (3; 2), 26. **1.62.** (9/5, 2/5), 68/5. **1.63.** (0; 2), 18. **1.64.** (3/2; 2), 17. **1.65.** Точки отрезка с концами (0; 5/2), (3; 1), 5. **1.66.** $Z_{\min} \to -\infty$. **1.67.** (1; 0), –12. **1.68.** Нет решения. **1.69.** (2; 0; 1), 3. **1.70.** (5; 0; 2), 18. **1.71.** (0; 0; 15), 45.

Глава 2

2.3. б) (0; 0; 6; 0; 9; 1), (6; 0; 0; 1; 2; 0), 36; в) (0; 0; 0; 1; 0; 0), (0,875; 0,4286; 0; 4; 5,4286; 0), 6; г) (1; 2; 3; 0; 0; 0; 0), (1,5; 0; 0,11; 0,06; 0; 0; 0), 25; д) нет решения; е) (2; 0; 18; 0; 0), (3; 1; 0; 7; 0), 76.

Глава 3

3.1. $\alpha = -2$, $\beta = 2$. **3.2.** $\alpha = -5$, $\beta = 8$. **3.3.** $\alpha = \beta = 0$. **3.8.** а) (2/5; 0; 3/5), (1/5; 4/5; 0), 17/5; б) (0; 3/5; 2/5; 0),(0; 3/5; 2/5; 0), 3; в) (3/5; 2/5; 0), (4/5; 1/5; 0), –24/5; г) (2/7; 0; 0; 5/7), (0; 5/7; 0; 2/7), 45/7; д) (19/35; 6/35; 10/35), (9/35; 14/35; 12/35), 18/35; е) (1/2; 0; 1/2), (1/2; 1/2; 0), 1/2; ж) (1/7; 6/7; 0), (3/7; 4/7; 0), 4/7; з) (1/2; 1/2; 0), (3/4; 0; 0; 1/4), 1/2; и) (3/8; 3/8; 1/4), (1/4; 1/2; 1/4), 3/2. **3.9.** а) (3/8; 0; 5/8; 0), (1/4; 3/4; 0), 3/4; б) (2/3; 1/3; 0; 0), (2/3; 1/3; 0; 0), 7/3; в) (4/7; 3/7; 0), (0; 0; 1/7; 6/7; 0), 18/7; г) (0; 1/4; 0; 3/4), (0; 5/8; 0; 3/8), 15/4; д) (0; 4/5; 1/5; 0; 0), (1/5; 0; 0; 4/5), 31/5; е) (0; 5/8; 0; 3/8), (0; 5/8; 0; 3/8), 25/8. **3.10.** (8/27; 3/27; 7/27; 9/27), (5/18; 7/18; 3/18; 3/18), 5/9. **3.11.** а) (9/35; 16/35; 1/35; 8/35; 1/7); б) (3/35; 1/5; 3/7; 1/7; 1/7). **3.16.** На участке *Б*. **3.17.** Продукции *А* — 50 ед., продукции *Б* — 70 ед.; прибыль 750 ед. **3.18.** Запасать 8 т; минимальные затраты

60 ед. **3.20.** 3/4 площади отвести под культуру *I*, 1/4 — под культуру *II*; максимальная прибыль 15/4. **3.21.** Во втором режиме работать 40 % времени, в третьем — 60 %; наибольший доход 19/5. **3.22.** Ежедневно следует производить 2548,3 ед. продукции *I* и 3522,7 ед. продукции *II*; наибольшая прибыль 482,58.

Глава 4

4.10. Орграф содержит контуры $x_1x_4x_3x_5x_1$ и $x_2x_1x_4x_3x_5x_2$. **4.16.** 13; (*1; 3*), (*1; 4*), (*2; 5*), (*2; 8*). **4.17.** 9; (*1; 2*), (*1; 3*), (*4; 9*), (*6; 3*), (*6; 7*). **4.18.** 19; (*1; 2*), (*1; 3*), (*1; 4*), (*1; 5*). **4.19.** 29; (*4; 7*), (*5; 7*), (*6; 7*). **4.20.** 17; (*1; 2*), (*1; 3*), (*1; 4*). **4.21.** 16; (*3; 6*), (*4; 6*), (*8; 6*). **4.22.** а) $t_{\min} = 5$; б) $t_{\min} = 4$. **4.24.** а) 770; б) 570; в) 640; г) 2535; д) 340. **4.25.** а) Контуры *2—5—3—2* и *3—7—5—3*; *9* — тупиковое событие; *6* — хвостовое событие; б) контур *2—3—4—2*; *6* — тупиковое событие. **4.32.** а) 19; 24; 29; $t(L_i)$: 24; 17; 29; 17; 19; 31; критический путь *1—3—4— 5—6*; $R(L_i)$: 7; 14; 2; 14; 12; б) 50; 49; 73; $t(L_i)$: 79; 61; 67; 76; 73; 58; 64; критический путь *1—2— 3—4—5—6*; $R(L_i)$: 18; 12; 3; 6; 21; 15. **4.33.** а) *1—3—4—5—6—8—9*, $t_{\text{кр}} = 62$; б) *1—2—4—7—8—10*, $t_{\text{кр}} = 48$; в) *1—3—6—8—9*, $t_{\text{кр}} = 32$; г) *1—4—6—8—10*, $t_{\text{кр}} = 53$; **4.37.** а) *1—2—5—7—10—12*, $t_{\text{кр}} = 76$; б) *1—3—5—7—8*, $t_{\text{кр}} = 35$.

Глава 5

5.11. а) 765; б) 670; в) 655; г) 1540; д) 665; е) 2945. **5.12.** 2590. **5.13.** 4626. **5.14.** 825. **5.15.** 585 270. **5.16.** а) 15 275; б) 18 030. **5.17.** 1810. **5.18.** а) 670; б) 2870; в) 4180; г) 44 700. **5.19.** 25 511. **5.20.** 695.

Глава 6

6.1. (5; 2), 17. **6.2.** (1; 5), 6. **6.3.** (5; 0), 10. **6.4.** (1; 0), 7. **6.5.** (2; 0), 2. **6.6.** (5; 0), 5. **6.7.** (2; 5), 27. **6.8.** (3; 2), 7. **6.9.** (3; 4), 26. **6.10.** (4; 4), 20. **6.11.** Выпускать только шкафы в количестве 283 шт.; максимальная прибыль 3396 ден. ед. **6.12.** Скорых 3, пассажирских 7; максимальное число перевозимых пассажиров 7674 чел. **6.13.** Необходимо реализовать первый и третий проекты. При этом максимальная прибыль от реализации проектов составит 8 млн ден. ед. **6.14.** Обед, состоящий из блюд № 1, 5, 7, обеспечивает потребность в каждом питательном веществе и имеет минимальную стоимость 8 ден. ед. **6.15.** 3 ед. груза 1-го вида и 6 ед. 2-го; максимальная стоимость 102 ден. ед. **6.16.** Использовать 7 ед. оборудования 3-го типа и 15 ед. 4-го; наивысший эффект 96 ед.

Глава 7

7.1. 0.**7.2.** $\sqrt{2}/2$. **7.3.** 5. **7.4.** 98/13. **7.5.** $\sqrt{2}/3$. **7.7.** $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, $\sqrt{3}$. **7.8.** $(2y;\ 2x)$. **7.9.** $\operatorname{arctg}(1/7) \approx 8°$. **7.10.** $\sqrt{29}/2 \approx 2{,}69$.

7.19. $(18/\sqrt{13}; 12/\sqrt{13})$ — точка максимума. **7.20.** (0; 6) — точка максимума. **7.21.** $(5-3\sqrt{0,5}; 3+3\sqrt{0,5})$ — точка минимума, $(5+30/\sqrt{34}; 3+18/\sqrt{34})$ — точка максимума. **7.22.** (2; 3). **7.23.** (5; 2). **7.24.** (0,5; 0,5) — точка максимума. **7.25.** $(3/\sqrt{13}; 2/\sqrt{13})$ — точка максимума, $(-3/\sqrt{13}; -2/\sqrt{13})$ – точка минимума. **7.26.** (18/13; 12/13) — точка минимума. **7.27.** (1; –2; 2) — точка максимума; (–1; 2; –2) — точка минимума. **7.28.** (2; 4; 6) — точка максимума. **7.29.** (1; 1; 1) — точка максимума. **7.30.** $(12-\sqrt{18})/7$; $(12+\sqrt{18})/7$. **7.31.** 4; 112/27. **7.32.** (5; 6). **7.33.** (3; 9). **7.34.** (8; 9). **7.35.** (9; 2). **7.36.** (6; 8). **7.37.** (6; 1). **7.38.** (52/25; 111/25). **7.39.** (135/37; 70/37). **7.40.** (1,5; 0,4). **7.41.** (7/8; 5/8; 15/8). **7.42.** (3,20; 3,84). **7.43.** (9,1905; 9,0796). **7.44.** (7,3715; 6,7572). **7.45.** (7,6487; 5,7698). **7.46.** (6; 3). **7.47.** (2; 11). **7.48.** (2; 11). **7.49.** (2; 5). **7.50.** (2; 5).

Глава 8

8.1. *1—3—5—8—10*; 13; *1—3—4—8—11—13*; 15. **8.2.** *1—3—5—9—12*; 14; *1—3—4—9—12*; 13. **8.3.** *1—2—4—7—11—13*; *1—3—5—7—11—13*; 42; *1—2—6—8—11*; *1—4—5—9—11*; 19. **8.4.** *1—2—5—9—10*; 27; *1—2—7—10*; 27. **8.5.** 4200; (0; 20; 100; 100). **8.6.** 45; (0; 0; 40; 20). **8.7.** 47; (0; 40; 20). **8.8.** 126; (0; 8; 12). **8.9.** 17; (2; 3; 2), или (2; 4; 1), или (3; 2; 2). **8.10.** а) 160; (2; 0; 1); б) 130; (2; 0; 0); в) 95; (1; 0; 1). **8.11.** а) 170; (1; 1; 2), или (1; 3; 1), или (1; 5; 0); б) 120; (0; 2; 0) или (4; 0; 0). **8.12.** а) Замена на 1, 3, 5 и 7-м годах; 232; б) замена на 1-м и 6-м годах; 168. **8.13.** а) Замена на 1-м и 4-м годах; 32; б) замена на 1, 3 и 5-м годах; 30. **8.14.** См. табл.

Начальный запас	Минимальные затраты	Оптимальное управление
0	136	(200; 0; 200; 0)
50	144	(150, 0; 200; 0)
100	152	(100; 0; 200; 0)
150	136	(0; 250; 0; 0)
200	112	(0; 0; 200; 0)
250	142	(0; 0; 150; 0)
300	143	(0; 0; 0; 100)

Минимальные суммарные затраты в 112 ден. ед. предприятие несет при начальном запасе в 200 ед. **8.15.** а) 27; (5; 4; 3; 3;), или (5; 6; 3; 3), или (5; 5; 4; 3); б) 58; (3; 3; 2; 3), или (3; 3; 3; 3); в) 1,5; (4; 4; 3; 3). **8.16.** 17 100; (0; 15; 140; 145; 0). **8.17.** 30; $x_0 = 7$; (0; 0; 1; 0; 0) или $x_0 = 8$; (0; 0; 0; 0; 0). **8.18.** а) 26; (1; 0; 0; 0; 2); б) 41; (2; 0; 0; 0; 0). **8.19.** а) 13; (0; 1; 2; 2; 1) или (1; 1; 1; 1; 1); б) 12; (0; 1; 2; 1; 1). **8.20.** 42; (2; 4; 3), или (3; 6; 0), или (6; 0; 3).

Глава 9

9.1. а) $\begin{bmatrix}1{,}8 & 0{,}44\\ 2 & 1{,}6\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}8 & 1{,}8\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1{,}1299 & 0{,}565\\ 0{,}0339 & 1{,}0169\end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix}1{,}0101 & 0{,}5154\\ 0 & 1{,}0204\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}1{,}0331 & 0{,}0103\\ 0{,}2066 & 1{,}0021\end{bmatrix}$.

9.2. а) $\begin{bmatrix}1 & 0{,}54 & 0{,}4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 0{,}8 & 1{,}4\\ 0 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix}1{,}4912 & 0{,}7018 & 0{,}3509\\ 1{,}2281 & 1{,}7544 & 0{,}8772\\ 0{,}3684 & 0{,}5263 & 1{,}2632\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1{,}8 & 2 & 2\\ 0{,}9 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

9.3. а) $\begin{bmatrix}9 & 2{,}2\\ 13{,}4 & 7{,}72\\ 3{,}8 & 2{,}04\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2{,}8 & 3{,}8\\ 4{,}8 & 0{,}8\\ 12{,}4 & 10{,}4\\ 4{,}8 & 5{,}8\end{bmatrix}$; в) $[9{,}1073 \;\; 6{,}5537]$;

г) $[3{,}0303 \;\; 2{,}5665]$; д) $[5{,}3719 \;\; 1{,}0537]$; е) $\begin{bmatrix}0 & 1{,}8 & 8\\ 5 & 6{,}7 & 2\end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix}7{,}2 & 8{,}86 & 14{,}13\\ 4{,}3 & 12{,}64 & 10{,}62\\ 1{,}4 & 3{,}42 & 9{,}21\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix}11{,}9123 & 7{,}0175 & 7{,}5088\\ 3{,}3333 & 3{,}3333 & 6{,}6667\\ 6{,}7018 & 3{,}8596 & 3{,}9298\end{bmatrix}$;

и) $\begin{bmatrix}17{,}1 & 19 & 28\\ 6{,}3 & 7 & 8\\ 9{,}6 & 4 & 4\\ 4{,}8 & 2 & 2\\ 10{,}8 & 12 & 16\\ 10{,}8 & 12 & 20\end{bmatrix}$.

9.4. а) $L^* = 4010{,}363$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 55{,}7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9{,}33 \\ 0 \end{bmatrix}$; б) $L^* = 11\,059{,}6$,

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 28{,}9 \\ 1{,}6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; в) $L^* = 1647{,}924$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 41{,}2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = 6{,}1$;

г) $L^* = 15{,}334$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 19{,}998 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = 0{,}3$; д) $L^* = 474{,}5184$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 237{,}3 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{u} = 1{,}9$; е) $L^* = 6995$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 90{,}55 \\ 0 \\ 41{,}13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$; ж) $L^* = 4859{,}449$,

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 43{,}2801 \\ 23{,}8173 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6{,}670 \\ 0{,}072 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; з) $L^* = 41\,491{,}88$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 53{,}23 \\ 123{,}4 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 23 \\ 11{,}6 \\ 0 \end{bmatrix}$; и) $L^* = 67\,361{,}43$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0{,}143 \\ 23{,}16 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 326 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Жордановы исключения и их использование в математическом программировании

1. Виды жордановых исключений

В данной книге в качестве вычислительного аппарата использовались так называемые гауссовы исключения. Однако в последние годы издан ряд учебных пособий, в которых применяется другая вычислительная схема — *жордановы исключения*. Компактность жордановых таблиц и простота их преобразований посредством жордановых исключений обусловливают бóльшую наглядность этой вычислительной процедуры. Рассмотрим суть жордановых исключений и примеры их применения в математическом программировании.

Пусть дана система m линейных функций (форм) $y_1, \ldots, y_m$ с n переменными $x_1, \ldots, x_n$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \tag{1}$$

где a_{ij} — известные числа ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$).

Запишем систему (1) в форме табл. 1, которую в дальнейшем будем называть *жордановой*.

Таблица 1

	x_1	…	x_j	…	x_s	…	x_n
$y_1 =$	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
…	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_i =$	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{is}	…	a_{in}
…	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_k =$	a_{k1}	…	a_{kj}	…	$\boxed{a_{ks}}$	…	a_{kn}
…	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_m =$	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

От табличной записи легко перейти к обычной записи системы. Для этого надо умножить элементы a_{ij} i-й строки на соответствующие переменные x_j, стоящие в верхней заглавной строке, полученные произведения сложить и сумму приравнять y_i.

Выберем из системы (1) какое-либо уравнение, например k-е:

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j, \tag{2}$$

и предположим, что $a_{ks} \neq 0$. А теперь представим схематизированную алгебраическую операцию перераспределения ролей между зависимой переменной y_k и некоторой независимой переменной, например x_s, т. е. операцию решения k-го уравнения (2) относительно переменной x_s:

$$x_s = -\sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{1}{a_{ks}} y_k, \tag{3}$$

подстановки полученного выражения (3) во все остальные уравнения системы (1), приведения подобных членов и записи преобразованной таким образом системы в форме новой жордановой таблицы. Описанную операцию будем называть *шагом обыкновенного жорданова исключения* (шагом ОЖИ), произведенным над табл. 1 с разрешающим элементом a_{ks}, k-й разрешающей строкой и s-м разрешающим столбцом.

Выясним, как преобразуются элементы табл. 1 в результате шага ОЖИ. С этой целью значение x_s из равенства (3) подставим в остальные равенства системы (1) и выполним необходимые преобразования:

$$y_i = \sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} a_{ij} x_j + a_{is} x_s = \sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} a_{ij} x_j + a_{is}\left(-\sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{1}{a_{ks}} y_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} \left(a_{ij} - \frac{a_{is} a_{kj}}{a_{ks}}\right) x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_k. \tag{4}$$

Обозначим в равенстве (4)

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} a_{ks} - a_{is} a_{kj}}{a_{ks}} \quad (i \neq k;\ j \neq s). \tag{5}$$

Тогда система (4) запишется в виде

$$y_i = \sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} b_{ij} x_j + (a_{is}/a_{ks}) y_k \quad (i = 1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, m). \tag{6}$$

Полученную систему (6) вместе с равенством (3) представим в форме жордановой таблицы (табл. 2).

Сопоставив табл. 1 и 2, нетрудно заметить, что один шаг ОЖИ с разрешающим элементом a_{ks} переводит табл. 1 в новую таблицу (табл. 2) по схеме, состоящей из следующих четырех правил:

1) разрешающий элемент заменяется обратной величиной;

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;

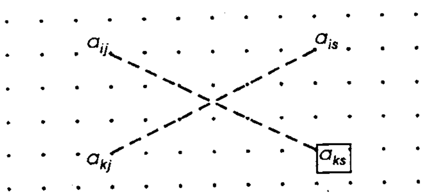
3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент;

4) прочие элементы вычисляются по формуле (5).

Таблица 2

	x_1	...	y_k	...	x_n
$y_1 =$	b_{11}	...	$\frac{a_{1s}}{a_{ks}}$	...	b_{1n}
...	.....	.....	.....	.....	.....
$x_s =$	$-\frac{a_{k1}}{a_{ks}}$	...	$\frac{1}{a_{ks}}$	...	$-\frac{a_{kn}}{a_{ks}}$
...	.....	.....	.....	.....	.....
$y_m =$	b_{m1}	...	$\frac{a_{ms}}{a_{ks}}$	...	b_{mn}

Замечание. На практике при вычислении элементов по формуле (5) удобно пользоваться мнемоническим *правилом прямоугольника*. Элементы, входящие в эту формулу, расположены в вершинах воображаемого «прямоугольника»:



Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий a_{ks} и преобразуемый a_{ij} элементы, назовем *главной*, а другую диагональ — *побочной*. Тогда из формулы (5) непосредственно следует, что преобразованный элемент b_{ij} равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, деленной на разрешающий элемент. Сформулированного правила надо придерживаться независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

Из формулы (5) видно, что если в разрешающей строке некоторый элемент $a_{kj} = 0$, то $b_{ij} = a_{ij}$, т. е. элементы столбца, в котором расположен нулевой элемент разрешающей строки, остаются после шага ОЖИ без изменений. Аналогично: если в разрешающем столбце находится нулевой элемент ($a_{is} = 0$), то вся соответствующая ему строка остается на данном шаге ОЖИ неизменной (т. е. $b_{ij} = a_{ij}$).

Пример 1. Преобразовать систему линейных функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 7x_2 + 4x_3, \\ y_2 &= -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

так, чтобы переменная x_3 стала зависимой, а переменная y_2 — независимой.

Р е ш е н и е. Запишем систему (7) в форме жордановой таблицы (табл. 3) и в качестве разрешающих примем вторую строку и третий столбец. Разрешающим будет элемент –3. Сделав шаг ОЖИ по правилам 1—4, придем к табл. 4. Возвратившись к обычной записи, получим систему

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2/3\,x_1 - 1/3\,x_2 - 4/3\,y_2, \\ x_3 &= -1/3\,x_1 + 5/3\,x_2 - 1/3\,y_2, \end{aligned}\right\}$$

в которой x_3 является зависимой, а y_2 —независимой переменной.

Т а б л и ц а 3

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	2	–7	4
$y_2 =$	–1	5	$\boxed{-3}$

Т а б л и ц а 4

	x_1	x_2	y_2
$y_1 =$	2/3	–1/3	-4/3
$x_3 =$	–1/3	5/3	–1/3

Нередко вместо обыкновенных пользуются так называемыми *модифицированными жордановыми исключениями* (МЖИ), при которых система (1) записывается в форме табл. 5.

Т а б л и ц а 5

	$-x_1$	...	$-x_n$
$y_1 =$	$-a_{11}$	...	$-a_{1n}$
...	.....	.....	.....
$y_m =$	$-a_{m1}$	...	$-a_{mn}$

Один шаг МЖИ преобразует табл. 5 в новую таблицу по тем же правилам 1—4 ОЖИ с незначительным изменением правил 2 и 3:

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знаки.

Пример 2. Преобразовать систему линейных функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + 5x_2 + x_3, \\ y_2 &= -4x_1 \phantom{{}+5x_2} - 3x_3, \\ y_3 &= x_1 - 2x_2 + 6x_3 \end{aligned}\right\}$$

так, чтобы переменная x_1 стала зависимой, а переменная y_2 — независимой.

Решение. Записываем данную систему в форме табл. 6 для МЖИ (см. табл. 5) и преобразовываем ее шагом МЖИ с разрешающими второй строкой и первым столбцом, т. е. с разрешающим элементом 4. В результате приходим к табл. 7, из которой получаем преобразованную систему функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1/2\,y_2 + 5x_2 + 5/2\,x_3, \\ x_1 &= -1/4\,y_2 - 3/4\,x_3, \\ y_3 &= -1/4\,y_2 - 2x_2 + 21/4\,x_3. \end{aligned}\right\}$$

Таблица 6

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1 =$	2	–5	–1
$y_2 =$	$\boxed{4}$	0	3
$y_3 =$	–1	2	–6

Таблица 7

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1 =$	–1/2	–5	–5/2
$x_1 =$	1/4	0	3/4
$y_3 =$	1/4	2	–21/4

Аппарат жордановых исключений может использоваться при решении практически всех типов задач линейной алгебры. Теоретической основой такого использования служит следующая *теорема Стейница:* если в жордановой таблице при $m \leq n$ все строки линейно независимы, то в результате m последовательных шагов жордановых исключений все y_i можно переместить на верх таблицы (в заглавную строку).

Опираясь на эту теорему, можно решать задачи: на установление линейной зависимости векторов системы; нахождение ранга системы векторов; выделение базиса из данной системы векторов; нахождение всех базисов данной системы векторов; разложение векторов по данному базису; нахождение ранга матрицы; вычисление матрицы, обратной данной; решение систем линейных уравнений; нахождение всех базисных решений системы линейных уравнений; выделение неотрицательных базисных решений; на эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств.

При решении всех перечисленных типов задач с одинаковым успехом могут использоваться как обыкновенные, так и модифицированные жордановы исключения.

Мы остановимся на решении только тех задач, которые наиболее часто используются в математическом программировании.

2. Определение ранга матрицы. Обращение матриц

По определению, *рангом матрицы* $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ называется максимальное число линейно независимых строк этой матрицы.

Покажем, как ранг матрицы A можно вычислить методом жордановых исключений. Запишем матрицу A в форме табл. 8 и будем преобразовывать ее шагами ОЖИ до тех пор, пока это возможно. При этом порядок выбора разрешающих элементов значения не имеет. Предположим, что в результате мы получили табл. 9.

Таблица 8

	x_1	$\dots$	x_n
$y_1 =$	a_{11}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}

Таблица 9

	y_1	$\dots$	y_r	x_{r+1}	$\dots$	x_n
$x_1 =$	b_{11}	$\dots$	b_{1r}	$b_{1,\,r+1}$	$\dots$	b_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_r =$	b_{r1}	$\dots$	b_{rr}	$b_{r,\,r+1}$	$\dots$	b_{rn}
$y_{r+1} =$	$b_{r+1,1}$	$\dots$	$b_{r+1,\,r}$	0	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	b_{m1}	$\dots$	b_{mr}	0	$\dots$	0

Из табл. 9 видно, что $y_{r+1}, \dots, y_m$ не могут быть переброшены на верх таблицы потому, что для этого пришлось бы брать в качестве разрешающих элементов нули, чего делать нельзя. Таким образом, удалось перебросить на верх таблицы r игреков. По теореме Стейница это означает, что r из данных m строк матрицы A линейно независимы, остальные же строки являются линейными комбинациями этих r строк. Например, $y_m = b_{m1}\, y_1 + \dots + b_{mr}\, y_r$, где $b_{m1}, \dots, b_{mr}$ — коэффициенты линейной комбинации.

Итак, максимальное число линейно независимых строк матрицы A равно r, а это и есть ранг матрицы. Можно сказать иначе: ранг матрицы A равен числу максимально возможных шагов ОЖИ.

Из приведенных рассуждений вытекает следующий практический способ вычисления ранга матрицы: *записав матрицу в форме жордановой таблицы, производят максимально возможное число шагов жордановых исключений; это число и определит ранг данной матрицы*. Может, в частности, оказаться, что на верх таблицы будут переброшены все игреки. Это означает, что ранг равен числу строк данной матрицы.

Пример 3. Определить ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Записываем матрицу в форме жордановой таблицы (табл. 10) и после выполнения двух шагов ОЖИ получаем сначала табл. 11, а затем табл. 12, из которой видно, что y_3 перебросить на верх таблицы нельзя. Итак, удалось сделать только два шага ОЖИ, значит, ранг матрицы равен 2.

Таблица 10

	x_1	x_2	x_3	x_4
$y_1 =$	2	–1	3	4
$y_2 =$	$\boxed{1}$	0	2	–3
$y_3 =$	5	–2	8	5

Таблица 11

	y_2	x_2	x_3	x_4
$y_1 =$	2	$\boxed{-1}$	–1	10
$x_1 =$	1	0	–2	3
$y_3 =$	5	–2	–2	20

Таблица 12

	y_2	y_1	x_3	x_4
$x_2 =$	2	1	1	10
$x_1 =$	1	0	–2	3
$y_3 =$	1	2	0	0

Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* к невырожденной квадратной матрице A, если имеет место равенство

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E, \tag{8}$$

где E — *единичная матрица.*

Покажем, как с помощью жордановых исключений можно находить матрицу, обратную данной. Пусть дана система линейных форм

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (j = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Квадратная матрица $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ этой системы невырожденная, т. е. определитель $|A|$ отличен от нуля.

Запишем систему (9) в форме жордановой таблицы (табл. 13). Поскольку $|A| \neq 0$, то все строки в табл. 13 линейно независимы. Это позволяет за n шагов ОЖИ все игреки перебросить на верх таблицы. Окончательная жорданова таблица после перестановки (если это потребуется) некоторых строк и столбцов примет вид табл. 14.

Таблица 13

	x_1	...	x_n
$y_1 =$	a_{11}	...	a_{1n}
...	...	...	...
$y_n =$	a_{n1}	...	a_{nn}

Таблица 14

	y_1	...	y_n
$x_1 =$	c_{11}	...	c_{1n}
...	...	...	...
$x_n =$	c_{n1}	...	c_{nn}

Покажем, что матрица $C = \left[c_{ij}\right]_{n \times n}$ является обратной матрице A. В самом деле, система (9) может быть записана в матричной форме следующим образом:

$$Y = AX, \tag{10}$$

где $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ — матрица-столбец зависимых переменных $y_1, \dots, y_n$;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$ — матрица-столбец независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Систему линейных функций, заданную табл. 14, можно записать так:

$$X = CY. \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в равенство (10), получим $Y = ACY$, или $EY = ACY$, или

$$AC = E. \tag{12}$$

Заменив в равенстве (11) значение Y выражением (10), будем иметь $X = CAX$, или $EX = CAX$, или

$$CA = E. \tag{13}$$

Объединив равенства (12) и (13), получим

$$AC = CA = E. \tag{14}$$

Сравнивая выражение (14) с определением обратной матрицы (8), заключаем, что $C = A^{-1}$, что и требовалось установить.

Итак, для того *чтобы матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A n-го порядка, надо матрицу A записать в форме жордановой таблицы и выполнить n шагов ОЖИ. Искомая матрица выписывается из последней таблицы. Иногда в этой таблице приходится переставлять местами некоторые строки и столбцы, для того чтобы восстановить натуральный порядок следования индексов (1, 2, 3, ...) у зависимых и независимых переменных. Если разрешающие элементы на каждом шаге ОЖИ брать на главной диагонали в порядке их следования, то указанных перестановок делать не придется.*

Пример 4. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Записываем данную матрицу A в форме жордановой таблицы (табл. 15) и, выбирая разрешающие элементы

Таблица 15

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	$\boxed{1}$	–2	3
$y_2 =$	–1	1	2
$y_3 =$	2	–1	–1

Таблица 16

	y_1	x_2	x_3
$x_1 =$	1	2	–3
$y_2 =$	–1	$\boxed{-1}$	5
$y_3 =$	2	3	–7

на главной диагонали, производим с ними шаги ОЖИ. Последовательно получаем табл. 16, 17 и 18.

Таблица 17

	y_1	y_2	x_3
$x_1 =$	-1	-2	7
$x_2 =$	-1	-1	5
$y_3 =$	-1	-3	$\boxed{8}$

Таблица 18

	y_1	y_2	y_3
$x_1 =$	$-1/8$	$5/8$	$7/8$
$x_2 =$	$-3/8$	$7/8$	$5/8$
$x_3 =$	$1/8$	$3/8$	$1/8$

Из табл. 18 выписываем искомую матрицу:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 5/8 & 7/8 \\ -3/8 & 7/8 & 5/8 \\ 1/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

Читателю предлагается проверить выполнимость равенства (8).

3. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n переменными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i0} \quad (i = \overline{1, m}), \tag{15}$$

ранг которой равен r.

Перепишем систему (15) в форме нуль-равенств:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j) + a_{i0} \quad (i = \overline{1, m})$$

и полученную систему запишем в виде табл. 19 для МЖИ.

Таблица 19

	$-x_1$ ... $-x_n$	1
$0 =$	a_{11} ... a_{1n}	a_{10}
...	. . . .	...
$0 =$	a_{m1} ... a_{mn}	a_{m0}

Таблица 20

	0	...	0	$-x_{r+1}$	...	x_n	1
$x_1 =$	b_{11}	...	b_{1r}	$b_{1,r+1}$	...	b_{1n}	b_{10}
...	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	...
$x_r =$	b_{r1}	...	b_{rr}	$b_{r,r+1}$	...	b_{rn}	b_{r0}
$0 =$	$b_{r+1,1}$	...	$b_{r+1,r}$	0	...	0	$b_{r+1,0}$
...	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	...
$0 =$	b_{m1}	...	b_{mr}	0	...	0	b_{m0}

Над табл. 19 можно произвести лишь r последовательных шагов МЖИ. В результате получится, например, табл. 20.

Система (15) совместна тогда и только тогда, когда для некоторой совокупности значений $x_1, \ldots, x_n$ выполняются одновременно все равенства системы (15), что произойдет тогда и только тогда, когда $b_{r+1,0} = \ldots = b_{m0} = 0$. В этом случае из табл. 20 получаем *общее решение системы* (15):

$$x_k = \sum_{s=1}^{n-r} b_{k,r+s}(-x_{r+s}) + b_{k0} \quad (k = \overline{1, r}). \tag{16}$$

Эту систему называют еще *разрешенным видом системы* (15).

В равенствах (16) переменные $x_1, \ldots, x_r$ называют *базисными*, их совокупность — *базисом системы переменных* $x_1, \ldots, x_n$, а остальные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — *свободными*.

Придавая в равенствах (16) свободным переменным произвольные числовые значения, мы для любой системы значений $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \ldots, x_n = \alpha_n$ получим по формулам (16) соответствующую систему значений базисных переменных:

$$x_k = \sum_{s=1}^{n-r} b_{k,r+s}(-\alpha_{r+s}) + b_{k0} \quad (k = \overline{1, r}),$$

которые в совокупности с выбранными значениями свободных переменных составляют некоторое *частное решение* данной системы (15). Таким путем можно получить бесчисленное множество решений системы (15).

В частном случае, когда $r = n$, через n шагов МЖИ все переменные $x_1, \ldots, x_n$ окажутся в левом заглавном столбце табл. 20, а их место на верху таблицы займут нули, поэтому система (15) будет иметь единственное решение: $x_1 = b_{10}, \ldots, x_n = b_{n0}$. Если же хотя бы один из свободных членов $b_{r+1,0}, \ldots, b_{m0}$ отличен от нуля, система (15) несовместна.

Итак, *для решения системы линейных уравнений ее надо записать в форме жордановой таблицы (например, для МЖИ) и проделать возможное число шагов МЖИ, вычеркивая после каждого шага разрешающий столбец и строки, целиком состоящие из нулевых элементов. Если в процессе МЖИ появится строка, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то данная система несовместна. В противном случае система совместна. При этом она имеет бесчисленное множество решений, если в последней жордановой таблице содержится хотя бы одна свободная переменная, и единственное решение, если таких переменных не окажется.*

Пример 5. Решить систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Запишем данную систему в форме жордановой таблицы (табл. 21).

Т а б л и ц а 21

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	1	2	1	−6	−3
$0 =$	1	$\boxed{1}$	1	−4	0
$0 =$	1	0	1	−2	3

Т а б л и ц а 22

	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	−1	−1	2	−3
$x_2 =$	1	1	−4	0
$0 =$	$\boxed{1}$	1	−2	3

Т а б л и ц а 23

	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	0	0	0
$x_2 =$	0	−2	−3
$x_1 =$	1	−2	3

Выполнив два шага МЖИ (табл. 22, 23), закончим преобразования.

Опуская в табл. 23 строку, состоящую из нулей, выписываем общее решение данной системы: $x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3$, $x_2 = 2x_4 - 3$, в котором свободные переменные x_3 и x_4 могут принимать произвольные числовые значения. Понятно, что система имеет бесчисленное множество решений.

Пример 6. Решить систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \qquad\qquad - x_4 &= 5,\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3,\\ x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 &= 3,\\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Записав данную систему в форме табл. 24 и подвергнув ее четырем шагам МЖИ, приходим к табл. 25, в которой содержится единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Т а б л и ц а 24

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	1	4	0	−1	5
$0 =$	2	−3	1	1	3
$0 =$	1	0	2	−1	3
$0 =$	0	2	−3	2	3

Т а б л и ц а 25

	1
$x_3 =$	3
$x_2 =$	2
$x_1 =$	1
$x_4 =$	4

Пример 7. Решить систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2,\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. В табл. 26—28 приведено решение данной системы.

Таблица 26

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
0 =	$\boxed{1}$	1	1	1
0 =	3	4	5	2
0 =	4	5	6	4

Таблица 27

	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	1	1
0 =	1	2	-1
0 =	$\boxed{1}$	2	0

Таблица 28

	$-x_3$	1
$x_1 =$	-1	1
0 =	0	-1
$x_2 =$	2	0

Из табл. 28 видно, что система несовместна, так как $0 \neq -1$.

4. Нахождение опорных решений системы линейных уравнений

Для математического программирования особый интерес представляют лишь совместные неопределенные системы линейных уравнений, т. е. системы, имеющие бесчисленное множество решений. Общее решение такой системы имеет вид (16), где свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ могут принимать произвольные числовые значения. В математическом программировании большую роль играют *базисные решения* (БР), получаемые из общего решения (16) при нулевых значениях свободных переменных, т. е. решения вида $x_1 = b_{10}, \ldots, x_r = b_{r0}, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, или в векторной записи $(b_{10}, \ldots, b_{r0}, 0, \ldots, 0)$.

В левом заглавном столбце табл. 20 базисные переменные $x_1, \ldots, x_r$ записаны для определенности в порядке возрастания индексов. Этому базису $\{x_1, \ldots, x_r\}$ соответствует написанное выше БР. Такому набору переменных отвечает определенная последовательность выбора разрешающих элементов при жордановых исключениях. Если порядок выбора разрешающих элементов изменить, то изменится и состав переменных в левом заглавном столбце последней жордановой таблицы. Значит, будет получен другой базис системы переменных, а следовательно, и другое БР.

Возникает вопрос: каково максимальное число БР? Базисных решений будет столько, сколько существует базисов системы переменных, а их количество совпадает с числом базисов системы векторов-коэффициентов данной системы линейных уравнений. С определенностью можно сказать, что таких базисов, а следовательно, и БР, будет не более C_n^r, где n — число переменных в системе, а r — ранг упомянутой системы векторов-коэффициентов, или, что то же, матрицы данной системы линейных уравнений.

Почему все-таки не более? Потому, что не любые r векторов данной системы, состоящей из n векторов, обязательно являются линейно независимыми.

На практике при нахождении БР нет необходимости исследовать систему векторов-коэффициентов. Все БР можно найти, перебирая все возможные базисы переменных, и такой перебор быстро и просто позволяют осуществить жордановы исключения.

Пример 8. Найти БР системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad &= 14, \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 7, \\ 2x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. В табл. 29 содержится общее решение данной системы. При $x_2 = 0$ получаем $x_1 = 14$, $x_3 = 7$. Итак, в базисе $\{x_1, x_3\}$ БР найдено: (14; 0; 7).

Т а б л и ц а 29

	$-x_2$	1
$x_1 =$	3	14
$x_3 =$	$\boxed{2}$	7

Т а б л и ц а 30

	$-x_3$	1
$x_1 =$		7/2
$x_2 =$		7/2

Т а б л и ц а 31

	$-x_1$	1
$x_2 =$		14/3
$x_3 =$		−7/3

В табл. 29 содержатся две строки, следовательно, ранг r данной системы равен 2, а $n = 3$, поэтому система может иметь не более $C_3^2 = 3$ БР. Кроме базиса $\{x_1, x_3\}$ другими базисами системы переменных могут быть группы x_1, x_2 и x_2, x_3. Проверим это с помощью МЖИ. Подвергнув табл. 29 шагу МЖИ с разрешающим элементом 2, придем к табл. 30, отвечающей базису $\{x_1, x_2\}$. Из этой таблицы выписываем еще одно БР: (7/2; 7/2; 0). Если теперь табл. 29 подвергнуть шагу МЖИ с разрешающим элементом 3, то получим табл. 31, из которой находится и третье БР, соответствующее базису $\{x_2, x_3\}$: (0; 14/3; −7/3).

Пример 9. Найти БР системы

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 9x_3 \qquad &= 4, \\ x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Данная система уже разрешена относительно базиса $\{x_2, x_4\}$. Придавая нулевые значения свободным переменным x_1 и x_3, сразу получаем одно из БР: (0; 4; 0; 2). В данном случае $r = 2$, $n = 4$, поэтому всего может быть не более $C_4^2 = 6$ БР.

Кроме базиса $\{x_2, x_4\}$ другими базисами могут оказаться следующие пары переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4. Для выяснения этого обстоятельства и нахождения БР запишем данную систему в виде жордановой таблицы (табл. 32) и подвергнем ее шагам МЖИ.

Т а б л и ц а 32

	$-x_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	3	−9	4
$x_4 =$	$\boxed{1}$	−3	2

Т а б л и ц а 33

	$-x_4$	$-x_3$	1
$x_2 =$	−3	0	−2
$x_1 =$	1	−3	2

Взяв разрешающим элемент 1 и сделав с ним шаг МЖИ, приходим к табл. 33, в которой содержится БР (2; –2; 0; 0), отвечающее базису $\{x_1, x_2\}$.

Нетрудно видеть, что шагу МЖИ с разрешающими первой строкой и вторым столбцом табл. 33 подвергнуть нельзя, так как элемент, стоящий на пересечении указанных строки и столбца, равен нулю. Это говорит о том, что пара переменных x_1, x_3 не может составить базис (векторы-коэффициенты при x_1 и x_3 линейно зависимы). Поэтому общее число БР у данной системы будет меньше шести.

Преобразовав последовательно шагами МЖИ табл. 32 и 33, получим другие БР: (4/3; 0; 0; 2/3), (0; –2, –2/3; 0), (0; 0; –4/9; 2/3). Итак, данная система имеет пять БР.

В экономических задачах отрицательные значения переменных не имеют, как правило, реального смысла. Рассмотрим поэтому способ отыскания *неотрицательных базисных решений* (НБР) системы линейных уравнений, т. е. решений, все компоненты которых либо положительны, либо равны нулю.

Выше было установлено, что для нахождения БР системы линейных уравнений необходимо в последней жордановой таблице, содержащей общее решение, приравнять нулю стоящие на верху таблицы свободные переменные; соответствующие значения базисных переменных будут равны свободным членам. Если к тому же свободные члены окажутся неотрицательными, то полученное БР будет одним из интересующих нас НБР данной системы. Именно НБР имеют особое значение в математическом программировании, там их называют *опорными решениями* (*планами*). Дело в том, что в соответствии с фундаментальной теоремой линейного программирования оптимальный план разрешимой задачи линейного программирования совпадает по крайней мере с одним из НБР (опорных планов) системы ограничительных линейных уравнений задачи.

Как же организовать жордановы исключения, чтобы в последней таблице получилось одно из НБР данной системы? Надо, оказывается, алгоритм жордановых исключений дополнить специальным правилом выбора разрешающего элемента.

Предположим, что данная система линейных уравнений совместна. Без нарушения общности рассуждений можно считать, что все свободные члены уравнений системы неотрицательны, ибо, если бы в каком-либо уравнении свободный член был отрицательным, после умножения обеих частей этого уравнения на минус единицу указанное условие оказалось бы выполненным. Итак, предполагается, что все свободные члены в исходной жордановой таблице неотрицательны. Задача состоит в том, чтобы, выбирая надлежащим образом разрешающие элементы, сохранить в процессе МЖИ неотрицательность свободных членов.

Предположим, что первый шаг МЖИ производится с разрешающим элементом a_{ks} (табл. 34).

Таблица 34

	…	$-x_s$	…	1
…	…	…	…	…
0 =	…	a_{is}	…	a_{i0}
…	…	…	…	…
0 =	…	$\boxed{a_{ks}}$	…	a_{k0}
…	…	…	…	…

После шага МЖИ свободный член в разрешающей строке будет равен

$$a_{k0}/a_{ks}\,. \tag{17}$$

По предположению $a_{k0} > 0$, поэтому преобразованный свободный член (17) будет неотрицательным при условии, что $a_{ks} > 0$, т. е. если разрешающий элемент положителен. Это первое требование к разрешающему элементу. В дальнейшем будем исходить из того, что это требование выполнено.

После шага МЖИ свободный член произвольной i-й строки равен

$$\frac{a_{i0}a_{ks} - a_{is}a_{k0}}{a_{ks}} = a_{i0} - \frac{a_{is}a_{k0}}{a_{ks}}\,. \tag{18}$$

Выражение (18) будет неотрицательно при условии, что

$$a_{i0} \geq \frac{a_{is}a_{k0}}{a_{ks}}\,. \tag{19}$$

Так как $a_{i0} \geq 0$, $a_{k0} > 0$, $a_{ks} > 0$, неравенство (19) справедливо при любом отрицательном a_{is}.

Пусть теперь $a_{is} > 0$, тогда неравенство (19) можно переписать в виде

$$\frac{a_{k0}}{a_{ks}} \leq \frac{a_{i0}}{a_{is}}\,. \tag{20}$$

Неравенством (20) выражается второе требование к разрешающему элементу: отношение свободного члена разрешающей строки к разрешающему элементу должно быть наименьшим из отношений других свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца. Может оказаться, что неравенство (20) выполняется для нескольких строк, тогда разрешающий элемент можно взять в любой из этих строк.

В процессе жордановых исключений с разрешающими элементами, удовлетворяющими установленным требованиям, может встретиться нуль-строка, в которой свободный член положительный, а все остальные элементы неположительные. Такой строке соответствует уравнение с неотрицательными коэффициентами. Это уравнение не может быть выполнено ни при каких неотрицательных значениях переменных, и поэтому исходная система уравнений несовместна в области неотрицательных значений переменных.

Итак, *для отыскания НБР системы линейных уравнений надо записать ее в форме жордановой таблицы так, чтобы все свободные члены были неотрицательны, а затем выполнить возможное число шагов МЖИ, выбирая разрешающие элементы среди положительных чисел таблицы по наименьшему отношению свободных членов к соответствующим положительным элементам столбца, назначенного в разрешающие. Искомое НБР найдется из последней таблицы приравниванием верхних (свободных) переменных нулю, а базисных переменных — свободным членам.*

Ранее отмечалось, что система линейных уравнений может иметь не более C_n^r БР. Что же касается НБР, то их у системы будет меньше C_n^r. Так, система в примере 8 имеет три БР, но неотрицательных среди них только два; система в примере 9 обладает пятью БР, а неотрицательных из них всего два.

Пример 10. Найти какое-либо НБР системы

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3,\\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 2,\\ -3x_1 \qquad - x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Запишем систему в форме жордановой таблицы, умножив предварительно обе части третьего уравнения на -1 (табл. 35). За разрешающий можно принять любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Пусть разрешающим будет, например, третий столбец. Разрешающую строку определим по наименьшему отношению свободных членов к положительным элементам третьего столбца: $\min(3/1; 1/1) = 1/1$. Наименьшее из этих отношений соответствует третьей строке, она и будет разрешающей. На пересечении третьей строки и третьего столбца находится разрешающий элемент 1, с которым и выполняется шаг МЖИ. В полученной таблице (табл. 36) разрешающим выбран первый столбец, а разрешающая строка определена по наименьшему отношению $\min(2/5; 2/2) = 2/5$. Ею оказалась первая строка. С разрешающим элементом 5 выполнен шаг МЖИ, приведший к табл. 37. В этой таблице разрешающим может быть

Т а б л и ц а 35

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
0 =	2	−1	1	−1	3
0 =	2	−1	0	1	2
0 =	−3	0	$\boxed{1}$	1	1

Т а б л и ц а 36

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	1
0 =	$\boxed{5}$	−1	−2	2
0 =	2	−1	1	2
x_3 =	−3	0	1	1

лишь элемент 9/5, с которым и сделан последний шаг МЖИ. Из полученной таблицы (табл. 38) при $x_2 = 0$ находим одно из НБР: (2/3; 0; 7/3; 2/3).

Таблица 37

	$-x_2$	$-x_4$	1
$x_1 =$	−1/5	−2/5	2/5
$0 =$	−3/5	$\boxed{9/5}$	6/5
$x_3 =$	−3/5	−1/5	11/5

Таблица 38

	$-x_2$	1
$x_1 =$		2/3
$x_4 =$		2/3
$x_3 =$		7/3

Пример 11. Найти НБР системы

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -4, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Запишем данную систему в форме табл. 39 и преобразуем ее шагом МЖИ с разрешающим элементом 2. Он удовлетворяет требованиям, предъявляемым к разрешающим элементам при отыскании НБР. В результате получим табл. 40. В первой строке этой таблицы все элементы отрицательны, а свободный член положителен. Строке отвечает уравнение $x_1 + 4x_3 + 8 = 0$, не удовлетворяющееся ни при каких неотрицательных x_1 и x_3. Следовательно, данная система не имеет неотрицательных решений, в том числе и базисных.

Таблица 39

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$0 =$	−3	−4	8	4
$0 =$	1	$\boxed{2}$	−6	2

Таблица 40

	$-x_1$	$-x_3$	1
$0 =$	−1	−4	8
$x_2 =$	1/2	−3	1

Пример 12. Найти все НБР системы

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 \phantom{{}+x_4} &= 12, \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= 12. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Система уже разрешена относительно базиса переменных $\{x_2, x_4\}$. В этом базисе при $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ сразу получаем одно из НБР: (0; 12; 0; 12). Другие НБР будем искать исходя из табл. 41, в форме которой записана данная система.

Непосредственно видно, что уравнения данной системы линейно независимы (коэффициенты при переменных непропорциональны), а потому ранг системы равен 2. Следовательно, базисов переменных может быть не более C_4^2. Кроме того, базисы могут образовать следующие пары переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2,

x_3; x_3, x_4. Проверим это с помощью МЖИ, а попутно будем исследовать базисы на наличие в них НБР.

Начнем с пары переменных x_1, x_2. В табл. 41 элемент 2 удовлетворяет требованиям, предъявляемым к разрешающему элементу при поиске НБР. С ним и преобразовываем табл. 41 в табл. 42, соответствующую базису $\{x_1, x_2\}$, в котором существует еще одно НБР: (6; 18; 0; 0).

Таблица 41

	$-x_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	-1	4	12
$x_4 =$	$\boxed{2}$	1	12

Таблица 42

	$-x_4$	$-x_3$	1
$x_2 =$	1/2	$\boxed{9/2}$	18
$x_1 =$	1/2	1/2	6

Таблица 43

	$-x_4$	$-x_2$	1
$x_3 =$	1/9	2/9	4
$x_1 =$	$\boxed{4/9}$	$-1/9$	4

Обратимся к следующей паре переменных: x_1, x_3. Подвергнем шагу МЖИ табл. 42, приняв за разрешающий элемент 9/2 (он положительный и отвечает наименьшему из отношений 18 : 9/2 и 6 : 1/2). В результате получаем табл. 43, соответствующую базису $\{x_1, x_3\}$, в котором решение (4; 0; 4; 0) является и базисным, и неотрицательным.

Исследуем очередную пару переменных x_1, x_4. Из табл. 41 видно, что перейти к базису $\{x_1, x_4\}$ можно, взяв за разрешающий элемент -1. Однако он не отвечает требованию положительности. Это означает, что в базисе $\{x_1, x_4\}$ получится БР, в котором не все базисные компоненты положительны, но такое решение нас не интересует.

Рассмотрим следующую пару переменных: x_2, x_3. Она образует базис, что видно, например, по табл. 41, если подвергнуть ее шагу МЖИ с разрешающим элементом 1. Но этот элемент, удовлетворяя требованию положительности, не удовлетворяет второму требованию — минимальности отношения свободного члена к разрешающему элементу. В самом деле, для элементов второго столбца табл. 41 упомянутые отношения равны 12/4 и 12/1. Меньшее из них соответствует первой строке, а не второй, в которой расположен элемент, необходимый для перехода к интересующему нас базису $\{x_2, x_3\}$. Все это говорит о том, что в БР, соответствующем базису $\{x_2, x_3\}$, некоторые компоненты будут отрицательными.

Не следует думать, что положение изменится, если к базису $\{x_2, x_3\}$ перейти с помощью какой-нибудь другой таблицы, например табл. 42. В этом можно легко убедиться, проанализировав аналогичным образом табл. 42 или 43.

Остается исследовать пару переменных x_3, x_4. Она образует базис, и к нему можно перейти, подвергнув шагу МЖИ, например, табл. 43. Элемент 4/9 этой таблицы удовлетворяет необходимым для получения НБР требованиям, и, сделав с ним шаг МЖИ, приходим к табл. 44, содержащей последнее, четвертое, НБР данной системы: (0; 0; 3; 9).

Таблица 44

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$			3
$x_4 =$			9

5. Применение жордановых исключений в линейном программировании

В линейном программировании часто приходится находить решения систем линейных неравенств или смешанных систем, состоящих из неравенств и уравнений. Покажем, каким образом эту задачу можно свести к решению эквивалентной системы линейных уравнений.

Рассмотрим сначала неравенство вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq a. \tag{21}$$

Добавив к левой части этого неравенства неотрицательную величину x_{n+1}, равную разности между правой и левой частями неравенства, получим следующее уравнение:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = a. \tag{22}$$

Покажем, что всякому решению $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ неравенства (21) соответствует вполне определенное решение $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ уравнения (22), в котором $\alpha_{n+1} \geq 0$, и наоборот.

В самом деле, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — решение неравенства (21), то, взяв $\alpha_{n+1} = a - (a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n)$, получим $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a$, откуда следует, что совокупность чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, где $\alpha_{n+1} \geq 0$, представляет собой решение уравнения (22).

Обратно, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, где $\alpha_{n+1} \geq 0$, — решение уравнения (22), то из тождества $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a$ следует $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \leq a$, т. е. упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ образует решение неравенства (21), чем и завершается доказательство.

На основании доказанного выше говорят, что неравенство (21) эквивалентно уравнению (22) и неравенству $x_{n+1} \geq 0$.

Полученный результат можно обобщать на случай системы m линейных неравенств с n переменными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq a_{i0} \quad (i = \overline{1, m}), \tag{23}$$

т. е. можно доказать, что система (23) эквивалентна системе m линейных уравнений с $n + m$ переменными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = a_{i0} \quad (i = \overline{1, m}), \tag{24}$$

где $x_{n+i} \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$.

Эквивалентность мы понимаем в том смысле, что всякому решению $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ системы линейных неравенств (23) соответствует определенное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m-1}, \alpha_{n+m}$ системы линейных уравнений (24), и обратно, причем дополнительные переменные удовлетворяют условию неотрицательности.

Заметим, что система (23) может содержать также и неравенства вида $a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \geq a_{k0}$. Такое неравенство эквивалентно линейному уравнению $a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = a_{k0}$, в котором дополнительная неотрицательная переменная $x_{n+k} \geq 0$ вычитается из левой части.

Понимая эквивалентность в указанном выше смысле, можно рассмотреть и обратную задачу — переход от системы уравнений к системе неравенств.

Рассмотрим совместную неопределенную систему m линейных уравнений с n переменными

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i0} \quad (i = \overline{1, m}), \tag{25}$$

где

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{26}$$

Предположим, что все уравнения системы (25) линейно независимы, т. е. ранг r системы равен m. В таком случае, записав систему в форме жордановой таблицы и выполнив m шагов МЖИ, мы придем к табл. 45, в которой содержится разрешенная форма данной системы:

$$x_k = \sum_{s=1}^{n-m} b_{k,m+s}(-x_{m+s}) + b_{k0} \quad (k = \overline{1, m}). \tag{27}$$

Таблица 45

	$-x_{m+1}$	…	$-x_{m+s}$	…	$-x_n$	1
$x_1 =$	$b_{1,m+1}$	…	$b_{1,m+s}$	…	b_{1n}	b_{10}
…	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	…
$x_k =$	$b_{k,m+1}$	…	$b_{k,m+s}$	…	b_{kn}	b_{k0}
…	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	…
$x_m =$	$b_{m,m+1}$	…	$b_{m,m+s}$	…	b_{mn}	b_{m0}

Учитывая условия (26) неотрицательности переменных x_j, опустим в уравнениях (27) базисные переменные x_k. В результате получим систему линейных неравенств с $n - m$ переменными:

$$\sum_{s=1}^{n-m} b_{k,m+s}x_{m+s} \le b_{k0} \quad (k = \overline{1, m}). \tag{28}$$

Присоединим к системе (28) неиспользованные условия неотрицательности свободных переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$, т. е.

$$x_{m+s} \ge 0 \quad (s = \overline{1, n-m}). \tag{29}$$

Таким образом, мы пришли к системе линейных неравенств (28), (29), эквивалентной системе линейных уравнений (25) с неотрицательными переменными.

Используем полученные выше результаты при решении задач линейного программирования.

Пример 13. Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется не более чем за 6 ед. времени выпустить 30 ед. продукции $П_1$ и 96 ед. продукции $П_2$. Каждый из видов продукции может производиться машинами *А* и *Б*, мощности которых и затраты, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, приведены в табл. 46.

Таблица 46

Машина	Мощность машины для продукции вида		Затраты на производство продукции вида	
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$
А	6	24	4	47
Б	13	13	13	26

Составить оптимальный план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин *А* и *Б* должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции $П_1$ и $П_2$, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной и в то же время заданный план был выполнен как по времени, так и по номенклатуре.

Решение. Составим экономико-математическую модель данной задачи. Пусть x_1 — время, в течение которого машина *А* занята изготовлением продукции $П_1$, а x_2 — продукции $П_2$; x_3 — время занятости машины *Б* изготовлением продукции $П_1$, а x_4 — продукции $П_2$. Через f обозначим общую стоимость всей выпущенной продукции.

Учитывая стоимость единицы времени работы каждой машины по изготовлению единицы продукции каждого вида (см. табл. 46), общую стоимость всей произведенной продукции можно выразить так:

$$f = 4x_1 + 47x_2 + 13x_3 + 26x_4. \tag{30}$$

По условию задачи время работы машины A по выполнению заданного плана не должно превышать 6 ед. времени, т. е.

$$x_1 + x_2 \leq 6. \tag{31}$$

Аналогичное требование накладывается и на общее время работы машины $Б$:

$$x_3 + x_4 \leq 6. \tag{32}$$

С учетом мощностей машин A и $Б$ (см. табл. 46) условие выполнения заданного плана по продукции $П_1$ выразится равенством

$$6x_1 + 13x_3 = 30, \tag{33}$$

а по продукции $П_2$ — равенством

$$24x_2 + 13x_4 = 96. \tag{34}$$

По смыслу переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 они должны выражаться неотрицательными числами, т. е.

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1, 4}). \tag{35}$$

Соотношения (30)—(35) образуют экономико-математическую модель данной задачи. Математически задача сводится к определению числовых значений x_1^*, x_2^*, x_3^* и x_4^* переменных x_1, x_2, x_3 и x_4, удовлетворяющих линейным ограничениям (31)—(35) и доставляющих минимум линейной функции (30). Это типичная задача линейного программирования.

Вводя в неравенства (31) и (32) дополнительные неотрицательные переменные x_5 и x_6, приходим к следующей эквивалентной системе линейных уравнений с условиями неотрицательности переменных:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} x_1 + & x_2 & & & + x_5 & & = 6, \\ & & x_3 + & x_4 & & + x_6 & = 6, \\ 6x_1 & & + 13x_3 & & & & = 30, \\ & 24x_2 & & + 13x_4 & & & = 96, \end{array}\right\} \tag{36}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1, 6}). \tag{37}$$

В процессе МЖИ мы увидим, что ранг r системы линейных уравнений (36) равен 4, а потому $n - r = 6 - 4 = 2$. Значит, задачу можно решить графически. Для этого модель (30), (36), (37) с помощью МЖИ преобразуем в эквивалентную модель с ограничениями-неравенствами, которые будут содержать две переменные. С этой целью запишем систему (36) в форме жордановой таблицы (табл. 47). Поскольку переменные x_5 и x_6 входят в систему (36) только по одному разу (в отличие от остальных переменных), то первые два уравнения системы в табл. 47 записаны в разрешенной относительно этих переменных форме, чем «сэкономлены» два шага МЖИ.

Таблица 47

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_5 =$	1	1	0	0	6
$x_6 =$	0	0	1	1	6
$0 =$	6	0	$\boxed{13}$	0	30
$0 =$	0	24	0	13	96

Таблица 48

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	1
$x_5 =$	1	1	0	6
$x_6 =$	–6/13	0	1	48/13
$x_3 =$	6/13	0	0	30/13
$0 =$	0	24	$\boxed{13}$	96

Выполняя шаги МЖИ с выделенными в табл. 47 и 48 разрешающими элементами, приходим к табл. 49, в которой содержится разрешенная форма системы (36):

$$\left.\begin{aligned} x_5 &= -x_1 - x_2 + 6, \\ x_6 &= 6/13x_1 + 24/13x_2 - 48/13, \\ x_3 &= -6/13x_1 + 30/13, \\ x_4 &= - 24/13x_2 + 96/13. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Таблица 49

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_5 =$	1	1	6
$x_6 =$	–6/13	–24/13	–48/13
$x_3 =$	6/13	0	30/13
$x_4 =$	0	24/13	96/13

Потребовалось сделать четыре шага МЖИ, а это и свидетельствует о том, что ранг системы (36) равен 4. Заметим, что в данном случае мы фактически выполнили только два шага МЖИ, а еще два пришлось бы сделать, если бы первые два уравнения системы (36) были записаны в табл. 47 в форме нуль-строк.

Опуская в уравнениях (38) неотрицательные базисные переменные x_3, x_4, x_5 и x_6, получаем эквивалентную систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_1 + 4x_2 &\ge 8, \\ x_1 &\le 5, \\ x_2 &\ge 4. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Присоединяя к системе (39) неиспользованные условия неотрицательности свободных переменных x_1 и x_2, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6,\\ x_1 + 4x_2 &\ge 8,\\ x_1 &\le 5,\\ x_2 &\ge 4,\\ x_1 &\ge 0,\\ x_2 &\ge 0.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Остается целевую функцию (30) выразить через переменные x_1 и x_2 с помощью уравнений (38). В результате получаем

$$f = -2x_1 - x_2 + 222. \tag{41}$$

Итак, проблема свелась к графическому решению двухмерной задачи минимизации линейной функции (41) при линейных ограничениях-неравенствах (40). Это решение приведено на рис. 1.

Как видно из рисунка, минимум функции (41) достигается в вершине $\bar{x}^*$, координаты $x_1^* = 5$, $x_2^* = 1$ которой находятся в результате совместного решения уравнений граничных прямых $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1 = 5$, пересекающихся в этой точке. Зная x_1^* и x_2^*, по формулам (38) определяем остальные компоненты оптимального плана: $x_3^* = 0$, $x_4^* = 72/13$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 6/13$. При этом $f_{\min} = 211$.

Итак, по оптимальному плану на машине A следует производить продукцию $П_1$ в течение 5 ед. времени, продукцию $П_2$ — 1 ед. времени и весь фонд времени для машины A будет использован ($x_5^* = 0$). На машине $Б$ надо изготавливать только продук-

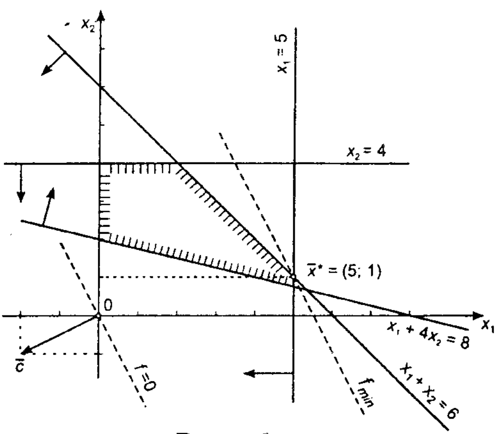


Рис. 1

цию $П_2$ (так как $x_3^* = 0$) в течение 72/13 ед. времени. При этом 6/13 ед. времени останутся неиспользованными. Стоимость выпущенной продукции будет минимальной для предприятия и составит 211 ден. ед.

Пример 14. Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены в табл. 50. По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и не менее 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы 6 ден. ед., кукурузы — 4 ден. ед. Критерий оптимальности — максимум валовой продукции в денежном выражении.

Таблица 50

Культура	Урожайность (ц/га) участка	
	I	II
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

Решение. Обозначим через x_1 площадь, отводимую под посев пшеницы на участке I, через x_2 — на участке II, через x_3 и x_4 — площади, отводимые под посев кукурузы соответственно на участках I и II. Через f обозначим общую стоимость валовой продукции.

Площади выражаются неотрицательными числами, т. е.

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}). \qquad (42)$$

Так как на участке I планируется x_1 га засеять пшеницей и x_3 га — кукурузой, то условие полной занятости участка запишется так:

$$x_1 + x_3 = 100. \qquad (43)$$

Для участка II аналогичное условие выразится равенством

$$x_2 + x_4 = 200. \qquad (44)$$

С участка I предполагается собрать $20x_1$, а с участка II — $15x_2$ ц пшеницы. Всего же необходимо собрать не менее 1500 ц. Это требование можно записать в форме неравенства

$$20x_1 + 15x_2 \geq 1500. \qquad (45)$$

Аналогичное требование к валовому сбору кукурузы приводит к неравенству

$$35x_3 + 30x_4 \geq 4500. \qquad (46)$$

Стоимость пшеницы, которую предполагается собрать с обоих участков, составит $6(20x_1 + 15x_2)$ ден. ед., стоимость кукурузы — $4(35x_3 + 30x_4)$ ден. ед., а общая стоимость f валовой продукции выразится суммой

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4. \qquad (47)$$

Соотношения (42)—(47) образуют экономико-математическую модель данной задачи, которая сводится к нахождению решения (x_1^* ; x_2^* ; x_3^* ; x_4^*) системы линейных уравнений и неравенств (42)—(46), максимизирующего линейную функцию (47).

Преобразуем неравенства (45) и (46) в эквивалентные уравнения:

$$20x_1 + 15x_2 - x_5 = 1500, \qquad (48)$$
$$35x_3 + 30x_4 - x_6 = 4500, \qquad (49)$$

в которых дополнительные переменные x_5 и x_6 неотрицательны, т. е. $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$. Эти переменные в условиях задачи имеют вполне определенный экономический смысл: они оценивают величину возможного превышения фактического сбора соответственно пшеницы и кукурузы над минимальным плановым заданием.

Запишем систему ограничительных уравнений (43), (44), (48) и (49) в форме жордановой таблицы (табл. 51), дополнив ее строкой целевой функции (47).

Таблица 51

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	1
0 =	1	0	1	0	0	0	100
0 =	0	1	0	1	0	0	200
0 =	$\boxed{20}$	15	0	0	–1	0	1500
0 =	0	0	35	30	0	–1	4500
f =	–120	–90	–140	–120	0	0	0

Таблица 52

	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	1
0 =	–3/4	$\boxed{1}$	0	1/20	0	25
0 =	1	0	1	0	0	200
x_1 =	3/4	0	0	–1/20	0	75
0 =	0	35	30	0	–1	4500
f =	0	–140	–120	–6	0	9000

Последовательно преобразовывая шагами МЖИ табл. 51—54 (включая и строку целевой функции) с положительными разрешающими элементами, отвечающими минимальным отношениям свободных членов к положительным элементам соответствующего разрешающего столбца, приходим наконец к табл. 55, в которой содержится НБР (опорный план): (x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*; x_5^*; x_6^*) = (75; 0; 25; 200; 0; 2375).

Поскольку в строке целевой функции нет отрицательных элементов, полученный план является оптимальным. При этом $f_{\max} = 36\ 500$.

Таблица 53

	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	1
$x_3 =$	–3/4	0	1/20	0	25
0 =	1	1	0	0	200
$x_1 =$	3/4	0	–1/20	0	75
0 =	105/4	$\boxed{30}$	7/4	–1	3625
f =	–105	–120	1	0	12 500

Таблица 54

	$-x_2$	$-x_5$	$-x_6$	1
$x_3 =$	–3/4	1/20	0	25
0 =	1/8	7/120	$\boxed{1/30}$	475/6
$x_1 =$	3/4	–1/20	0	75
$x_4 =$	21/24	7/120	–1/30	725/6
f =	0	8	–4	27 000

Таблица 55

	$-x_2$	$-x_5$	1
$x_3 =$			25
$x_6 =$			2375
$x_1 =$			75
$x_4 =$			200
f =	15	15	36 500

Заметим попутно, что, если бы в строке целевой функции таблицы, содержащей опорный план, оказался хотя бы один отрицательный элемент (не считая свободного члена), опорный план был бы неоптимальным и жордановы исключения следовало продолжить, выбирая разрешающие столбцы по отрицательным элементам строки целевой функции, а разрешающие строки — по наименьшим отношениям свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. И так до тех пор, пока в строке целевой функции не останется отрицательных элементов. В нашем же случае решение закончено.

Итак, для того чтобы максимизировать в денежном выражении валовую продукцию и получить 36 500 ден. ед., на участке I следует 75 га отвести под пшеницу, 25 га — под кукурузу, а участок II полностью занять кукурузой ($x_2^* = 0$). При этом плановое задание по пшенице будет выполнено ($x_5^* = 0$), а по кукурузе перевыполнено на 2375 ц ($x_6^* = 2375$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.

2. *Бирман И. Я.* Оптимальное программирование. — М.: Экономика, 1968.

3. *Браверман Э. М.* Математические модели планирования и управления в экономических системах. — М.: Наука, 1976.

4. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972.

5. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1967.

6. *Калихман И. Л., Войтенко М. А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1979.

7. *Капустин В. Ф.* Практические занятия по курсу математического программирования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

8. *Кузнецов А. В., Кузнецова Д. С.* Жордановы преобразования и их применение в линейной алгебре. — Мн.: Изд-во БГИНХ, 1976.

9. *Кузнецов А. В., Новикова Г. И., Холод Н. И.* Сборник задач по математическому программированию. — Мн.: Выш. шк., 1985.

10. *Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И.* Высшая математика: Математическое программирование. — Мн.: Выш. шк., 2001.

11. *Кузнецов А. В., Холод Н. И.* Математическое программирование. — Мн.: Выш. шк., 1984.

12. *Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. — Мн.: Выш. шк., 2001.

13. *Сакович В.* А. Исследование операций. — Мн.: Выш. шк., 1985.

14. *Сакович В. А.* Модели управления запасами. — Мн.: Наука и техника, 1986.

15. *Сакович В. А.* Оптимальные решения экономических задач. — Мн.: Выш. шк., 1987.

16. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1985.

17. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*

---

* Составила Е. В. Малышева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Математическое программирование

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Под общей редакцией
А. В. КУЗНЕЦОВА и Р. А. РУТКОВСКОГО

Издание третье, стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 30.04.10.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 23,52. Тираж 1500 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru